

TD1 : corrigé

1) Ecrire la résultante des forces de pression qui s'exercent sur le barrage

La profondeur dans ce repère s'exprime naturellement $h - x_2$, et la pression et donc sous la forme :

$$p = \rho_0 g (h - x_2)$$

La résultante d'une pression s'exprime de la façon suivante :

$$\underline{F} = \int_{\partial\Omega} -p \underline{n} dS \text{ avec } \underline{n} \text{ la normale sortante au solide, ici } \underline{n} = -\underline{e}_1$$

Dans le cas du barrage on a donc :

$$\underline{F} = \int_{\partial\Omega} -\rho_0 g (h - x_2) (-\underline{e}_1) dS = \int_0^L \int_0^h \rho_0 g (h - x_2) \underline{e}_1 dx_2 dx_3$$

Le calcul de cette intégrale permet d'aboutir au résultat évident :

$$\underline{F} = \int_0^L \left(\rho_0 g \frac{h^2}{2} \right) dx_3 \underline{e}_1 = \rho_0 g L \frac{h^2}{2} \underline{e}_1$$

2) Déterminer le poids du barrage et son point d'application

Le vecteur poids est évidemment de la forme $\underline{P} = -mg \underline{e}_2$ où m est la masse du barrage, et s'applique au centre de gravité G du barrage.

Le calcul de la masse est trivial : $m = \rho \times V = \rho \times L \times \frac{1}{2} h^2$ et donc $\underline{P} = -\rho L \frac{h^2}{2} g \underline{e}_2$

On va se permettre d'admettre (vu au collège) que les coordonnées du centre de gravité d'un triangle sont la moyenne des coordonnées de ses sommets (O, A, B) :

$$\underline{x}^G = \underline{OG} = \frac{1}{3} (\cancel{\underline{OO}} + \underline{OA} + \underline{OB}) = \frac{1}{3} (h \underline{e}_2 + h \underline{e}_1)$$

3) Ecrire l'équilibre des efforts et en déduire une condition nécessaire sur la masse volumique du barrage pour que le barrage ne glisse pas sur le socle rocheux

Nous avons écrit ci-dessus l'effort résultant de la force de pression ainsi que le poids du barrage. Pour que le barrage soit à l'équilibre il existe évidemment un troisième

effort, qui est la réaction du socle rocheux sur le barrage notée $\underline{R}$. Ces trois efforts sont à l'équilibre d'après le PFS et on peut donc écrire :

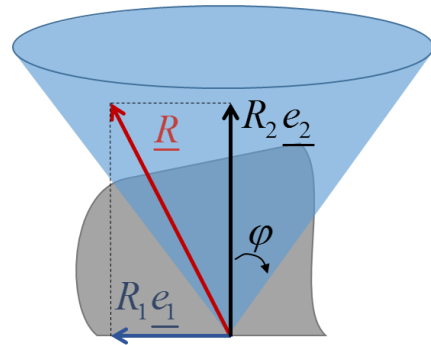
$$\begin{aligned}\underline{0} &= \sum \underline{F}^{ext} \\ \underline{0} &= \underline{P} + \underline{F} + \underline{R} \\ \underline{0} &= -\rho L \frac{h^2}{2} g \underline{e}_2 + \rho_0 g L \frac{h^2}{2} \underline{e}_1 + \underline{R}\end{aligned}$$

On en déduit immédiatement les trois composantes de la réaction $\underline{R}$:

$$\begin{aligned}R_1 &= \underline{R} \cdot \underline{e}_1 = -\rho_0 g L \frac{h^2}{2} \\ R_2 &= \underline{R} \cdot \underline{e}_2 = \rho L \frac{h^2}{2} g \\ R_3 &= \underline{R} \cdot \underline{e}_3 = 0\end{aligned}$$

La loi de Coulomb nous permet donc d'écrire :

$$\begin{aligned}\|R_1 \underline{e}_1\| &\leq f \|R_2 \underline{e}_2\| \\ \rho_0 g L \frac{h^2}{2} &\leq f \rho L \frac{h^2}{2} g \\ \rho &\geq \frac{\rho_0}{f}\end{aligned}$$



Dans la suite on va considérer que le coefficient de frottement est très grand, et que cette condition est donc respectée.

4) On considère cette condition respectée (il y a adhérence) : écrire la condition de non basculement du barrage.

On a écrit précédemment les résultantes des trois efforts qui s'appliquent sur le barrage :

$$\begin{aligned}\underline{P} &= -\rho L \frac{h^2}{2} g \underline{e}_2 \\ \underline{F} &= \rho_0 g L \frac{h^2}{2} \underline{e}_1 \\ \underline{R} &= -\rho_0 g L \frac{h^2}{2} \underline{e}_1 + \rho L \frac{h^2}{2} g \underline{e}_2\end{aligned}$$

Les points d'applications des efforts $\underline{F}$ et $\underline{R}$ sont encore méconnus.

