

## TD5 : corrigé

### Première partie : cas 1D

Dans un premier temps on ne s'intéresse qu'à la direction de l'essai de traction uniaxiale (problème 1D), sans se soucier de l'état de déformations ou de contraintes dans les directions transverses.

#### 1) Ecrire le champ de déplacement au sein de la partie utile de l'éprouvette, en considérant qu'il évolue linéairement le long de l'éprouvette.

Comme on ne s'intéresse qu'à la direction de l'essai, l'éprouvette peut donc être plate ou cylindrique et la seule grandeur qui nous importe est la composante  $u_1$  du champ de déplacements. Le vecteur déplacement  $\underline{u}$  se réduit donc à une seule composante  $u_1$  qui ne dépend que de la direction  $x_1$ . On pourra noter  $\underline{u}(\underline{X}) = u_1(X_1)\underline{e}_1$  ou même  $\underline{u}(\underline{X}) = u(X)\underline{e}_1$  pour alléger les notations.

Le vecteur-colonne  $\begin{bmatrix} \underline{u}(X) \end{bmatrix}$  ne contient qu'une seule ligne.

On considère que l'évolution du déplacement est linéaire le long de l'éprouvette (on sait qu'elle n'est pas constante, car le déplacement est nul d'un côté de l'éprouvette et non-nul de l'autre côté).

On prend donc une forme générique :  $u(X) = AX + B$  avec deux constantes à déterminer à partir des conditions aux limites.

Le déplacement d'un côté de l'éprouvette est nul : si l'on place le repère de façon pertinente on a donc naturellement :  $u(X=0)=0 \Rightarrow A \times 0 + B = 0 \Rightarrow B = 0$

A l'autre extrémité de l'éprouvette, le déplacement est connu :

$$u(X=L_0) = \Delta L \Rightarrow A \times L_0 = \Delta L \Rightarrow A = \frac{\Delta L}{L_0}$$

On obtient la forme bien connue :  $u(X) = \Delta L \left( \frac{X}{L_0} \right)$

#### 2) Comparer alors le champ de déformations de Green-Lagrange, et sa version linéarisée en HPP.

On peut aisément calculer la déformation de Green-Lagrange selon sa définition en fonction du champ de déplacement :

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} \left( \underline{\underline{Grad}} \underline{u} + (\underline{\underline{Grad}} \underline{u})^T + (\underline{\underline{Grad}} \underline{u})^T \cdot \underline{\underline{Grad}} \underline{u} \right)$$

Ici, pour un problème en 1D, seule une dimension existe. Les composantes des tenseurs  $\underline{\underline{E}}$  et  $\underline{\underline{Grad}} \underline{u}$  pourront donc être placées dans des « matrices 1x1 », contrairement aux matrices 3x3 habituelles... on pourra se contenter d'écrire :

$$E = \frac{1}{2} \left( Grad u + (Grad u)^T + (Grad u)^T \cdot Grad u \right)$$

Le gradient du déplacement ne contient qu'une seule composante :

$$Grad u = \frac{\partial u}{\partial X} = \frac{du}{dX} = \frac{\Delta L}{L_0}$$

On en déduira facilement la déformation de Green-Lagrange, qui comporte un terme non-linéaire en fonction du déplacement imposé  $\Delta L$  :

$$E = \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta L}{L_0} + \frac{\Delta L}{L_0} + \left( \frac{\Delta L}{L_0} \right)^2 \right) = \frac{\Delta L}{L_0} + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta L}{L_0} \right)^2$$

Si l'on se place en HPP, on considère alors que le déplacement imposé  $\Delta L$  est petit, de telle sorte que  $\left( \frac{\Delta L}{L_0} \right)^2 \ll \frac{\Delta L}{L_0}$  et on a alors directement :

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0} + \cancel{\frac{1}{2} \left( \frac{\Delta L}{L_0} \right)^2} = \frac{\Delta L}{L_0} \text{ que l'on obtient aussi à partir de } \varepsilon = \frac{1}{2} \left( Grad u + (Grad u)^T \right)$$

On remarque évidemment que la déformation est sans unité, et positive si  $\Delta L > 0$  dans le cas de l'essai de traction. La déformation revient simplement à une variation **relative** de longueur.

