

TD4 : corrigé

1) Ecrire les conditions aux limites concernant l'application de la pression à l'intérieur du réservoir.

Le réservoir possède en tout 6 surfaces (3 internes, 3 externes).

On exprime les conditions de pression sur les surfaces internes notées :

$$\begin{aligned} S_{\text{lat}}^{\text{int}} &\Rightarrow r = R - e & , \quad \underline{n} = -\underline{e}_r \\ S_{\text{sup}}^{\text{int}} &\Rightarrow z = L / 2 - e & , \quad \underline{n} = -\underline{e}_z \\ S_{\text{inf}}^{\text{int}} &\Rightarrow z = -(L / 2 - e) & , \quad \underline{n} = +\underline{e}_z \end{aligned}$$

Pour chacune de ces surfaces, la pression s'exerce selon la normale *entrante* qui est par conséquent opposée à la normale $\underline{n}$ prise par convention *sortante*.

La pression est une *densité surfacique d'efforts* qui concernent donc le vecteur-contrainte $\underline{t}$ qui dépend du point d'application et de la normale à la facette considérée.

On a donc les trois conditions :

$$\begin{aligned} (1) \quad \underline{t}(\underline{x} \in S_{\text{lat}}^{\text{int}}, \underline{n} = -\underline{e}_r) &= p \underline{e}_r \\ (2) \quad \underline{t}(\underline{x} \in S_{\text{sup}}^{\text{int}}, \underline{n} = -\underline{e}_z) &= p \underline{e}_z \\ (3) \quad \underline{t}(\underline{x} \in S_{\text{inf}}^{\text{int}}, \underline{n} = \underline{e}_z) &= -p \underline{e}_z \end{aligned}$$

Le tenseur des contraintes est l'application linéaire qui transforme la normale $\underline{n}$ en vecteur-contrainte $\underline{t}$, selon la relation $\underline{t}(\underline{x}, \underline{n}) = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}$. Le tenseur des contraintes contient donc tous les vecteurs-contrainte $\underline{t}$ correspondant à chacune des facettes $\underline{n}$.

On déduit des conditions précédentes :

$$\begin{aligned} (1) \quad \underline{t}(\underline{x} \in S_{\text{lat}}^{\text{int}}, \underline{n} = -\underline{e}_r) &= p \underline{e}_r \Rightarrow \underline{\underline{\sigma}}(r = R - e) \cdot (-\underline{e}_r) = p \underline{e}_r \\ (2) \quad \underline{t}(\underline{x} \in S_{\text{sup}}^{\text{int}}, \underline{n} = -\underline{e}_z) &= p \underline{e}_z \Rightarrow \underline{\underline{\sigma}}(z = L / 2 - e) \cdot (-\underline{e}_z) = p \underline{e}_z \\ (3) \quad \underline{t}(\underline{x} \in S_{\text{inf}}^{\text{int}}, \underline{n} = \underline{e}_z) &= -p \underline{e}_z \Rightarrow \underline{\underline{\sigma}}(z = -L / 2 + e) \cdot (\underline{e}_z) = -p \underline{e}_z \end{aligned}$$

Il s'agit ensuite de développer les calculs des produits scalaires, ce qui peut par exemple être fait sous forme matricielle pour la première condition:

$$\begin{aligned}
(1) \quad & \underline{\underline{\sigma}}(r=R-e) \cdot (-\underline{e}_r) = p \underline{e}_r \\
\Rightarrow & \begin{pmatrix} \sigma_{rr}(r=R-e) & \sigma_{r\theta}(r=R-e) & \sigma_{rz}(r=R-e) \\ \sigma_{\theta r}(r=R-e) & \sigma_{\theta\theta}(r=R-e) & \sigma_{\theta z}(r=R-e) \\ \sigma_{zr}(r=R-e) & \sigma_{z\theta}(r=R-e) & \sigma_{zz}(r=R-e) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow & \begin{cases} \sigma_{rr}(r=R-e) = -p \\ \sigma_{\theta r}(r=R-e) = 0 \\ \sigma_{zr}(r=R-e) = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Etant donné que le tenseur des contraintes est toujours symétrique, on a également les conditions :

$$\begin{cases} \sigma_{r\theta}(r=R-e) = \sigma_{\theta r}(r=R-e) = 0 \\ \sigma_{rz}(r=R-e) = \sigma_{zr}(r=R-e) = 0 \end{cases}$$

On en déduit la forme suivante concernant le tenseur des contraintes au niveau de la paroi latérale interne :

$$[\underline{\underline{\sigma}}(r=R-e)] = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta}(r=R-e) & \sigma_{\theta z}(r=R-e) \\ 0 & \sigma_{z\theta}(r=R-e) & \sigma_{zz}(r=R-e) \end{pmatrix}$$

La pression étant nécessairement négative, on constate que l'état de contraintes correspond à de la *compression* la composante σ_{rr} .

