

TD2 : corrigé

Dans ce TD, les étudiants n'ont pas encore bien vu la représentation du mouvement (trajectoires, lignes de courant, formulation eulérienne/lagrangienne, etc...) : on se contente de mettre en application une boîte à outils mathématiques, en l'illustrant avec un cas physique.

Première partie : écoulement entre 2 plans infinis

1) **Faire des hypothèses sur le champ de vecteurs vitesse lorsque l'écoulement est établi, pour arriver à une forme la plus réduite possible.**

Dans le cas de l'écoulement plan, il est naturel de se placer en coordonnées cartésiennes. Comme sur l'énoncé, on peut choisir de placer le repère à mi-distance entre les deux plans, au sein d'une partie où l'écoulement est établi.

Dans le cas le plus général, le champ de vecteurs vitesses associe une vitesse à chaque point de l'espace et s'écrit :

$$\underline{v} = v_1(x_1, x_2, x_3)\underline{e}_1 + v_2(x_1, x_2, x_3)\underline{e}_2 + v_3(x_1, x_2, x_3)\underline{e}_3$$

Il est possible également d'adopter une écriture complètement équivalente qui consiste à écrire uniquement les composantes / les projections dans le repère $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ (cela est fait au lycée en général) :

$$\underline{v} = \begin{cases} v_1(x_1, x_2, x_3) \\ v_2(x_1, x_2, x_3) \\ v_3(x_1, x_2, x_3) \end{cases} \text{ ou encore sous forme de vecteur-colonne } [\underline{v}] = \begin{pmatrix} v_1(x_1, x_2, x_3) \\ v_2(x_1, x_2, x_3) \\ v_3(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix}$$

Comme l'écoulement est établi, on peut facilement faire l'hypothèse que le champ de vitesses sera uniforme, et le même quelle que soit la coordonnées x_1 :

$$\underline{v} = v_1(x_2, x_3)\underline{e}_1 + v_2(x_2, x_3)\underline{e}_2 + v_3(x_2, x_3)\underline{e}_3$$

Si les plans sont infinis, alors on peut considérer que chaque « tranche » de problème est similaire (symétrie selon $\underline{e}_3$), et donc que le problème sera complètement

indépendant de la coordonnée x_3 . On peut également considérer que le champ de vecteurs vitesse sera entièrement contenu dans le plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ de telle sorte que $v_3 = 0$.

Au final le champ de vitesses se réduit à :

$$\underline{v} = v_1(x_2)\underline{e}_1 + v_2(x_2)\underline{e}_2$$

2) Nous verrons plus tard que pour un fluide incompressible, la divergence du champ de vitesses est nécessairement nulle : montrer alors que $\underline{v} = v_1(x_2)\underline{e}_1 + K\underline{e}_2$

Il s'agit ici d'appliquer l'opérateur divergence à un champ de vecteurs. Comme l'opérateur « abaisse l'ordre du tenseur », si on l'applique au champ de vecteurs $\underline{v}(\underline{x})$ (champ de tenseurs d'ordre 1) on obtiendra alors un champ de scalaire (champ de tenseurs d'ordre 0). Le cours indique :

$$\text{div}(\underline{T}(\underline{x})) = \underline{\underline{\text{grad}(\underline{T}(\underline{x})) : \underline{I}}} = \text{Tr}(\underline{\underline{\text{grad}(\underline{T}(\underline{x}))}}) = T_{i,i} = \frac{\partial T_i}{\partial x_i}$$

On a donc plusieurs écritures possibles. Ici on se contente de la dernière (étant donné que l'on n'a pas encore calculer le gradient du champ de vitesses) :

$$\text{div}(\underline{v}(\underline{x})) = \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