### 3) Comparer la déformation en HPP avec la dilatation dans la direction de l'éprouvette.

Dans le cours, on a appelé *dilatation* le rapport des normes d'un vecteur avant et après déformation. Elle peut se calculer à partir du tenseur gradient de la transformation :

$$\lambda = |\underline{a}| / |\underline{A}| = |\underline{F}(\underline{X}, t) \cdot \underline{A}| / |\underline{A}|$$

$$\text{Ici le tenseur } \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{Grad}} \underline{u} \text{ se réduit à } F = 1 + \frac{\Delta L}{L_0}$$

Si on choisit un vecteur quelconque le long de la direction de traction  $\underline{A} = A \underline{e}_1$  (la seule direction qui existe en 1D !), on a alors le nouveau vecteur :

$$\underline{a} = \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) \cdot \underline{A} = \left(1 + \frac{\Delta L}{L_0}\right) \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 \cdot A \underline{e}_1 = \left(1 + \frac{\Delta L}{L_0}\right) A \underline{e}_1 \text{ après déformation.}$$

$$\text{On observe donc au final : } \lambda = |\underline{a}| / |\underline{A}| = 1 + \frac{\Delta L}{L_0} = 1 + \varepsilon$$

Cette dernière définition permet de passer très facilement de la notion de dilatation à celle de déformation, mais sans se tromper sur l'écriture néanmoins !

**4) Calculer la contrainte dans l'éprouvette, si l'on considère qu'elle est constituée d'un matériau linéaire élastique isotrope. En déduire une relation entre le module d'Young et les coefficients de Lamé.**

Dans le cas général, en 3D, la loi de comportement élastique linéaire isotrope (ou loi de Hooke) s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}$$

Cette équation contient **deux paramètres** du matériau  $(\lambda, \mu)$  qui régissent le comportement élastique linéaire. Ils sont appelés **coefficients d'élasticité de Lamé**.

Dans le cas très élémentaire de l'essai de traction uniaxiale en 1D, cette relation se réduit à une seule composante :

$$\sigma = \lambda \varepsilon + 2\mu \varepsilon = \varepsilon (\lambda + 2\mu)$$

Dans cette direction (et uniquement dans cette direction !) on observe qu'il y a une proportionnalité directe entre la déformation et la contrainte, avec un coefficient de proportionnalité :  $\lambda + 2\mu$

On peut aussi écrire la relation inverse, appelée **loi de comportement inverse**, et qui s'exprime :

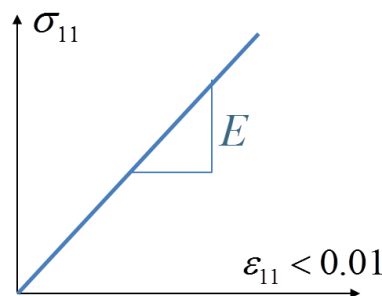
$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{I}}$$

Dans le cas très élémentaire de l'essai de traction uniaxiale en 1D, cette relation se réduit à une seule composante :

$$\varepsilon = \frac{1+\nu}{E} \sigma - \frac{\nu}{E} \sigma = \frac{\sigma}{E}$$

Par identification avec le résultat précédent, on observe qu'on a la relation :  $E = \lambda + 2\mu$

Le module d'Young  $E$ , dont la définition est valide uniquement en HPP, correspond donc à la pente de la courbe de réponse *contrainte=f(déformation)* lorsqu'elle est linéaire.