Pour la seconde condition on effectue la même démarche :

$$\begin{aligned}
(2) \quad & \underline{\underline{\sigma}}(z=L/2-e) \cdot (-\underline{e}_z) = p \underline{e}_z \\
\Rightarrow & \begin{pmatrix} \sigma_{rr}(z=L/2-e) & \sigma_{r\theta}(z=L/2-e) & \sigma_{rz}(z=L/2-e) \\ \sigma_{\theta r}(z=L/2-e) & \sigma_{\theta\theta}(z=L/2-e) & \sigma_{\theta z}(z=L/2-e) \\ \sigma_{zr}(z=L/2-e) & \sigma_{z\theta}(z=L/2-e) & \sigma_{zz}(z=L/2-e) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \end{pmatrix} \\
\Rightarrow & \begin{cases} \sigma_{rz}(z=L/2-e) = 0 \\ \sigma_{\theta z}(z=L/2-e) = 0 \\ \sigma_{zz}(z=L/2-e) = -p \end{cases}
\end{aligned}$$

En raison de la symétrie du tenseur des contraintes :

$$\begin{cases} \sigma_{zr}(z=L/2-e) = \sigma_{rz}(z=L/2-e) = 0 \\ \sigma_{z\theta}(z=L/2-e) = \sigma_{\theta z}(z=L/2-e) = 0 \end{cases}$$

Et donc au niveau de la paroi supérieure interne :

$$\left[\underline{\underline{\sigma}}(z = L/2 - e) \right] = \begin{pmatrix} \sigma_{rr}(z = L/2 - e) & \sigma_{r\theta}(z = L/2 - e) & 0 \\ \sigma_{\theta r}(z = L/2 - e) & \sigma_{\theta\theta}(z = L/2 - e) & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$$

Pour la troisième condition, la démarche est la même aux signes près, en on arrive de façon triviale au même résultat:

$$\left[\underline{\underline{\sigma}}(z = -L/2 + e) \right] = \begin{pmatrix} \sigma_{rr}(z = -L/2 + e) & \sigma_{r\theta}(z = -L/2 + e) & 0 \\ \sigma_{\theta r}(z = -L/2 + e) & \sigma_{\theta\theta}(z = -L/2 + e) & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$$

L'état de contraintes correspond à de la *compression* la composante σ_{zz} .

2) Ecrire les conditions aux limites concernant l'extérieur du réservoir.

On exprime les conditions sur les surfaces externes notées :

$$\begin{aligned} S_{\text{lat}}^{\text{ext}} &\Rightarrow r = R, & \underline{n} = +\underline{e}_r \\ S_{\text{sup}}^{\text{ext}} &\Rightarrow z = L/2, & \underline{n} = +\underline{e}_z \\ S_{\text{inf}}^{\text{ext}} &\Rightarrow z = -L/2, & \underline{n} = -\underline{e}_z \end{aligned}$$

Les surfaces externes sont à « l'air libre », et on n'y exerce que la pression atmosphérique. On dit que c'est une *condition de surface libre*. On peut facilement admettre que la pression atmosphérique est négligeable en comparaison à la pression interne. En reprenant la même démarche que précédemment, on arrive donc aux différentes conditions suivantes :

$$\begin{aligned} (1) \quad & \underline{t}(\underline{x} \in S_{\text{lat}}^{\text{ext}}, \underline{n} = \underline{e}_r) = \underline{0} \\ (2) \quad & \underline{t}(\underline{x} \in S_{\text{sup}}^{\text{ext}}, \underline{n} = \underline{e}_z) = \underline{0} \\ (3) \quad & \underline{t}(\underline{x} \in S_{\text{inf}}^{\text{ext}}, \underline{n} = -\underline{e}_z) = \underline{0} \end{aligned}$$

A partir de la définition du vecteur-contrainte on retrouve facilement les conditions suivantes :

$$\left[\underline{\underline{\sigma}}(z = \pm L/2) \right] = \begin{pmatrix} \sigma_{rr}(z = \pm L/2) & \sigma_{r\theta}(z = \pm L/2) & 0 \\ \sigma_{\theta r}(z = \pm L/2) & \sigma_{\theta\theta}(z = \pm L/2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[\underline{\underline{\sigma}}(r = R) \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta}(r = R) & \sigma_{\theta z}(r = R) \\ 0 & \sigma_{z\theta}(r = R) & \sigma_{zz}(r = R) \end{pmatrix}$$

3) On considère que le tenseur des contraintes dans la paroi latérale est sous la forme $\underline{\underline{\sigma}}(x) = \underline{\underline{\sigma}}(r)$, et que la composante $\sigma_{rr}(r)$ y évolue linéairement. Déterminer son expression.