Pour calculer le point d'application de la résultante des efforts pression $\underline{F}$, on peut chercher le point pour lequel l'effort $\underline{F}$ créé le même moment (autour de n'importe quel point) que le moment créé par l'ensemble des pressions appliquées.

Calculons tout d'abord le moment créé par les efforts de pressions $p\underline{e}_1$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_O(p\underline{e}_1) &= \int_0^L \int_0^h (\underline{OM} \wedge p\underline{e}_1) dx_2 dx_3 \\ \mathfrak{M}_O(p\underline{e}_1) &= \int_0^L \int_0^h ((x_2 \underline{e}_2) \wedge (\rho_0 g (h - x_2) \underline{e}_1)) dx_2 dx_3 \\ \mathfrak{M}_O(p\underline{e}_1) &= - \int_0^L \int_0^h x_2 \rho_0 g (h - x_2) dx_2 dx_3 \underline{e}_3 \\ \mathfrak{M}_O(p\underline{e}_1) &= -L \rho_0 g \int_0^h x_2 (h - x_2) dx_2 \underline{e}_3 \\ \mathfrak{M}_O(p\underline{e}_1) &= -L \rho_0 g \left(\left[\frac{hx_2^2}{2} \right]_0^h - \left[\frac{x_2^3}{3} \right]_0^h \right) \underline{e}_3 = -L \rho_0 g \frac{h^3}{6} \underline{e}_3\end{aligned}$$

On vérifie au passage que la valeur obtenue a bien la dimension d'un moment :

$$\underbrace{-L \rho_0 g \frac{h^3}{6}}_{\substack{\text{m} \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{N} \cdot \text{kg}^{-1} \\ \text{m}^3}} = \underbrace{\mathfrak{M}_O(p\underline{e}_1)}_{\text{N} \cdot \text{m}}$$

On appelle C le point d'application de la résultante $\underline{F}$. Le moment créé par cet effort sera évidemment :

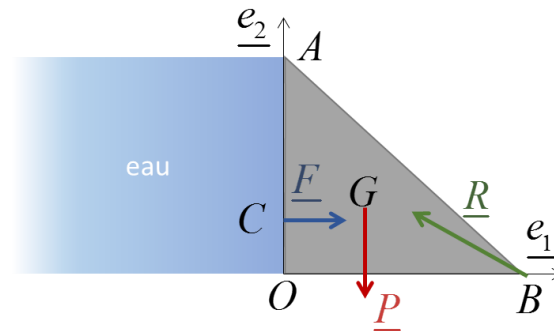
$$\mathfrak{M}_O(\underline{F}) = \underline{OC} \wedge \underline{F} = x_2^C \underline{e}_2 \wedge \rho_0 g L \frac{h^2}{2} \underline{e}_1 = -x_2^C \rho_0 g L \frac{h^2}{2} \underline{e}_3$$

En égalant ces deux quantités on trouve les coordonnées du point C :

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_O(\underline{F}) &= \mathfrak{M}_O(p\underline{e}_1) \\ \Rightarrow -x_2^C \cancel{\rho_0} \cancel{g} \cancel{L} \frac{h^2}{2} \underline{e}_3 &= -\cancel{L} \cancel{\rho_0} \cancel{g} \frac{h^3}{6} \underline{e}_3 \\ \Rightarrow x_2^C &= \frac{h}{3}\end{aligned}$$

On connaît ainsi le point d'application de la résultante $\underline{F}$. Qu'en est-il de $\underline{R}$?

Si le barrage se met à basculer, on comprend bien qu'il tournera autour du point B de telle sorte que le barrage sera soumis aux efforts suivants :



On est donc en mesure désormais d'écrire l'équilibre des moments autour de n'importe quel point du barrage. Ecrivons par exemple l'équilibre au point B :

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum \mathcal{M}_B(\underline{F}^{ext}) \\
 0 &= \mathcal{M}_B(\underline{R}) + \mathcal{M}_B(\underline{F}) + \mathcal{M}_B(\underline{P}) \\
 0 &= \cancel{BO} \wedge \underline{R} + \underline{BC} \wedge \underline{F} + \underline{BG} \wedge \underline{P} = \underline{BC} \wedge \underline{F} + (\underline{BO} + \underline{OG}) \wedge \underline{P} \\
 0 &= \left(-he_1 + \frac{h}{3}e_2 \right) \wedge \left(\rho_0 g L \frac{h^2}{2} e_1 \right) + \left(-he_1 + \frac{1}{3}(he_2 + he_1) \right) \wedge \left(-\rho L \frac{h^2}{2} g e_2 \right) \\
 0 &= -\frac{h}{3} \rho_0 g L \frac{h^2}{2} e_3 + \frac{2h}{3} \rho L \frac{h^2}{2} g e_3 \\
 \cancel{\frac{h}{3} \rho_0 g L \frac{h^2}{2}} &= 2 \cancel{\frac{h}{3} \rho L \frac{h^2}{2}} g \\
 \rho_0 &= 2\rho
 \end{aligned}$$

Ainsi, si tous les paramètres sont fixés, cette dernière équation conduit à une condition sur la stabilité du barrage.

