

TD6 : corrigé

1) Montrer que, en raison des hypothèses formulées, on peut postuler un champ de déplacement de la forme : $\underline{u}(r, z) = u_\theta(r, z)\underline{e}_\theta$.

On part d'un champ de déplacement, dans le cas général :

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = u_r(r, \theta, z)\underline{e}_r + u_\theta(r, \theta, z)\underline{e}_\theta + u_z(r, \theta, z)\underline{e}_z$$

Le problème est totalement axisymétrique, et sera donc indépendant de l'angle θ :

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = u_r(r, \cancel{\theta}, z)\underline{e}_r + u_\theta(r, \cancel{\theta}, z)\underline{e}_\theta + u_z(r, \cancel{\theta}, z)\underline{e}_z$$

Comme une section droite restera droit sous l'HPP on aura :

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = u_r(r, z)\underline{e}_r + u_\theta(r, z)\underline{e}_\theta + u_z(r, \cancel{z})\underline{e}_z$$

Comme le rayon de l'arbre est constant sous l'HPP on aura :

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \cancel{u_r(r, z)\underline{e}_r} + u_\theta(r, z)\underline{e}_\theta + u_z(r)\underline{e}_z$$

Comme la longueur de l'arbre est constante sous l'HPP on considérera enfin :

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = u_\theta(r, z)\underline{e}_\theta + \cancel{u_z(r)\underline{e}_z}$$

Avec les hypothèses formulées on arrive donc à la forme demandée :

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = u_\theta(r, z)\underline{e}_\theta$$

2) Calculer le champ de déformations correspondant à ce déplacement.

Par définition le tenseur des déformations en HPP s'écrit :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{Grad}} \underline{u} + (\underline{\underline{Grad}} \underline{u})^T)$$

On doit donc calculer le gradient du champ de déplacements en coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{Grad}} \underline{u} = & \cancel{\frac{\partial u_r}{\partial r} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r} + \frac{1}{r} \cancel{\left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta} + \cancel{\frac{\partial u_r}{\partial z} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_z} + \\ & \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \cancel{\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \\ & \cancel{\frac{\partial u_z}{\partial r} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_r} + \cancel{\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta} + \cancel{\frac{\partial u_z}{\partial z} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z} \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{Grad}} \underline{u} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r - \frac{u_\theta}{r} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z$$

On utilise volontairement tantôt les notations tensorielles, tantôt les notations matricielles. Utilisant la notation matricielle pour calculer le tenseur des déformations :

$$\begin{aligned} [\underline{\underline{\varepsilon}}] &= \frac{1}{2} \left([\underline{\underline{Grad}} \underline{u}] + [\underline{\underline{Grad}} \underline{u}]^T \right) \\ [\underline{\underline{\varepsilon}}] &= \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 0 & -\frac{u_\theta}{r} & 0 \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & 0 & \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & 0 \\ -\frac{u_\theta}{r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial u_\theta}{\partial z} & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) & 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial u_\theta}{\partial z} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3) Calculer le champ de contraintes correspondant à ce champ de déformations.

Comme l'arbre est considéré élastique, linéaire et isotrope, on peut utiliser la loi de Hooke (attention : loi vue pour l'instant seulement en autonomie, pas maîtrisée) :