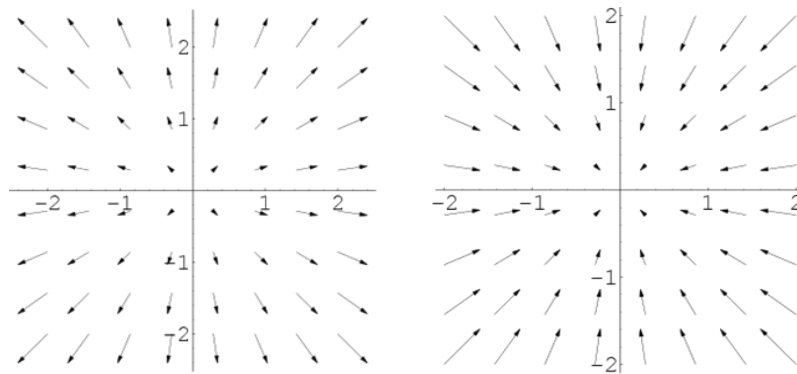
D'après la convention d'Einstein (convention de répétition sur les indices répétés) :

$$\text{div}(\underline{v}(\underline{x})) = \frac{\partial v_1(\underline{x})}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2(\underline{x})}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3(\underline{x})}{\partial x_3}$$

Si l'on reprend le champ $\underline{v} = v_1(x_2)\underline{e}_1 + v_2(x_2)\underline{e}_2$ ci-dessus cela revient à écrire :

$$\text{div}(\underline{v}(\underline{x})) = \frac{\cancel{\partial v_1(\underline{x})}}{\cancel{\partial x_1}} + \frac{\partial v_2(\underline{x})}{\partial x_2} + \frac{\cancel{\partial v_3(\underline{x})}}{\cancel{\partial x_3}} = \frac{\partial v_2(\underline{x})}{\partial x_2} = \frac{dv_2(\underline{x})}{dx_2}$$

Pour un fluide incompressible, nous verrons que cette divergence est nulle. Cela se comprend facilement à partir de l'interprétation physique de l'opérateur divergence :



divergence positive à gauche, négative à droite

Un fluide incompressible ne peut donc ni se « dilater » (à gauche) ni se « compacter » (à droite).

Dans notre cas cela se traduit par :

$$\operatorname{div}(\underline{v}(\underline{x})) = \frac{\partial v_2(\underline{x})}{\partial x_2} = \frac{dv_2(\underline{x})}{dx_2} = 0 \Rightarrow v_2(\underline{x}) = \text{Cste} = K$$

En fin de compte, le champ de vecteurs vitesse prend la forme :

$$\underline{v} = v_1(x_2)\underline{e}_1 + K\underline{e}_2$$

3) On fait l'hypothèse que le frottement implique une vitesse nulle au niveau des parois : traduire proprement cette condition.

Sur les parois $x_2 = \pm h/2$, le vecteur vitesse est égal au vecteur nul, c'est-à-dire que chaque composante du vecteur vitesse est nulle :

$$\begin{cases} v_1\left(x_2 = \pm \frac{h}{2}\right) = 0 \\ K = 0 \end{cases}$$

4) On se propose d'adopter une forme parabolique pour le champ de vitesses : proposer une forme en fonction de $v_{\max}$, la vitesse maximale du fluide.

Si l'on propose une forme parabolique, on a nécessairement un écoulement de la forme :

$$\underline{v} = v_1(x_2)\underline{e}_1 = (Ax_2^2 + Bx_2 + C)\underline{e}_1$$

Il y a donc trois constantes à déterminer, dont deux peuvent découler des deux conditions aux limites énoncées précédemment :

$$v_1\left(x_2 = \frac{h}{2}\right) = A\left(\frac{h}{2}\right)^2 + B\frac{h}{2} + C = 0 \quad (1)$$

$$v_1\left(x_2 = -\frac{h}{2}\right) = A\left(-\frac{h}{2}\right)^2 - B\frac{h}{2} + C = 0 \quad (2)$$

En écrivant l'équation (1) - (2) on arrive à :

$$\cancel{A\left(\frac{h}{2}\right)^2} + B\frac{h}{2} + C - \cancel{A\left(-\frac{h}{2}\right)^2} + B\frac{h}{2} - C = 0 \Rightarrow B = 0$$

