

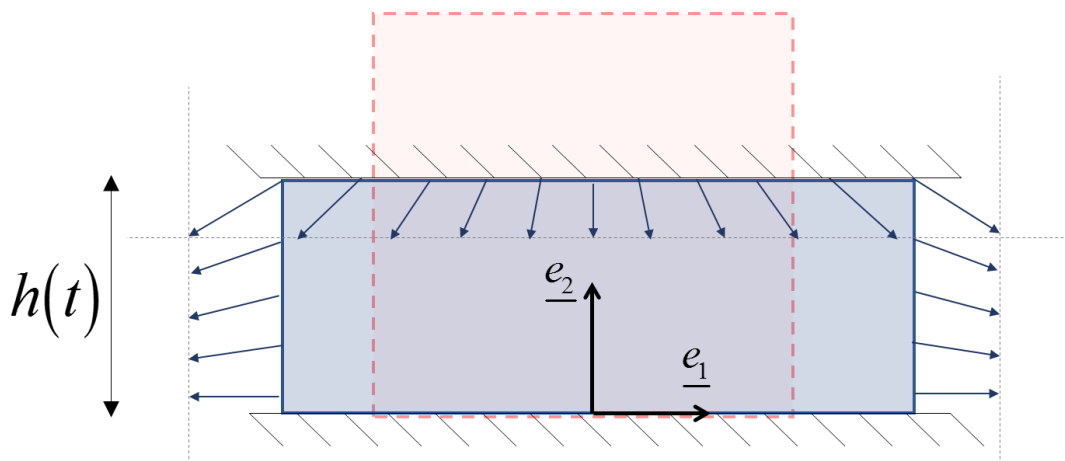
TD3 : corrigé

1) Déterminer le champ de vitesses dans la configuration K_t (en se servant du fait que le caoutchouc est considéré incompressible).

On remarque tout d'abord que, malgré que nous soyons en présence d'un problème de mécanique du solide, on se propose de formuler un champ de vitesses dans la configuration actuelle et donc une description **eulérienne** du mouvement. On obtiendrait évidemment les mêmes résultats en utilisant une description lagrangienne.

Comme la section rectangle va rester rectangle sous les hypothèses formulées (qui sont très fortes !!), on peut facilement faire l'hypothèse que le champ $\underline{v}$ est de la forme :

$$\underline{v}(x_1, x_2) = v_1(x_1)\underline{e}_1 + v_2(x_2)\underline{e}_2$$



La notion de divergence n'a pas encore été abordée dans le cours : on montrera plus tard que dans le cas d'un milieu **incompressible**: $\text{div } \underline{v} = 0$ (ce résultat sera démontré à partir notamment de la conservation de la masse, ou **équation de continuité**).

Dans l'énoncé on donne ici l'indication suivante :

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0$$

Dans le cas du champ de vitesses dont on vient d'avoir l'intuition précédemment, cette indication mène à :

$$\frac{\partial v_1(x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2(x_2)}{\partial x_2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial v_1(x_1)}{\partial x_1} = -\frac{\partial v_2(x_2)}{\partial x_2}$$

On est donc dans le cas où une fonction de x_1 est égale à une fonction de x_2 quelles que soient les valeurs de x_1 et x_2 . La seule solution est évidemment :

$$\frac{\partial v_1(x_1)}{\partial x_1} = -\frac{\partial v_2(x_2)}{\partial x_2} = Cste$$

Ceci constitue donc deux équations différentielles à résoudre :

$$-\frac{\partial v_2(x_2)}{\partial x_2} = Cste \Rightarrow -v_2(x_2) = Ax_2 + B \quad \text{avec } A, B \text{ des constantes.}$$

On peut facilement écrire la composante $v_2(h(t))$ car elle est égale à la vitesse constante imposée V_0 : $v_2(h(t)) = -V_0$.