D'après les questions précédentes, on a vu que :

$$\begin{cases} \sigma_{rr}(r=R) = 0 \\ \sigma_{rr}(r=R-e) = -p \end{cases}$$

On a donc deux points pour constituer la droite $\sigma_{rr}(r) = Ar + B$:

Son coefficient directeur vaut évidemment : $A = \frac{\cancel{\sigma_{rr}(R)} - \sigma_{rr}(R-e)}{R - (R-e)} = \frac{p}{e}$

On calcule simplement l'ordonnée à l'origine à partir de :

$$\sigma_{rr}(r=R) = 0 = AR + B \Rightarrow B = -AR = -\frac{pR}{e}$$

En conclusion, la composante $\sigma_{rr}(r)$ dans la paroi latérale est :

$$\sigma_{rr}(r) = \frac{pr}{e} - \frac{pR}{e} = \frac{p}{e}(r - R)$$

4) A partir des conditions aux limites précédentes et de l'équation d'équilibre, déterminer la composante $\sigma_{\theta\theta}(r)$ en considérant qu'au sein de la paroi $r \approx R$.

A partir des conditions écrites précédemment à l'intérieur et à l'extérieur de cette surface et des hypothèses formulées, on en déduit la forme du tenseur des contraintes :

$$[\underline{\underline{\sigma}}] = \begin{pmatrix} -p \leq \sigma_{rr}(r) \leq 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta}(r) & \sigma_{\theta z}(r) \\ 0 & \sigma_{z\theta}(r) & \sigma_{zz}(r) \end{pmatrix}$$

Il reste encore plusieurs composantes à déterminer.

On peut alors tenter d'écrire l'équation d'équilibre en coordonnées cylindriques, en considérant que le problème est statique ($\underline{a} = \underline{0}$) et que les efforts de volume sont négligés ($\underline{f}^m = \underline{0}$).

$$\text{div } \underline{\underline{\sigma}} + \rho \left(\cancel{\underline{f}^m} - \underline{a} \right) = \underline{0}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{rr}(r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}(r)}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}(r)}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr}(r) - \sigma_{\theta\theta}(r)}{r} &= 0 \\
\frac{\partial \sigma_{\theta r}(r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}(r)}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}(r)}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}(r)}{r} &= 0 \\
\frac{\partial \sigma_{zr}(r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}(r)}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}(r)}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}(r)}{r} &= 0
\end{aligned}$$

La première de ces trois équations permet d'écrire :

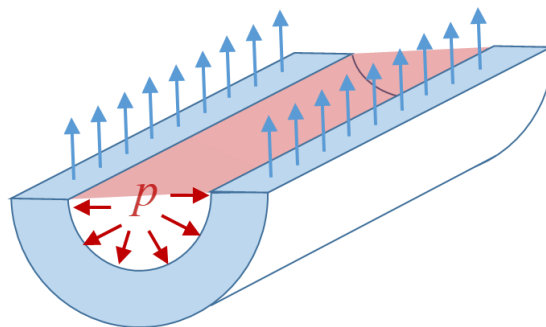
$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{rr}(r)}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr}(r) - \sigma_{\theta\theta}(r)}{r} &= 0 \\
\Rightarrow \sigma_{\theta\theta}(r) &= r \frac{\partial \sigma_{rr}(r)}{\partial r} + \sigma_{rr}(r) \\
\Rightarrow \sigma_{\theta\theta}(r) &= r \frac{p}{e} + \frac{p}{e} (r - R) = \frac{p}{e} (2r - R)
\end{aligned}$$

Si on fait l'approximation $r \approx R$ au sein de la paroi, cette expression devient :