5) Application numérique : *quid d'un barrage en béton ? en sapin ? en acier ?*

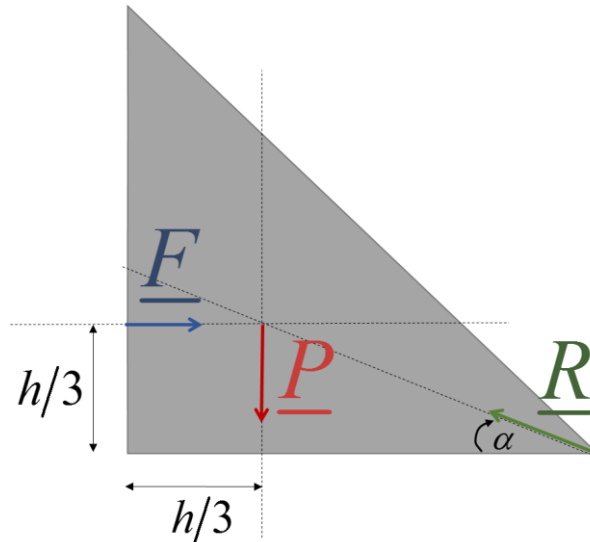
$$\rho_{\text{sapin}} = 450 \text{ kg / m}^3 \quad \rho_{\text{beton}} = 2200 \text{ kg / m}^3 \quad \rho_{\text{acier}} = 7800 \text{ kg / m}^3$$

La masse volumique de l'eau est évidemment $\rho_0 = 1000 \text{ kg / m}^3$. On observe ainsi que parmi les trois matériaux proposés ci-dessus, seuls le béton et l'acier permettent de respecter la condition $\rho_0 = 2\rho$.

6) Effectuer la même démarche en utilisant la statique graphique

On se trouve dans le cas d'un solide soumis à trois forces contenues dans le même plan. On connaît la norme de $\underline{F}$ (on l'a calculée) et sa direction ; on connaît la direction de $\underline{P}$ et on cherche à exprimer une condition sur la masse volumique ρ .

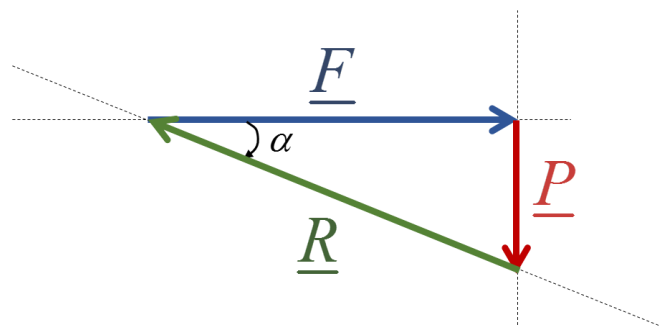
En statique graphique on sait que dans ce cas « *les trois droites d'action des efforts sont parallèles ou concourantes* ». Comme on connaît les droites d'actions de $\underline{F}$ et de $\underline{P}$, et qu'elles ne sont pas parallèles, on en déduit qu'elles sont concourantes et on connaît donc la droite d'action de $\underline{R}$:



On peut donc notamment déterminer l'angle α , car on voit bien que :

$$\tan \alpha = \frac{h/3}{2h/3} = \frac{1}{2}$$

De plus, dans ce cas, on sait que « *les trois efforts forment un triangle fermé* ». On peut donc (comme on connaît $\underline{F}$ et les trois droites d'action) former le triangle :



En reportant l'angle α on observe que $\tan \alpha = \frac{\|\underline{P}\|}{\|\underline{F}\|} = \frac{\cancel{\rho_0} \cancel{\frac{h^2}{2}}}{\cancel{\rho_0} \cancel{\frac{h^2}{2}}} = \frac{\rho}{\rho_0}$

Comme on vient montrer précédemment que $\tan \alpha = 1/2$ on retrouve bien la condition sur la masse volumique :

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{2} \Rightarrow \rho_0 = 2\rho$$