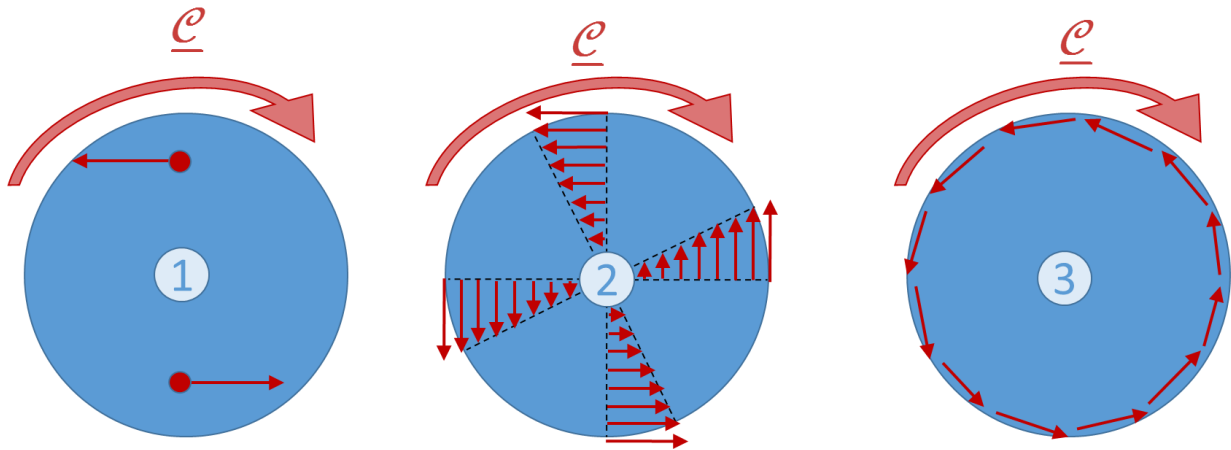
$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}$$

Dans ce cas particulier la trace de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ est nulle et on écrit tout simplement :

$$[\underline{\underline{\sigma}}] = 2\mu [\underline{\underline{\varepsilon}}] = \begin{pmatrix} 0 & \mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) & 0 \\ \mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) & 0 & \mu \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ 0 & \mu \frac{\partial u_\theta}{\partial z} & 0 \end{pmatrix}$$

4) On se propose de postuler que le couple est appliqué en $z = L$ de façon linéaire en r , de telle sorte que $\sigma_{\theta z}(z = L) = C_{ste} \times r$. Justifier cette hypothèse et déterminer cette constante.

En vertu du théorème de Saint-Venant, l'état de contraintes suffisamment loin de la surface d'application du couple ne sera pas dépendant de la façon précise avec laquelle ce couple est transmis, mais uniquement du torseur résultant. Ainsi, par exemple, ces trois répartitions des efforts donneraient le même état de contrainte suffisamment loin de la surface d'application :



Dans notre cas on se propose de faire la seconde hypothèse.

Pour déterminer la constante, on peut chercher à écrire la condition sur la surface $z = L$, en écrivant que chacun des vecteur-contraintes crée un couple infinitésimal (on appelle H le centre de la section et M le point d'application du vecteur-contrainte) :

$$\int_S \underline{HM} \wedge \underline{t}(r, \theta, z = L, \underline{e}_z) dS = \int_S (r \underline{e}_r) \wedge \underline{t}(r, \theta, z = L, \underline{e}_z) dS = \underline{\mathcal{C}}$$

On peut alors chercher à expliciter le vecteur-contrainte d'après sa définition :

$$\underline{t}(r, \theta, z = L, \underline{e}_z) = \underline{\sigma}(r, \theta, z = L) \cdot \underline{e}_z = \sigma_{rz}(r, \theta, z = L) \underline{e}_r + \sigma_{\theta z}(r, \theta, z = L) \underline{e}_\theta + \sigma_{zz}(r, \theta, z = L) \underline{e}_z$$

Lorsque l'on réécrit le produit vectoriel on a alors :

$$\begin{aligned} \int_S (r \underline{e}_r) \wedge (\sigma_{rz}(r, \theta, z = L) \underline{e}_r + \sigma_{\theta z}(r, \theta, z = L) \underline{e}_\theta + \sigma_{zz}(r, \theta, z = L) \underline{e}_z) dS &= \underline{\mathcal{C}} \underline{e}_z \\ \int_S (\sigma_{\theta z}(r, \theta, z = L) \underline{e}_z - \sigma_{zz}(r, \theta, z = L) \underline{e}_\theta) r dS &= \underline{\mathcal{C}} \underline{e}_z \\ \int_0^{2\pi} \int_0^R (\sigma_{\theta z}(r, \theta, z = L) \underline{e}_z - \sigma_{zz}(r, \theta, z = L) \underline{e}_\theta) r^2 dr d\theta &= \underline{\mathcal{C}} \underline{e}_z \end{aligned}$$