On peut également faire l'hypothèse que la vitesse maximale $v_{\max}$ sera obtenue au point le plus éloigné des deux surfaces, c'est-à-dire sur l'axe $\underline{e}_1$ de telle sorte que :

$$v_1(x_2 = 0) = v_{\max} \Rightarrow v_1(x_2 = 0) = \cancel{A\left(\frac{h}{2}\right)^2} + \cancel{B}\frac{h}{2} + C = v_{\max} \Rightarrow C = v_{\max}$$

$$\text{L'équation (1) se réécrit alors : } A\left(\frac{h}{2}\right)^2 + v_{\max} = 0 \Rightarrow A = -v_{\max}\left(\frac{2}{h}\right)^2 = \frac{-4v_{\max}}{h^2}$$

Finalement le champ de vitesses parabolique s'écrit :

$$\underline{v} = v_1(x_2)\underline{e}_1 = \left(\frac{-4v_{\max}}{h^2}x_2^2 + v_{\max}\right)\underline{e}_1 = v_{\max}\left(1 - 4\frac{x_2^2}{h^2}\right)\underline{e}_1$$

On vérifie évidemment les deux conditions aux limites :

$$v_1\left(x_2 = \frac{h}{2}\right) = v_{\max}\left(1 - 4\frac{1}{h^2}\left(\frac{h}{2}\right)^2\right) = 0$$

$$v_1\left(x_2 = -\frac{h}{2}\right) = v_{\max}\left(1 - 4\frac{1}{h^2}\left(-\frac{h}{2}\right)^2\right) = 0$$

5) Nous verrons plus tard que l'écoulement d'un fluide visqueux entraîne un cisaillement au niveau de la paroi, proportionnel à la viscosité du fluide et au gradient du champ de vitesses. Calculer le gradient du champ de vitesses.

L'opérateur gradient augmente l'ordre du tenseur (contrairement à l'opérateur divergence qui le diminue) : le gradient d'un champ de vecteurs (tenseurs d'ordre 1) sera donc un champ de tenseurs d'ordre 2, dont on pourra représenter les différentes composantes dans une matrice 3x3 dans le cas 3D.

L'écriture du gradient d'un champ de vecteurs est simple en coordonnées cartésiennes, et s'écrit simplement :

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{grad}} \underline{v} &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3 + \\
&\quad \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1 + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_3 + \\
&\quad \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1 + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2 + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \\
&= \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j
\end{aligned}$$

Cette dernière écriture utilisant la convention d'Einstein sur la sommation des indices répétés permet une forme très compacte de l'écriture du gradient. En notation matricielle, on peut écrire les composantes :

$$\left[\underline{\underline{grad}} \underline{v} \right]_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (\text{en toute rigueur, on doit préciser la base utilisée})$$

Cette écriture matricielle dépend donc de la base qui est utilisée.

Dans notre cas le champ de vitesses est très simple $\underline{v} = v_{\max} \left(1 - 4 \frac{x_2^2}{h^2} \right) \underline{e}_1$: il possède une seule dérivée non nulle, de telle sorte que :

$$\left[\underline{\underline{grad}} \underline{v} \right] = \begin{pmatrix} \cancel{\frac{\partial v_1}{\partial x_1}} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \cancel{\frac{\partial v_1}{\partial x_3}} \\ \cancel{\frac{\partial v_2}{\partial x_1}} & \cancel{\frac{\partial v_2}{\partial x_2}} & \cancel{\frac{\partial v_2}{\partial x_3}} \\ \cancel{\frac{\partial v_3}{\partial x_1}} & \cancel{\frac{\partial v_3}{\partial x_2}} & \cancel{\frac{\partial v_3}{\partial x_3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-8v_{\max} x_2}{h^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On vérifie au passage que la divergence du champ de vitesses est bien nulle (et que le fluide est bien incompressible) en utilisant les formules précédentes :

$$\begin{aligned}
\text{div}(\underline{v}(\underline{x})) &= \underline{\underline{grad}}(\underline{v}(\underline{x})) : \underline{I} = \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 \right) : \delta_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j = \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \cancel{\delta_{12}} = 0 \\
\text{div}(\underline{v}(\underline{x})) &= \text{Tr}(\underline{\underline{grad}}(\underline{v}(\underline{x}))) = 0
\end{aligned}$$

6) Les parties symétriques et antisymétriques de ce gradient correspondent aux vitesses de déformation et de rotation du fluide : calculer ces deux termes.