**5) Pour construire la courbe contrainte-déformation à partir de la machine d'essai de traction, on doit donc pouvoir calculer la déformation à partir d'une mesure du déplacement, mais aussi la contrainte à partir d'une mesure d'un effort. Comment calcule-t-on la contrainte ?**

D'après ce qui précède, on a observé que le champ de contraintes est uniforme dans toute l'éprouvette (pas de dépendance en  $X_1$ ). Si l'on arrive à exprimer la contrainte en un point, on saura donc l'exprimer dans toute l'éprouvette.

On peut isoler une facette de normale  $\underline{e}_1$  (ou indifféremment de normale  $\underline{e}_z$  pour une éprouvette cylindrique) et écrire l'effort exercé par la partie « droite » de l'éprouvette sur la partie « gauche » à partir de l'expression du vecteur-contrainte :

$$\int_S \underline{t}(X, \underline{e}_1) dS = F \underline{e}_1$$

Indifféremment, on pourrait choisir une facette de normale  $-\underline{e}_1$  et écrire l'effort exercé par la partie « gauche » de l'éprouvette sur la partie « droite » à partir de l'expression du vecteur-contrainte :

$$\int_S \underline{t}(X, -\underline{e}_1) dS = -F \underline{e}_1$$

L'effort est distribué uniformément sur la section de l'éprouvette, et ne dépend donc pas de l'intégrale :

$$\underline{t}(X, \underline{e}_1) \int_S dS = \underline{t}(X, \underline{e}_1) S = F \underline{e}_1$$

Or, le vecteur-contrainte s'écrit simplement en fonction du tenseur des contraintes à partir de sa définition :

$$\underline{t}(X, \underline{e}_1) = \underline{\underline{\sigma}}(X) \cdot \underline{e}_1$$

Dans le cas 1D traité ici, ceci revient à écrire :  $\underline{t}(X, \underline{e}_1) = \sigma \underline{e}_1$  et donc :

$$\sigma S = F \Rightarrow \sigma = \frac{F}{S} \text{ dans toute l'éprouvette.}$$

On calcule donc simplement la contrainte de traction dans l'éprouvette en divisant l'effort mesuré par la section de l'éprouvette. En toute rigueur, on s'intéresse ici à la section **actuelle** de l'éprouvette, qui varie en cours de déformation ! En HPP, cette variation est faible et l'on se permet souvent de faire l'hypothèse :

$$\sigma = \frac{F}{S} \approx \frac{F}{S_0}$$

De façon alternative, on pourra chercher à mesurer en temps réel la section transverse au cours de l'essai par des moyens optiques, notamment par corrélation d'images numérique (DIC pour *digital image correlation*) comme illustré sur le sujet.

On peut donc facilement construire la courbe contrainte-déformation correspondant au matériau testé en construisant le tableau :

| déplacement<br>imposée $\Delta L$ (mm) | déformation<br>$\varepsilon = \Delta L / L_0$ | force mesurée<br>$F$ (N) | contrainte $\sigma \approx F / S_0$<br>(Pa) |
|----------------------------------------|-----------------------------------------------|--------------------------|---------------------------------------------|
| 0                                      | 0                                             | 0                        | 0                                           |
| ...                                    | ...                                           | ...                      | ...                                         |

(toutes ces valeurs sont nulles en début d'essai)

6) On ne fait plus l'hypothèse que le champ de déplacement évolue linéairement dans la direction de traction, mais de façon quadratique. Montrer que cette hypothèse n'est pas compatible avec l'équilibre du milieu.