Comme la jante est considérée fixe et rigide on exprime également : $v_2(0) = 0$

$$\begin{cases} v_2(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \\ v_2(h(t)) = -V_0 \Rightarrow -Ah(t) = -V_0 \Rightarrow A = \frac{V_0}{h} \end{cases}$$

On a donc déterminé complètement $v_2(x_2)$:

$$v_2(x_2) = -\frac{V_0}{h} x_2$$

On en faisant de même avec $v_1(x_1)$ on obtient l'équation à résoudre

$$\frac{\partial v_1(x_1)}{\partial x_1} = -\frac{\partial v_2(x_2)}{\partial x_2} = \frac{V_0}{h} \Rightarrow v_1(x_1) = \frac{V_0}{h} x_1 + C \quad \text{avec } C \text{ une constante.}$$

Si on fait enfin l'hypothèse que la transformation se fera de façon symétrique par rapport à l'axe $(O, \underline{e}_2)$ on écrit :

$$v_1(x_1) = -v_1(-x_1) \Rightarrow \frac{V_0}{h} x_1 + C = \frac{V_0}{h} x_1 - C \Rightarrow C = 0 \quad \text{avec } C \text{ une constante.}$$

On a donc déterminé complètement $v_1(x_1)$:

$$v_1(x_1) = \frac{V_0}{h} x_1$$

On final on a le champ de vitesses :

$$\underline{v}(x_1, x_2) = v_1(x_1)\underline{e}_1 + v_2(x_2)\underline{e}_2 = \frac{V_0}{h}x_1 - \frac{V_0}{h}x_2 = \frac{V_0}{h}(x_1\underline{e}_1 - x_2\underline{e}_2)$$

Enfin, la hauteur $h(t)$ dans la configuration actuelle K_t s'exprime simplement en fonction de la hauteur initiale H : $h(t) = H - V_0t$

$$\underline{v}(x_1, x_2) = \frac{V_0}{H - V_0t}(x_1\underline{e}_1 - x_2\underline{e}_2)$$

2) Donner l'équation des trajectoires d'un point se trouvant initialement en (X_1, X_2)

Les trajectoires sont données en description eulérienne par l'équation :

$$d\underline{x} = \underline{v}(\underline{x}, t)dt \quad \text{avec la condition initiale} \quad \underline{x}(t=0) = \underline{X}$$

On se trouve ainsi avec les deux équations différentielles :

$$\begin{cases} dx_1 = v_1 dt = \frac{V_0}{H - V_0t} x_1 dt \\ dx_2 = v_2 dt = -\frac{V_0}{H - V_0t} x_2 dt \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x_1(t=0) = X_1 \\ x_2(t=0) = X_2 \end{cases}$$

Ces deux équations se résolvent facilement :

$$\begin{aligned} dx_1 &= \frac{V_0}{H - V_0t} x_1 dt \\ \frac{dx_1}{dt} - \frac{V_0}{H - V_0t} x_1 &= 0 \\ x_1 &= C_1 e^{-\int \frac{-V_0}{H - V_0t} dt} = C_1 e^{-\ln(H - V_0t)} = \frac{C_1}{H - V_0t} \end{aligned}$$

La constante C_1 est déterminée grâce à la condition initiale $x_1(t=0) = X_1$:

$$x_1(t=0) = X_1 = \frac{C_1}{\cancel{H - V_0t}} \Rightarrow C_1 = X_1 H$$

La résolution de la deuxième équation est similaire :

$$\begin{aligned} dx_2 &= \frac{-V_0}{H - V_0t} x_2 dt \\ \frac{dx_2}{dt} + \frac{V_0}{H - V_0t} x_2 &= 0 \\ x_2 &= C_2 e^{-\int \frac{V_0}{H - V_0t} dt} = C_2 e^{\ln(H - V_0t)} = C_2 (H - V_0t) \end{aligned}$$

La constante C_2 est déterminée grâce à la condition initiale $x_2(t=0) = X_2$:

$$x_2(t=0) = X_2 = C_2(H - V_0 t) \Rightarrow C_2 = \frac{X_2}{H}$$

On obtient donc l'équation des trajectoires :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{X_1 H}{H - V_0 t} \\ x_2 = \frac{X_2}{H} (H - V_0 t) \end{cases}$$