La partie symétrique du gradient du champ de vitesses s'écrit d'après le cours :

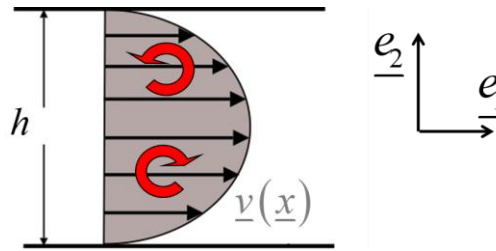
$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{d}} &= \underline{\underline{grad \, v}}^{sym} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{grad \, v}} + \underline{\underline{grad \, v}}^T \right) \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{-8v_{max}x_2}{h^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{-8v_{max}x_2}{h^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{-4v_{max}x_2}{h^2} & 0 \\ \frac{-4v_{max}x_2}{h^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Le résultat est bien un tenseur symétrique, dont toutes les composantes sont nulles pour $x_2 = 0$ et maximales sur les bords.

La partie antisymétrique du gradient du champ de vitesses s'écrit d'après le cours :

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{\Omega}} &= \underline{\underline{grad \, v}}^{antisym} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{grad \, v}} - \underline{\underline{grad \, v}}^T \right) \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{-8v_{max}x_2}{h^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{-8v_{max}x_2}{h^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{-4v_{max}x_2}{h^2} & 0 \\ \frac{4v_{max}x_2}{h^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Le résultat est bien un tenseur antisymétrique, dont toutes les composantes sont nulles pour $x_2 = 0$ et maximales sur les bords. Ces composantes correspondent à la vitesse de rotation du milieu, et cette vitesse change de signe en même temps que x_2 :



Le fait que les termes non-nuls soient selon $\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2$ et $\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1$ indique que les rotations du fluide se produisent dans le plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ uniquement.

7) Montrer que l'information sur la rotation du fluide est également contenue dans le rotationnel du champ de vitesses.

On calcule le rotationnel d'un champ de vecteur facilement à partir de d'un produit vectoriel faisant intervenir le vecteur « nabra » :

$$\underline{rot} \underline{v} = \underline{\nabla} \wedge \underline{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_{\max} \left(1 - 4 \frac{x_2^2}{h^2} \right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cancel{\frac{\partial v_1}{\partial x_2}} - \cancel{\frac{\partial x_2}{\partial v_3}} \\ \cancel{\frac{\partial v_1}{\partial x_3}} - \cancel{\frac{\partial x_1}{\partial v_3}} \\ \cancel{\frac{\partial v_2}{\partial x_1}} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{8v_{\max} x_2}{h^2} \end{pmatrix}$$

Le rotationnel du champ de vitesses s'appelle aussi la vorticité du fluide : la direction de ce vecteur indique la direction de la rotation du fluide (logiquement $\underline{e}_3$ ici) et son amplitude indique l'intensité de cette rotation. De la même façon que précédemment, on voit que la direction de rotation change avec le signe de x_2 .

On constate ici qu'il existe un facteur 2 entre la composante non-nulle de $\underline{rot} \underline{v}$ et les composantes non-nulles de $\underline{\Omega}$: ce facteur 2 se retrouvera ensuite dans les définitions du vecteur tourbillon et du vecteur vorticité du fluide.

8) L'équation de Navier-Stokes, que nous verrons à la fin du cours, régit l'écoulement du fluide et fait intervenir le laplacien du vecteur vitesse : calculer ce laplacien.