On fait l'hypothèse suivante désormais :  $u(X) = AX^2 + BX + C$

Nous avons énoncé précédemment deux conditions aux limites, qui ne permettront sans doute pas de déterminer les trois constantes :

$$u(X=0) = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$u(X=L_0) = \Delta L \Rightarrow AL_0^2 + BL_0 = \Delta L \Rightarrow B = \frac{\Delta L}{L_0} - AL_0$$

On a donc la forme finale, dans laquelle il reste des constantes indéterminées :

$$u(X) = AX^2 + \left( \frac{\Delta L}{L_0} - AL_0 \right) X$$

$$\text{On a donc dans ce cas le gradient : } \text{Grad } u = \frac{du}{dX} = 2AX + \left( \frac{\Delta L}{L_0} - AL_0 \right)$$

$$\text{Et la déformation } \varepsilon = \frac{1}{2}(\text{Grad } u + \text{Grad } u) = \text{Grad } u = 2AX + \left( \frac{\Delta L}{L_0} - AL_0 \right)$$

L'hypothèse des HPP permet de confondre les formulations eulériennes et lagrangiennes, de telle sorte que l'on puisse également écrire la même expression en fonction des coordonnées dans la configuration actuelle :

$$\varepsilon = 2Ax + \left( \frac{\Delta L}{L_0} - AL_0 \right)$$

La contrainte s'exprime, d'après ce qui précède :

$$\sigma = E\varepsilon = E \left[ 2Ax + \left( \frac{\Delta L}{L_0} - AL_0 \right) \right]$$

L'équilibre du milieu a été formulé à partir du tenseur des contraintes, de telle sorte qu'on ait toujours pour un milieu à l'équilibre :

$$\underline{\text{div}} \underline{\sigma} + \rho(\underline{f}^m - \underline{a}) = \underline{0}$$

En considérant que l'essai est réalisé à vitesse suffisamment lente, et que les forces volumiques (gravité) peuvent être négligées :

$$\underline{\underline{\text{div} \sigma = 0}}$$

En toute rigueur, cette divergence est eulérienne (en fonction des coordonnées actuelles) et non lagrangienne : néanmoins, en HPP, ces deux configurations peuvent être confondues et on se permet de faire l'hypothèse  $\frac{\partial}{\partial x} \approx \frac{\partial}{\partial X}$

Dans le cas 1D, cette expression se limite à écrire :  $\text{div} \sigma = \frac{\partial \sigma}{\partial X} = 0$

D'après ce qui précède on en déduit donc :  $\frac{\partial \sigma}{\partial X} = 2AE = 0 \Rightarrow A = 0$

Ce qui revient à se limiter à une forme linéaire pour le champ de déplacement. Il existe cependant des théories « d'ordre supérieur », au sein desquelles des formes plus complexes pourraient être formulées pour le champ de déplacement, mais qui conduisent à une écriture différente de l'équation d'équilibre... ce qui dépasse largement un cours de MMC de 1<sup>ère</sup> année.

## Deuxième partie : étude de l'éprouvette plate

On s'intéresse maintenant au cas 3D, pour lequel une traction dans la direction  $\underline{e}_1$  sera associée à des variations de dimensions dans les directions transverses  $\underline{e}_2$  et  $\underline{e}_3$ .

**7) Proposer une forme simple pour le champ de déplacements à partir des hypothèses sur la forme de l'éprouvette après transformation.**

Le champ de déplacement s'écrit dans le cas le plus général :

$$\underline{u}(\underline{x}) = u_1(X_1, X_2, X_3)\underline{e}_1 + u_2(X_1, X_2, X_3)\underline{e}_2 + u_3(X_1, X_2, X_3)\underline{e}_3$$

A partir des hypothèses on fait ensuite le raisonnement suivant :

- Si une section droite reste droite, alors pour une section donnée ( $X_1$  fixé) le déplacement  $u_1$  est le même pour toute la section, de telle sorte que  $u_1(X_1, X_2, X_3) = u_1(X_1)$
- Si la section est constante tout le long de l'éprouvette, alors les déplacements transverses  $u_2$  et  $u_3$  sont les mêmes quel que soit  $X_1$  :

$$\underline{u}(\underline{X}) = u_1(X_1)\underline{e}_1 + u_2(X_2, X_3)\underline{e}_2 + u_3(X_2, X_3)\underline{e}_3$$