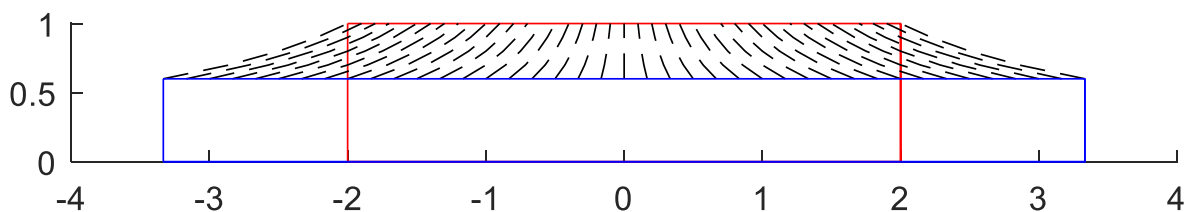
Cette description correspond à la **description lagrangienne** de la même transformation, qui est naturellement totalement équivalente.

On observe notamment que les grandeurs x_1 et x_2 sont liés par la relation :

$$(H - V_0 t) = \frac{x_2 H}{X_2} \Rightarrow x_1 = \frac{X_1 H}{H - V_0 t} = X_1 H \frac{X_2}{x_2 H} = \frac{X_1 X_2}{x_2}$$

Cette dernière équation permet de représenter facilement quelques trajectoires (ici celles de points situées en $X_2 = H$) :

```
close all; figure; hold on;
H=1; L=2; %dimensions initiales
line([-L L; -L L; L L; -L -L], [H H; 0 0; 0 H; 0 H], 'color', 'r'); % section
initiale
x2fin=0.6; %hauteur finale
X2=H; %position initiale des points dont on trace la trajectoire
for X1=[-L:0.1:L]
x2=[x2fin:0.1:H];
x1=X1*X2*(1./x2);
plot(x1,x2,'k--') % tracé des trajectoires
end
line([-L/x2fin L/x2fin; L/x2fin L/x2fin; L/x2fin -L/x2fin; -L/x2fin -
L/x2fin]...,
[x2fin x2fin; x2fin 0; 0 0; 0 x2fin], 'color', 'b'); % section finale
axis equal; xlim([-2*L 2*L]); ylim([0 H])
```



3) Donner l'équation des lignes de courant

La ligne de courant est l'enveloppe des champs des vecteurs vitesses à un instant donné t . Les lignes de courant étant tangentes aux vecteurs vitesses $\underline{v}(\underline{x}, t)$ en tout point, un petit élément $d\underline{x}$ est sur la ligne de courant si $d\underline{x} \wedge \underline{v}(\underline{x}, t) = 0$ ce qui revient à :

$$\frac{dx_1}{v_1(\underline{x}, t)} = \frac{dx_2}{v_2(\underline{x}, t)}$$

Ecrivons cette équation pour la transformation définie ci-dessus :

$$\frac{\frac{dx_1}{V_0}}{\frac{H-V_0 t}{H-V_0 t} x_1} = \frac{\frac{dx_2}{-V_0}}{\frac{H-V_0 t}{H-V_0 t} x_2} \Rightarrow C \frac{dx_1}{x_1} = -C \frac{dx_2}{x_2} \quad \text{avec} \quad C = \frac{H-V_0 t}{V_0}$$