Par définition, le laplacien est la divergence du gradient : comme la divergence diminue l'ordre du tenseur et que le gradient l'augmente, l'opérateur laplacien ne

change pas l'ordre du tenseur. Ainsi, le laplacien du champ de vecteurs vitesses sera un champ de vecteurs.

On a déjà calculé précédemment le gradient du champ de vitesses :

$$\left[\underline{\underline{\text{grad } \underline{v}}} \right] = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-8v_{\max} x_2}{h^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou encore } \underline{\underline{\text{grad } \underline{v}}} = \frac{-8v_{\max} x_2}{h^2} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2$$

(ne pas hésiter à faire souvent des allers et retours entre les 2 notations)

Pour calculer le laplacien du champ de vecteurs vitesses, on doit donc considérer la formule de la divergence d'un champ de tenseurs d'ordre 2 $\underline{\underline{T}}$ (plutôt que la divergence d'un champ de vecteurs comme précédemment) qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\text{div } \underline{\underline{T}}}} &= \left(\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_3} \right) \underline{e}_1 + \left(\frac{\partial T_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_3} \right) \underline{e}_2 + \left(\frac{\partial T_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} \right) \underline{e}_3 \\ &= T_{ij,j} \underline{e}_i \end{aligned}$$

Ici on prend $\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{\text{grad } \underline{v}}}$ et donc la seule composante non nulle est : $T_{12} = \frac{-8v_{\max} x_2}{h^2}$

On a donc au final :

$$\underline{\underline{\Delta \underline{v}}} = \underline{\underline{\text{div}}}(\underline{\underline{\text{grad } \underline{v}}}) = \frac{\partial [\underline{\underline{\text{grad } \underline{v}}}]_{12}}{\partial x_2} \underline{e}_1 = \frac{-8v_{\max}}{h^2} \underline{e}_1$$

On observe donc que le laplacien du champ de vecteurs vitesses est uniforme au sein de l'écoulement et orienté selon $\underline{e}_1$.

9) A partir du théorème de flux-divergence, retrouver la condition de conservation du débit volumique durant cet écoulement.

Le théorème de flux-divergence indique que pour tout champ de tenseurs $\mathbf{T}^n(\underline{x})$ on a :

$$\int_{\Omega} \text{div}(\mathbf{T}^n(\underline{x})) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \mathbf{T}^n(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) da$$

Cette formule permet donc de passer d'une intégrale de volume à une intégrale de surface (flux à travers la frontière du milieu considéré).

En l'appliquant au cas du champ de vecteurs vitesse on obtient alors :

$$\int_{\Omega} \text{div}(\underline{v}) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \underline{v} \cdot \underline{n} da$$

On a écrit précédemment que dans le cas d'un écoulement incompressible, le terme de gauche est nul est on a :

$$0 = \int_{\partial\Omega} \underline{v} \cdot \underline{n} \, da$$

On peut séparer la frontière du milieu en 4 zones : le plateau inférieur S_{inf} de normale $\underline{n} = -\underline{e}_z$, le plateau supérieur S_{sup} de normale $\underline{n} = \underline{e}_z$, la section d'entrée S_e de normale $\underline{n} = -\underline{e}_1$ et celle de sortie S_s de normale $\underline{n} = \underline{e}_1$. On écrit par conséquent :

$$\int_{\partial\Omega} \underline{v} \cdot \underline{n} \, da = \int_{S_e} \underline{v} \cdot (-\underline{e}_1) \, da + \int_{S_s} \underline{v} \cdot (\underline{e}_1) \, da + \int_{S_{\text{sup}}} \underline{v} \cdot (\underline{e}_z) \, da + \int_{S_{\text{inf}}} \underline{v} \cdot (-\underline{e}_z) \, da = 0$$