- Si chaque section rectangulaire de l'éprouvette reste rectangulaire, alors forcément on a :

$$\underline{u}(\underline{X}) = u_1(X_1)\underline{e}_1 + u_2(X_2)\underline{e}_2 + u_3(X_3)\underline{e}_3$$

**8) En déduire une expression pour le champ de déformations et de contraintes dans l'éprouvette.**

On peut comme précédemment calculer facilement le champ de déformations :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{Grad}} \underline{u} + (\underline{\underline{Grad}} \underline{u})^T)$$

$$\underline{\underline{Grad}} \underline{u} = \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \cancel{\frac{\partial u_1}{\partial X_2} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2} + \cancel{\frac{\partial u_1}{\partial X_3} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3} +$$

$$\cancel{\frac{\partial u_2}{\partial X_1} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \cancel{\frac{\partial u_2}{\partial X_3} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_3} +$$

$$\cancel{\frac{\partial u_3}{\partial X_1} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1} + \cancel{\frac{\partial u_3}{\partial X_2} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2} + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$$

$$[\underline{\underline{Grad}} \underline{u}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} \quad [\underline{\underline{\varepsilon}}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{pmatrix}$$

D'après la loi de Hooke, le tenseur des contraintes s'écrit alors :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}$$

$$[\underline{\underline{\sigma}}] = \lambda \left( \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\mu \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{pmatrix}$$

$$[\underline{\underline{\sigma}}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1}(\lambda + 2\mu) + \lambda \left( \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial u_2}{\partial X_2}(\lambda + 2\mu) + \lambda \left( \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u_3}{\partial X_3}(\lambda + 2\mu) + \lambda \left( \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \right) \end{pmatrix}$$



**9) A partir de l'équilibre du milieu, montrer que toutes les composantes du tenseur des contraintes sont constantes dans la partie utile de l'éprouvette.**

L'équilibre du milieu dans ce cas s'exprime comme précédemment :  $\underline{\text{div}} \underline{\sigma} = \underline{0}$

Comme précédemment, on se permet dans ce cas de confondre les dérivées eulériennes et lagrangiennes (on pourrait faire l'exercice un peu plus formellement sans faire l'hypothèse HPP, mais cela sortirait d'un cours d'introduction à la MMC).

Il s'agit alors d'écrire la divergence du tenseur des contraintes pour la forme générale précédente :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial X_1} + \cancel{\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial X_2}} + \cancel{\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial X_3}} &= 0 \Rightarrow \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial X_1} = 0 \\ \cancel{\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial X_1}} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial X_2} + \cancel{\frac{\partial \sigma_{23}}{\partial X_3}} &= 0 \Rightarrow \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial X_2} = 0 \\ \cancel{\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial X_1}} + \cancel{\frac{\partial \sigma_{32}}{\partial X_2}} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial X_3} &= 0 \Rightarrow \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial X_3} = 0 \end{aligned}$$

En reprenant la forme précédente  $\underline{u}(\underline{X}) = u_1(X_1)\underline{e}_1 + u_2(X_2)\underline{e}_2 + u_3(X_3)\underline{e}_3$  on en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X_1} \left[ \frac{\partial u_1}{\partial X_1} (\lambda + 2\mu) + \lambda \left( \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right) \right] &= 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u_1}{\partial X_1^2} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial X_2} \left[ \frac{\partial u_2}{\partial X_2} (\lambda + 2\mu) + \lambda \left( \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right) \right] &= 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u_2}{\partial X_2^2} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial X_3} \left[ \frac{\partial u_3}{\partial X_3} (\lambda + 2\mu) + \lambda \left( \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \right) \right] &= 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u_3}{\partial X_3^2} = 0 \end{aligned}$$

D'après ces trois équations, on déduit facilement la forme suivante pour le champ de contraintes :

$$[\underline{\sigma}] = \begin{pmatrix} A(\lambda + 2\mu) + \lambda(B + C) & 0 & 0 \\ 0 & B(\lambda + 2\mu) + \lambda(A + C) & 0 \\ 0 & 0 & C(\lambda + 2\mu) + \lambda(A + B) \end{pmatrix}$$

avec A, B et C trois constantes

On remarque donc que les différentes composantes des contraintes sont constantes dans toute la partie utile de l'éprouvette : si l'on connaît cette contrainte à un endroit de l'éprouvette, on la connaît partout.