$$\ln x_1 + D_1 = -\ln x_2 + D_2$$

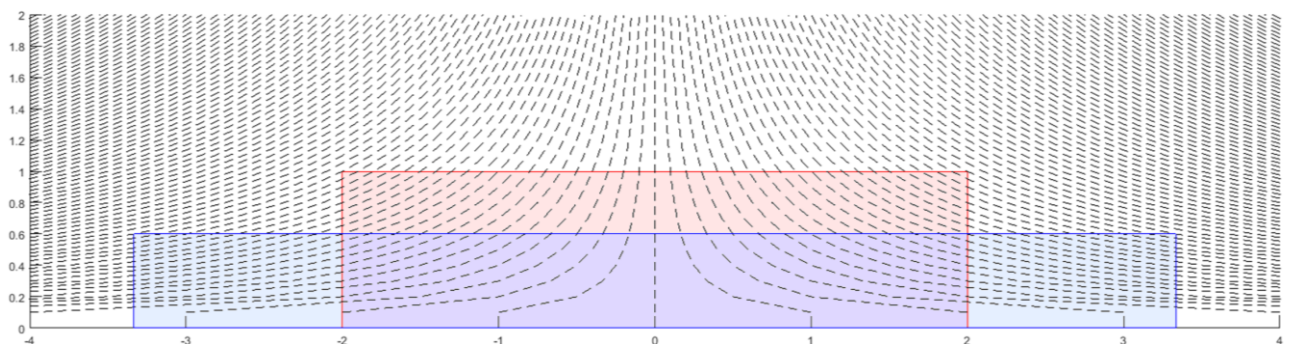
$$\ln x_1 + \ln x_2 = D$$

$$\ln(x_1 x_2) = D$$

$$x_1 x_2 = \text{cste}$$

Suivant les valeurs données à cette dernière constante, on peut tracer l'ensemble des lignes de courants pour la transformation. On constate que les trajectoires précédentes sont les parties avalées de certaines lignes de courant prises pour les points $\underline{x}(t=0) = \underline{X}$.

```
close all; figure; hold on;
H=1; L=2; %dimensions initiales
line([-L L; -L L; L L; -L -L], [H H; 0 0; 0 H; 0 H], 'color', 'r'); % section
initiale
x2=[0:0.1:2*H];
for cste=-100:0.1:100 % valeurs de la constante pour différentes lignes de
courant
    x1=cste./x2;
    plot(x1, x2, 'k--') % tracé des lignes
end
line([-L/x2fin L/x2fin; L/x2fin L/x2fin; L/x2fin -L/x2fin; -L/x2fin -
L/x2fin]...
, [x2fin x2fin; x2fin 0; 0 0; 0 x2fin], 'color', 'b'); % section finale
axis equal; xlim([-2*L 2*L]); ylim([0 2*H])
```



4) Déterminer le champ de déplacements

Le champ de déplacements s'écrit tout simplement :

$$\begin{aligned}\underline{u} &= \underline{x}(\underline{X}, t) - \underline{X} \\ &= (x_1 - X_1)\underline{e}_1 + (x_2 - X_2)\underline{e}_2 \\ &= X_1 \left(\frac{H}{H - V_0 t} - 1 \right) \underline{e}_1 + X_2 \left(\frac{H - V_0 t}{H} - 1 \right) \underline{e}_2\end{aligned}$$

Ceci constitue une écriture *tensorielle* du champ de déplacements. Le même calcul se réalise en utilisant la notation *matricielle*, en représentant les vecteurs sous forme de matrices 2 x 1 pour ce problème plan :

$$[\underline{u}] = [\underline{x}(\underline{X}, t)] - [\underline{X}] = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \left(\frac{H}{H - V_0 t} - 1 \right) \\ X_2 \left(\frac{H - V_0 t}{H} - 1 \right) \end{pmatrix}$$

Enfin, une écriture *indicielle* de ce champ consisterait à écrire :

$$\begin{aligned}u_1 &= X_1 \left(\frac{H}{H - V_0 t} - 1 \right) \\ u_2 &= X_2 \left(\frac{H - V_0 t}{H} - 1 \right)\end{aligned}$$

5) Calculer le tenseur gradient de la transformation. Effectuer ce calcul en utilisant les différentes notations indicielles, matricielles et tensorielles. Vérifier que la transformation s'effectue à volume constant.

Calculons le gradient de ce champ en utilisant les différentes notations :

- notation tensorielle :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{Grad}} \underline{u} &= \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j = \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \cancel{\frac{\partial u_1}{\partial X_2} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2} + \cancel{\frac{\partial u_2}{\partial X_1} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 \\ \underline{\underline{Grad}} \underline{u} &= \left(\frac{H}{H - V_0 t} - 1 \right) \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \left(\frac{H - V_0 t}{H} - 1 \right) \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2\end{aligned}$$

- notation indicielle :

$$(\underline{\underline{Grad}} \underline{u})_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \Rightarrow \begin{cases} (\underline{\underline{Grad}} \underline{u})_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial X_1} = \frac{H}{H - V_0 t} - 1 \\ (\underline{\underline{Grad}} \underline{u})_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial X_2} = \frac{H - V_0 t}{H} - 1 \end{cases}$$