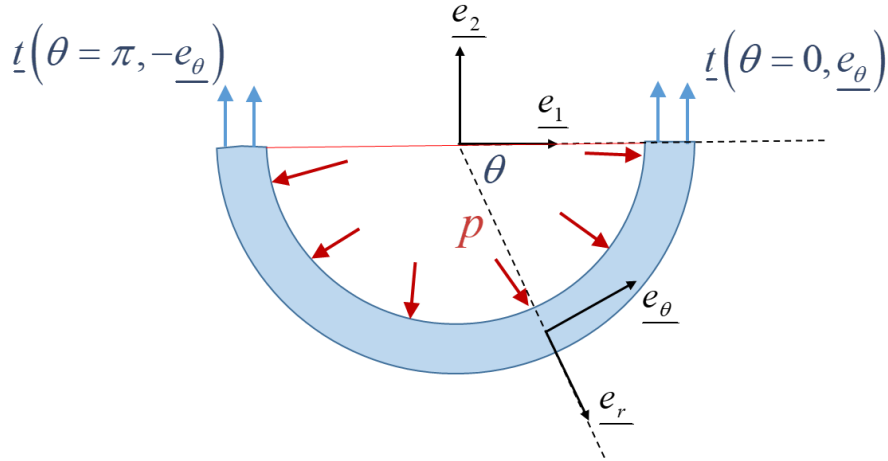
$$\sigma_{\theta\theta}(r) \approx \frac{pR}{e}$$

5) Retrouver le même résultat en considérant l'équilibre d'un demi-cylindre sous pression coupé par une facette de normale $\underline{e}_\theta$, en considérant que le vecteur-contrainte est uniformément réparti dans la paroi.

En coupant un demi-cylindre sous pression selon sa longueur, les efforts intérieurs exercés par la seconde moitié du cylindre sont à l'équilibre avec les efforts extérieurs correspondant à la résultante des efforts de pression .



Il s'agit maintenant d'écrire d'une part la résultante des efforts intérieurs, et de l'autre la résultante des efforts extérieurs (dus à la pression). On introduit pour cela un second repère, cartésien, de telle sorte qu'il y ai un angle θ entre $\underline{e}_r$ et $\underline{e}_\theta$ et que le demi cylindre soit défini par $\theta \in \{0, \pi\}$ comme sur la figure ci-dessous :



Commençons par écrire la résultante des efforts extérieurs :

$$\underline{f}_e = \int_0^\pi \int_0^L p \underline{e}_r R d\theta dz = \int_0^\pi \int_0^L p (\cos \theta \underline{e}_1 - \sin \theta \underline{e}_2) R d\theta dz$$

$$\underline{f}_e = pRL \int_0^\pi (\cos \theta \underline{e}_1 - \sin \theta \underline{e}_2) d\theta = pRL \left(\left[\sin \theta \right]_0^\pi \underline{e}_1 + \left[\cos \theta \right]_0^\pi \underline{e}_2 \right) = -2pRL \underline{e}_2$$

Remarque : cette expression pouvait s'obtenir plus facilement en multipliant la pression pour la « surface effective » (en rouge sur les deux schémas ci-dessus).

Cet effort est en équilibre avec les efforts intérieurs exercés par l'autre moitié du cylindre.

$$\underline{f}_i = \int_{R-e}^R \int_0^L \underline{t}(\theta=0, \underline{e}_\theta) dr dz + \int_{R-e}^R \int_0^L \underline{t}(\theta=\pi, -\underline{e}_\theta) dr dz$$

Comme précédemment on peut développer cette expression à partir de la définition du vecteur-contrainte :

$$\underline{t}(\theta=0, \underline{e}_\theta) = \underline{\underline{\sigma}}(\theta=0) \cdot \underline{e}_\theta = \sigma_{r\theta}(\theta=0) \underline{e}_r + \sigma_{\theta\theta}(\theta=0) \underline{e}_\theta + \sigma_{z\theta}(\theta=0) \underline{e}_z$$

$$\underline{t}(\theta=\pi, -\underline{e}_\theta) = \underline{\underline{\sigma}}(\theta=\pi) \cdot -\underline{e}_\theta = -\sigma_{r\theta}(\theta=\pi) \underline{e}_r - \sigma_{\theta\theta}(\theta=\pi) \underline{e}_\theta - \sigma_{z\theta}(\theta=\pi) \underline{e}_z$$