**10) A partir des conditions de la surface libre et de l'hypothèse de distribution uniforme de l'effort de traction, déterminer complètement le champ de contraintes.**

La condition de surface libre sur le bord de l'éprouvette  $X_2 = \pm \frac{a_0}{2}$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \underline{t}\left(X_2 = \pm \frac{a_0}{2}, \underline{e}_2\right) &= \underline{0} \Rightarrow \underline{\sigma}\left(X_2 = \pm \frac{a_0}{2}\right) \cdot \underline{e}_2 = \underline{0} \\ \Rightarrow \pm \cancel{\sigma_{12}\left(X_2 = \pm \frac{a_0}{2}\right)} \underline{e}_1 \pm \sigma_{22}\left(X_2 = \pm \frac{a_0}{2}\right) \underline{e}_2 \pm \cancel{\sigma_{32}\left(X_2 = \pm \frac{a_0}{2}\right)} \underline{e}_3 &= \underline{0} \end{aligned}$$

On en déduit que la composante  $\sigma_{22}$  est nulle au bord de l'éprouvette : comme elle est constante, elle est nulle partout !

Le même raisonnement peut être fait évidemment sur le bord de l'éprouvette  $X_3 = \pm \frac{b_0}{2}$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \underline{t}\left(X_3 = \pm \frac{b_0}{2}, \underline{e}_3\right) &= \underline{0} \Rightarrow \underline{\sigma}\left(X_3 = \pm \frac{b_0}{2}\right) \cdot \underline{e}_3 = \underline{0} \\ \Rightarrow \pm \cancel{\sigma_{31}\left(X_3 = \pm \frac{b_0}{2}\right)} \underline{e}_1 \pm \cancel{\sigma_{32}\left(X_3 = \pm \frac{b_0}{2}\right)} \underline{e}_2 \pm \sigma_{33}\left(X_3 = \pm \frac{b_0}{2}\right) \underline{e}_3 &= \underline{0} \end{aligned}$$

On en déduit que la composante  $\sigma_{33}$  est nulle au bord de l'éprouvette : comme elle est constante, elle est nulle partout !

Le tenseur des contraintes est donc de la forme :

$$\underline{\sigma} = [A(\lambda + 2\mu) + \lambda(B + C)] \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 = \text{Cste } \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1$$

Si on reprend le raisonnement qui a été fait en première partie, la répartition uniforme de l'effort de traction sur la section transversale impose :

$$\begin{aligned} \int_S \underline{t}(X_1 = L_0, \underline{e}_1) dS &= \underline{t}(X_1 = L_0, \underline{e}_1) \int_S dS = \underline{t}(X_1 = L_0, \underline{e}_1) S = F \underline{e}_1 \\ \underline{t}(X_1 = L_0, \underline{e}_1) &= \underline{\sigma}(X_1 = L_0) \cdot \underline{e}_1 = \sigma_{11}(X_1 = L_0) \underline{e}_1 + \cancel{\sigma_{21}(X_1 = L_0) \underline{e}_2} + \cancel{\sigma_{31}(X_1 = L_0) \underline{e}_3} \\ \Rightarrow \sigma_{11}(X_1 = L_0) S &= F \end{aligned}$$

On connaît donc la contrainte pour un bord de l'éprouvette, et comme elle est constante on la connaît partout ! On a au final :

$$\underline{\sigma} = \sigma_{11} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 = \frac{F}{S} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1$$