- notation matricielle :

$$[\underline{\underline{Grad}} \underline{u}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{H}{H-V_0 t} - 1 & 0 \\ 0 & \frac{H-V_0 t}{H} - 1 \end{pmatrix}$$

Le tenseur gradient de la transformation s'écrit en notation *tensorielle*:

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{Grad}} \underline{u} + \underline{\underline{I}}$$

$$\underline{\underline{F}} = \left(\frac{H}{H-V_0 t} - 1 \right) \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \left(\frac{H-V_0 t}{H} - 1 \right) \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2$$

$$\underline{\underline{F}} = \frac{H}{H-V_0 t} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \frac{H-V_0 t}{H} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2$$

On peut évidemment effectuer ce calcul en notation matricielle :

$$[\underline{\underline{F}}] = [\underline{\underline{Grad}} \underline{u}] + [\underline{\underline{I}}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \cancel{\frac{\partial u_1}{\partial X_2}} \\ \cancel{\frac{\partial u_2}{\partial X_1}} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{H}{H-V_0 t} & 0 \\ 0 & \frac{H-V_0 t}{H} \end{pmatrix}$$

On constate que ce tenseur est symétrique, même si **ça n'est pas le cas** dans le cas général. On constate également qu'à l'instant initial :

$$t=0 \Rightarrow [\underline{\underline{F}}] = \begin{pmatrix} \frac{H}{\cancel{H-V_0 t}} & 0 \\ 0 & \frac{\cancel{H-V_0 t}}{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lorsqu'il n'y a pas de déformation, ce tenseur est par conséquent égal au tenseur $\underline{\underline{I}}$.

Vérifions enfin que la transformation s'effectue à volume constant : le cours nous dit que la variation de volume est donnée par le *Jacobien* de la transformation, qui est le déterminant du tenseur $\underline{\underline{F}}$:

$$\frac{d\Omega}{d\Omega_0} = J = \det[\underline{\underline{F}}] = \begin{vmatrix} \frac{H}{H-V_0 t} & 0 \\ 0 & \frac{H-V_0 t}{H} \end{vmatrix} = \frac{H}{H-V_0 t} * \frac{H-V_0 t}{H} = 1$$

Le rapport du volume actuel sur le volume initial est égal à 1 : la transformation se fait bien à volume constant puisque le caoutchouc est incompressible !!!

6) Comparer le tenseur des déformations de Green-Lagrange $\underline{\underline{E}}$ au tenseur des déformations linéarisé $\underline{\underline{\varepsilon}}$. A quelle condition sont-ils équivalents ?

On va appeler α la quantité $\frac{H}{H - V_0 t}$.

Le tenseur des déformations de Green-Lagrange s'écrit :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{E}} &= \frac{1}{2}(\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}}) \\ \underline{\underline{F}} &= \alpha \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \frac{1}{\alpha} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 \\ \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} &= \alpha^2 \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \frac{1}{\alpha^2} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 \\ \underline{\underline{E}} &= \frac{1}{2}(\alpha^2 - 1) \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha^2} - 1\right) \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2\end{aligned}$$

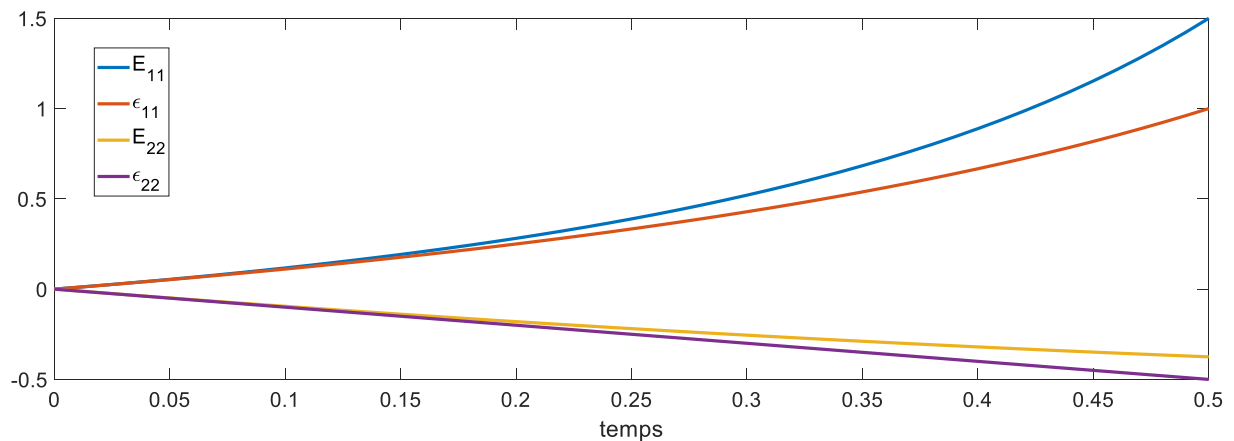
On observe que ce tenseur possède deux composantes non-nulles : la composante $E_{11} > 0$ car $\alpha > 1$, et la composante $E_{22} < 0$. Ces déformations correspondent respectivement à un allongement selon $\underline{e}_1$ et à un rétrécissement selon $\underline{e}_2$.