Comme le fluide ne peut pas traverser les parois on a nécessairement :

$$\begin{aligned} & \int_{S_e} \underline{v} \cdot (-\underline{e}_1) \, da + \int_{S_s} \underline{v} \cdot (\underline{e}_1) \, da + \cancel{\int_{S_{\text{sup}}} \underline{v} \cdot (\underline{e}_z) \, da} + \cancel{\int_{S_{\text{inf}}} \underline{v} \cdot (-\underline{e}_z) \, da} = 0 \\ \Rightarrow & \int_{S_e} \underline{v} \cdot (-\underline{e}_1) \, da = - \int_{S_s} \underline{v} \cdot (\underline{e}_1) \, da \\ \Rightarrow & \boxed{\int_{S_e} v_1 \, da = \int_{S_s} v_1 \, da = Q_v} \end{aligned}$$

Le débit volumique est conservé lors de l'écoulement.

Seconde partie : écoulement dans une conduite cylindrique

10) Reprendre toutes les questions précédentes dans le cas d'une conduite cylindrique (en montrant notamment que $\underline{v} = v_z(r)\underline{e}_z$)

En coordonnées cylindriques dans le cas général :

$$\underline{v} = v_r(r, \theta, z)\underline{e}_r + v_\theta(r, \theta, z)\underline{e}_\theta + v_z(r, \theta, z)\underline{e}_z$$

Comme l'écoulement est établi, on peut facilement faire l'hypothèse que le champ de vitesses sera uniforme, et le même quelle que soit la coordonnées z :

$$\underline{v} = v_r(r, \theta)\underline{e}_r + v_\theta(r, \theta)\underline{e}_\theta + v_z(r, \theta)\underline{e}_z$$

Comme le problème est entièrement axisymétrique, le *principe de Curie* (« la symétrie des causes entraîne la symétrie des effets ») implique que le problème soit indépendant de θ et donc : $\underline{v} = v_r(r)\underline{e}_r + v_\theta(r)\underline{e}_\theta + v_z(r)\underline{e}_z$. On peut également en conclure que le fluide ne va se mettre en rotation et donc $v_\theta = 0$. Au final :

$$\underline{v} = v_r(r)\underline{e}_r + v_z(r)\underline{e}_z$$

Pour aller plus loin, on peut reprendre comme précédemment la condition d'incompressibilité du fluide qui implique $\text{div } \underline{v} = 0$, soit en coordonnées cylindriques :

$$\text{div } \underline{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \cancel{\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

$$\text{On en déduit donc : } \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} v_r = 0$$

C'est une équation différentielle sans second membre dont la solution s'écrit :

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} v_r = 0 \Rightarrow v_r = Ae^{-\int \frac{1}{r} dr} = Ae^{-\ln r + \text{cste}} = Ce^{-\ln r} = \frac{K}{r}$$

Pour déterminer la constante, on peut se servir de la condition d'adhésion à la paroi de l'enceinte :

$$v_r(r=R) = \frac{K}{R} = 0 \Rightarrow K = 0 \Rightarrow \underline{v}(r) = v_z(r)\underline{e}_z$$

Si l'on propose une forme parabolique, on a nécessairement :

$$\underline{v} = v_z(r)\underline{e}_z = (Ar^2 + Br + C)\underline{e}_z$$

Il y a donc trois constantes à déterminer. On peut tout d'abord exprimer le fait que l'écoulement sera de vitesse maximale au centre de la conduite de telle sorte que :

$$\underline{v} = \underline{e}_z = (Ar^2 + Br + C)\underline{e}_z$$

$$v_z(r=0) = v_{\max} \Rightarrow C = v_{\max}$$

De plus, la condition d'adhérence à la paroi implique que :

$$\underline{v} = (Ar^2 + Br + C)\underline{e}_z$$

$$v_z(r=R) = 0 \Rightarrow AR^2 + BR + v_{\max} = 0$$

En l'état, on ne peut pas déterminer davantage les constantes A et B.