**11) A partir de la loi de Hooke, retrouver la signification physique du coefficient de Poisson .**

La loi de Hooke inverse permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\varepsilon}} &= \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{I}} = \left( \frac{1+\nu}{E} \right) \sigma_{11} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 - \frac{\nu}{E} \sigma_{11} (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3) \\ &= \frac{\sigma_{11}}{E} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 - \frac{\nu}{E} \sigma_{11} (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3) \\ [\underline{\underline{\varepsilon}}] &= \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu}{E} \sigma_{11} = -\nu \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu}{E} \sigma_{11} = -\nu \varepsilon_{11} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

A partir de la déformation dans la direction de traction  $\underline{e}_1$  on retrouve la relation que l'on a identifié en première partie dans cette direction :  $\sigma_{11} = E \varepsilon_{11}$ . Puisque la contrainte est positive ( $F/S \geq 0$ ), cette déformation est positive et correspond à un allongement.

On observe également que les déformations dans les directions transverses  $\underline{e}_2$  et  $\underline{e}_3$  s'écrivent  $-\nu \varepsilon_{11}$  : elles sont donc négatives et correspondent à un rétrécissement, et on en déduit la définition du coefficient de *compaction transverse* appelé aussi *coefficient de Poisson* :

***Le coefficient de Poisson correspond à l'opposé du rapport entre la déformation transverse et la déformation longitudinale dans le cas d'un essai de traction.***

**12) On mesure la largeur  $a$  de l'éprouvette en cours de transformation : écrire le lien auquel on doit s'attendre entre  $a$ , la largeur initiale  $a_0$ , et la variation de longueur  $\Delta L$ .**

On a identifié précédemment le tenseur des déformations :

$$[\underline{\underline{\varepsilon}}] = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu}{E} \sigma_{11} = -\nu \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu}{E} \sigma_{11} = -\nu \varepsilon_{11} \end{pmatrix}$$

Comme cette matrice diagonale (et uniquement parce que c'est le cas !) on peut identifier directement la déformation  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  au gradient du déplacement  $\underline{\underline{Grad}} \underline{u}$  car :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{Grad}} \underline{u} + (\underline{\underline{Grad}} \underline{u})^T) = \underline{\underline{Grad}} \underline{u} \quad \text{dans ce cas}$$

On en déduit donc :

$$[\underline{\underline{Grad}} \underline{u}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu}{E} \sigma_{11} = -\nu \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu}{E} \sigma_{11} = -\nu \varepsilon_{11} \end{pmatrix}$$

Si l'on s'intéresse à la largeur, il s'agit alors d'étudier le déplacement selon la direction  $\underline{e}_2$  dans laquelle on peut écrire :

$$\frac{\partial u_2}{\partial X_2} = -\nu \varepsilon_{11} = -\nu \frac{\Delta L}{L_0} \Rightarrow u_2 = -\nu \frac{\Delta L}{L_0} X_2 + D \quad \text{avec } D \text{ une constante}$$

Si l'on place le repère sur l'axe de symétrie de l'éprouvette (comme sur l'énoncé) on a alors :  $u_2(X_2 = 0) = 0 \Rightarrow D = 0$ .

Pour écrire la variation de largeur, il s'agit alors d'écrire le champ de déplacement pour les bords  $X_2 = \pm a_0$  et la largeur dans la configuration déformée s'écrit ainsi :

$$\begin{aligned} a &= a_0 + u\left(X_2 = \frac{a_0}{2}\right) - u\left(X_2 = -\frac{a_0}{2}\right) = \\ a &= a_0 - \nu \frac{\Delta L}{L_0} \frac{a_0}{2} - \nu \frac{\Delta L}{L_0} \frac{a_0}{2} = a_0 \left(1 - \nu \frac{\Delta L}{L_0}\right) \end{aligned}$$

On voit donc que la largeur  $a$  diminue et varie linéairement avec la variation de longueur  $\Delta L$  : ceci est vrai en HPP uniquement, jusqu'à des phénomènes de « striction » arrive et mènent à la fin de l'essai de traction :