Le tenseur des déformations linéarisé s'écrit :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\varepsilon}} &= \frac{1}{2}(\underline{\underline{Grad}} \underline{u} + (\underline{\underline{Grad}} \underline{u})^T) = \underline{\underline{Grad}} \underline{u} \\ \underline{\underline{\varepsilon}} &= (\alpha - 1) \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2\end{aligned}$$

On observe que ces deux tenseurs sont donc différents. On peut en revanche avoir la même discussion que précédemment sur ses composantes : $\varepsilon_{11} > 0$ et $\varepsilon_{22} < 0$.

Pour les comparer on peut tenter de tracer leurs évolutions en cours de transformation (application numérique : $V = 1 \text{ m.s}^{-1}$ $0 < t < 0.5$ $H = 1$ $L = 2$)



On constate alors que $\epsilon_{11} \approx E_{11}$ et $\epsilon_{22} \approx E_{22}$, ce qui revient à dire que ces deux tenseurs sont équivalents sous l'hypothèse des petites perturbations.

7) Avant rupture, on fait l'hypothèse que le caoutchouc qui constitue le pneu peut être « étiré » de 20% ou « comprimé » de 40%. D'écrire la condition de rupture associée.

Les déformations qui sont en jeu (20% et 40%, soit 0.2 et 0.4) sont bien trop grandes pour que l'HPP soit respectée. On considère donc ici la définition de la déformation donnée par le tenseur des déformations de Green-Lagrange :

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}(\alpha^2 - 1)\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha^2} - 1\right)\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{H}{H - V_0 t}.$$

On a vu précédemment que $E_{11} > 0$ (« allongement ») car $\alpha > 1$, et que $E_{22} < 0$ (« rétrécissement »). On a donc deux conditions à respecter pour que le pneu n'atteigne pas sa condition de rupture :

$$E_{11} = \frac{1}{2}(\alpha^2 - 1) < 0.2 \Rightarrow \alpha < \sqrt{1.4} \approx 1.18$$

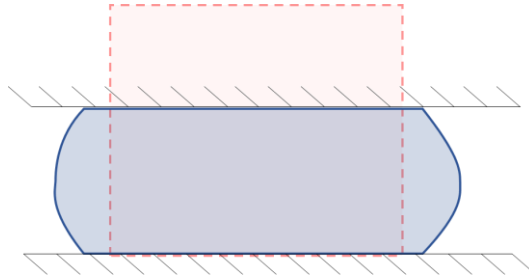
$$E_{22} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha^2} - 1\right) > -0.4 \Rightarrow \alpha < \sqrt{\frac{1}{0.2}} \approx 2.23$$

On remarque donc que c'est la première condition qui sera atteinte la première : dans ce cas le pneu va rompre à cause d'un étirement trop important, pour la valeur :

$$\alpha = \sqrt{1.4} \approx 1.18$$

En commentaire final, on précisera néanmoins que cette approche est assez loin de la réalité pour les raisons principales suivantes :

- la condition de glissement du pneu contre la route et contre la jante est loin de la vérité : on pourra s'attendre en réalité à une déformation de ce type plus difficile à modéliser :



- lors de l'écrasement du pneu, l'énergie est amortie de telle sorte que la vitesse d'écrasement ne peut être maintenue constante.