De plus, on a vu précédemment que la contrainte (et donc le vecteur-contrainte) était indépendant de θ en raison de l'axisymétrie du problème, ce qui conduit à :

$$\underline{t}(\theta=0, \underline{e}_\theta) = \sigma_{r\theta} \underline{e}_r + \sigma_{\theta\theta} \underline{e}_\theta + \sigma_{z\theta} \underline{e}_z$$

$$\underline{t}(\theta=\pi, -\underline{e}_\theta) = -\sigma_{r\theta} \underline{e}_r - \sigma_{\theta\theta} \underline{e}_\theta - \sigma_{z\theta} \underline{e}_z$$

Enfin, pour pouvoir comparer ces efforts intérieurs avec les efforts extérieurs écrits dans la base cartésienne, on peut projeter les vecteurs $\underline{e}_r$ et $\underline{e}_\theta$ pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi$:

$$\begin{aligned}\theta = 0 &\Rightarrow \begin{cases} \underline{e}_r = \underline{e}_1 \\ \underline{e}_\theta = \underline{e}_2 \\ \underline{e}_z = \underline{e}_3 \end{cases} \Rightarrow \underline{t}(\theta = 0, \underline{e}_\theta) = \sigma_{r\theta} \underline{e}_1 + \sigma_{\theta\theta} \underline{e}_2 + \sigma_{z\theta} \underline{e}_3 \\ \theta = \pi &\Rightarrow \begin{cases} \underline{e}_r = -\underline{e}_1 \\ \underline{e}_\theta = -\underline{e}_2 \\ \underline{e}_z = \underline{e}_3 \end{cases} \Rightarrow \underline{t}(\theta = \pi, -\underline{e}_\theta) = \sigma_{r\theta} \underline{e}_1 + \sigma_{\theta\theta} \underline{e}_2 - \sigma_{z\theta} \underline{e}_3\end{aligned}$$

Pour développer davantage le calcul, et en raison de l'hypothèse de paroi mince, on peut admettre que les contraintes sont uniformément réparties dans la section et les sortir de l'intégrale :

$$\begin{aligned}\underline{f}_i &= \int_{R-e}^R \int_0^L (\sigma_{r\theta} \underline{e}_1 + \sigma_{\theta\theta} \underline{e}_2 + \sigma_{z\theta} \underline{e}_3) dr dz + \int_{R-e}^R \int_0^L (\sigma_{r\theta} \underline{e}_1 + \sigma_{\theta\theta} \underline{e}_2 - \sigma_{z\theta} \underline{e}_3) dr dz \\ \underline{f}_i &= 2Le (\sigma_{r\theta} \underline{e}_1 + \sigma_{\theta\theta} \underline{e}_2)\end{aligned}$$

On peut donc écrire désormais l'équilibre des efforts intérieurs et extérieurs :

$$\begin{cases} \underline{f}_e = -2pRL\underline{e}_2 \\ \underline{f}_i = 2Le(\sigma_{r\theta} \underline{e}_1 + \sigma_{\theta\theta} \underline{e}_2) \\ \underline{f}_e + \underline{f}_i = \underline{0} \end{cases} \Rightarrow 2pRL\underline{e}_2 = 2Le(\sigma_{r\theta} \underline{e}_1 + \sigma_{\theta\theta} \underline{e}_2) \Rightarrow \begin{cases} 2pRL = 2Le\sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{r\theta} = 0 \end{cases}$$

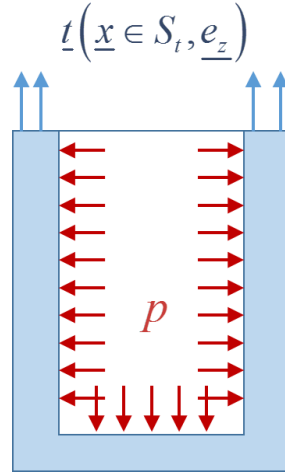
On en déduit donc : $\begin{cases} \sigma_{\theta\theta} = \frac{pr}{e} \\ \sigma_{r\theta} = 0 \end{cases}$ et on retrouve le résultat précédent.

6) En effectuant une démarche similaire pour une autre facette, déterminer complètement le tenseur des contraintes dans la paroi latérale. Discuter des différentes composantes.

Il nous reste à déterminer les composantes $\sigma_{zz}(r)$ et $\sigma_{z\theta}(r)$.

De la même façon que précédemment, on peut couper de façon fictive le réservoir par une facette de normale $\underline{e}_z$ et effectuer le bilan des efforts intérieurs et extérieurs pour le demi-réservoir restant.

On appelle S_i la section transverse du réservoir, de normale $\underline{e}_z$.