Pour avancer, on peut facilement écrire que si la vitesse est maximale au centre de la conduite et que le profil est parabolique, alors la variation de la vitesse est nulle au centre de telle sorte que :

$$\left. \frac{dv}{dr} \right|_{r=0} = 0$$

$$\underline{v} = (Ar^2 + Br + v_{\max}) \underline{e}_z$$

$$\left. \frac{dv}{dr} \right|_{r=0} = \left. \frac{d(Ar^2 + Br + v_{\max})}{dr} \right|_{r=0} = (2Ar + B) \Big|_{r=0} = 0 \Rightarrow B = 0$$

La condition précédente permet enfin d'arriver au résultat :

$$v_z(r=R) = 0 \Rightarrow AR^2 + \cancel{BR} + v_{\max} = 0 \Rightarrow A = \frac{-v_{\max}}{R^2}$$

$$\underline{v} = \left(\frac{-v_{\max}}{R^2} r^2 + v_{\max} \right) \underline{e}_z = v_{\max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \underline{e}_z$$

Le gradient du champ de vitesses s'exprime à partir du formulaire (attention à ne pas oublier de termes !!) :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{grad \, v}} &= \frac{\partial \cancel{v_r}}{\partial r} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \cancel{v_r}}{\partial \theta} - \cancel{v_\theta} \right) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial \cancel{v_r}}{\partial z} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_z + \\ &\quad \frac{\partial \cancel{v_\theta}}{\partial r} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \cancel{v_\theta}}{\partial \theta} + \cancel{v_r} \right) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial \cancel{v_\theta}}{\partial z} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \\ &\quad \frac{\partial v_z}{\partial r} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \cancel{v_z}}{\partial \theta} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial \cancel{v_z}}{\partial z} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \\ &= \frac{\partial v_z}{\partial r} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_r \\ &= -\frac{2v_{\max} r}{R^2} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_r \end{aligned}$$

$$\text{ou encore sous forme matricielle : } \left[\underline{\underline{grad \, v}} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2v_{\max} r}{R^2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On exprime facilement les parties symétriques et antisymétrique de ce gradient :

$$\begin{aligned}
[\underline{d}] &= [\underline{\underline{grad}} \underline{v}]^{sym} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2v_{\max}r}{R^2} & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{2v_{\max}r}{R^2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{v_{\max}r}{R^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
[\underline{\Omega}] &= [\underline{\underline{grad}} \underline{v}]^{antisym} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2v_{\max}r}{R^2} & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{2v_{\max}r}{R^2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{v_{\max}r}{R^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Le rotationnel du champ de vitesses s'exprime à partir de l'opérateur nabla exprimé en coordonnées cylindriques : $\underline{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r} \underline{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \underline{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \underline{e}_z$

On en déduit naturellement :

$$[\underline{rot} \underline{v}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{pmatrix} = v_{\max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = v_{\max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial r} \\ 0 \end{pmatrix} = v_{\max} \left(\frac{2r}{R^2} \right) \underline{e}_\theta$$

La rotation du fluide sera orientée selon le vecteur $\underline{e}_\theta$.

Il nous reste à calculer le laplacien du champ de vecteurs vitesse, faisant intervenir la divergence en coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{div}} \underline{T} &= \left(\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (T_{rr} - T_{\theta\theta}) + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} \right) \underline{e}_r + \\
&\quad \left(\frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (T_{\theta r} + T_{r\theta}) + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} \right) \underline{e}_\theta + \\
&\quad \left(\frac{\partial T_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} T_{zr} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \right) \underline{e}_z
\end{aligned}$$

Si on l'applique au gradient de vecteurs vitesses précédent, le seul terme non nul est :

$$\underline{\underline{grad}} \underline{v} = -\frac{2v_{\max}r}{R^2} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_r. \quad \text{On écrit donc :}$$

$$\underline{\Delta} \underline{v} = \underline{\underline{div}} (\underline{\underline{grad}} \underline{v}) = \left(\frac{\partial (\underline{\underline{grad}} \underline{v})_{zr}}{\partial r} \right) \underline{e}_z = -\frac{2v_{\max}}{R^2} \underline{e}_z$$

Comme précédemment, on trouve un laplacien uniforme et orienté dans le sens de l'écoulement.