Cette fois-ci l'introduction d'un repère cartésien est inutile, car on comprend immédiatement que les composantes radiales de la pression s'annulent deux à deux. Les efforts extérieurs sont dus à l'application de la pression à la surface inférieure du réservoir (on fait à nouveau l'hypothèse $e \ll R$) :

$$\underline{f}_e = \int_0^{2\pi} \int_0^{R-e} -p \underline{e}_z r d\theta dr = -2\pi p \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{R-e} \approx -\pi p R^2 \underline{e}_z$$

Si on écrit la section transverse S_t , comme précédemment, cet effort est en équilibre avec les efforts intérieurs exercés par l'autre moitié du cylindre :

$$\underline{f}_i = \int_{R-e}^R \int_0^{2\pi} \underline{t}(\underline{x} \in S_t, \underline{e}_z) r d\theta dr$$

Pour développer davantage le calcul, on admet à nouveau que le vecteur-contrainte est uniformément réparti, ce qui conduit à :

$$\underline{f}_i = \underline{t}(\underline{x} \in S_t, \underline{e}_z) \int_{R-e}^R \int_0^{2\pi} r d\theta dr = \underline{t}(\underline{x} \in S_t, \underline{e}_z) \pi (R^2 - (R-e)^2) \approx \underline{t}(\underline{x} \in S_t, \underline{e}_z) 2\pi e R$$

Comme précédemment on développe à partir de la définition du vecteur-contrainte :

$$\underline{t}(\underline{x} \in S_t, \underline{e}_z) = \underline{\sigma}(\underline{x} \in S_t) \cdot \underline{e}_z = \sigma_{rz}(\underline{x} \in S_t) \underline{e}_r + \sigma_{\theta z}(\underline{x} \in S_t) \underline{e}_\theta + \sigma_{zz}(\underline{x} \in S_t) \underline{e}_z$$

On a vu précédemment que $\sigma_{rz}(r) = 0$ et on en déduit donc :

$$\underline{f}_i \approx 2\pi e R (\sigma_{\theta z}(\underline{x} \in S_t) \underline{e}_\theta + \sigma_{zz}(\underline{x} \in S_t) \underline{e}_z)$$

L'équilibre des efforts intérieurs et extérieurs s'écrit donc :

$$\underline{f}_e + \underline{f}_i = \underline{0} \Rightarrow \pi p R^2 \underline{e}_z = 2\pi e R (\sigma_{\theta z}(\underline{x} \in S_t) \underline{e}_\theta + \sigma_{zz}(\underline{x} \in S_t) \underline{e}_z)$$

On en déduit donc :

$$\begin{cases} \pi p R^2 = 2\pi e R \sigma_{zz} (\underline{x} \in S_t) \\ 0 = \sigma_{\theta z} (\underline{x} \in S_t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{pR}{2e} = \sigma_{zz} (\underline{x} \in S_t) \\ 0 = \sigma_{\theta z} (\underline{x} \in S_t) \end{cases}$$

On vient donc de trouver $\sigma_{\theta z} (\underline{x} \in S_t) = 0$. Comme la section est quelconque, on en déduit donc qu'on a dans tout le cylindre $\sigma_{\theta z} = 0$.

Au final, on vient de déterminer (avec quelques hypothèses néanmoins) l'état de contraintes au sein de tout le réservoir :

$$[\underline{\underline{\sigma}}] = \begin{pmatrix} -p \leq \sigma_{rr}(r) \leq 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{pR}{e} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{pR}{2e} \end{pmatrix}$$

On peut faire les remarques suivantes :

- le tenseur des contraintes est déjà exprimé dans sa base principale, car la matrice $[\underline{\underline{\sigma}}]$ est diagonale. On en déduit que cet état de chargement n'induit aucune contrainte de cisaillement.
- On observe que, même si la pression est appliquée dans la direction de la composante σ_{rr} , cette composante est négligeable devant $\sigma_{\theta\theta}$ et σ_{zz} car $R/e \gg 1$.
- La contrainte la plus élevée est $\sigma_{\theta\theta}$: elle s'interprète comme la « résistance » du réservoir à un changement de diamètre lors de la mise sous pression. C'est d'ailleurs généralement dans la direction de qu'on observe la rupture des réservoirs sous pression :



- On observe que si l'on veut doubler le rayon du réservoir, il faut également doubler son épaisseur (ce qui a un gros impact sur le volume de métal utilisé). Ainsi, pour augmenter la capacité du réservoir il vaut mieux augmenter sa longueur, ce qui n'influence pas la contrainte au sein du matériau...