En faisant l'hypothèse que $\sigma_{\theta z}(z = L) = Cste \times r$ on arrive par conséquent à déterminer cette constante :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^R \sigma_{\theta z}(r, \theta, z = L) r^2 dr d\theta &= \mathcal{C} \\ \Rightarrow Cste \times \int_0^{2\pi} \int_0^R r^3 dr d\theta &= \mathcal{C} \\ \Rightarrow Cste \times 2\pi \times \frac{R^4}{4} &= \mathcal{C} \\ \Rightarrow Cste &= \frac{2\mathcal{C}}{\pi R^4} \end{aligned}$$

On peut alors fait intervenir une grandeur qui sera largement utilisée au semestre S6 en mécanique des solides appliquée : le moment quadratique de torsion qui s'écrit :

$$I_G = \frac{\pi D^4}{32}$$

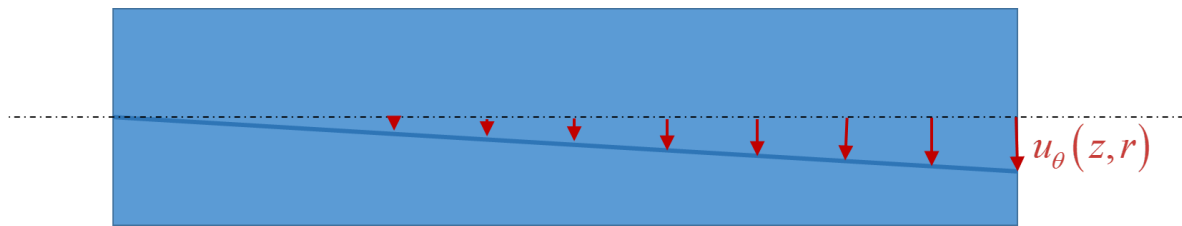
On peut alors réécrire la constante, et tomber sur une forme bien connue en résistance des matériaux pour la contrainte due à un couple de torsion :

$$\sigma_{\theta z}(z=L) = Cste \times r = \frac{2\mathcal{C}r}{\pi R^4} = \frac{2\mathcal{C}r}{\pi \left(\frac{D^4}{16}\right)} = \frac{\mathcal{C}r}{I_G}$$

Cette contrainte n'est valable que pour $z = L$ pour l'instant.

5) En raison des hypothèses précédentes, on peut postuler que u_θ est linéaire en z . En déduire le champ de contraintes dans tout l'arbre de transmission.

Comme on a fait l'hypothèse qu'une fibre droite en surface reste droite après transformation, il semble cohérent de postuler que u_θ est linéaire en z :



En revanche, nous n'avons fait jusqu'ici aucune hypothèse sur la dépendance en r de u_θ . On a donc la forme suivante : $u_\theta(r, z) = A(r)z + B(r)$.

En $z = 0$ l'arbre est encasté et on a par conséquent : $u_\theta(r, z=0) = B(r) = 0 \quad \forall r$

On en déduit : $u_\theta(r, z) = A(r)z$

Or, on a calculé précédemment le tenseur des contraintes suivant :

$$[\underline{\underline{\sigma}}] = \begin{pmatrix} 0 & \mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) & 0 \\ \mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) & 0 & \mu \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ 0 & \mu \frac{\partial u_\theta}{\partial z} & 0 \end{pmatrix}$$

Par conséquent on peut écrire $\sigma_{\theta z} = \mu \frac{\partial u_\theta}{\partial z} = \mu A(r) \quad \forall z$

On constate alors que cette composante du tenseur des contraintes est indépendante de z . Or, on l'a calculé précédemment pour $z = L$:

$$\sigma_{\theta z}(z = L) = \sigma_{\theta z}(r, \forall z) = \frac{\mathcal{C}r}{I_G}$$

On détermine au passage la fonction $A(r) = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} = \frac{\sigma_{\theta z}}{\mu} = \frac{\mathcal{C}r}{\mu I_G}$

Et donc le champ de déplacement est connu : $u_\theta(r, z) = \frac{\mathcal{C}rz}{\mu I_G}$

On peut maintenant déterminer complètement le champ de contraintes :

$$[\underline{\underline{\sigma}}] = \begin{pmatrix} 0 & \cancel{\mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right)} & 0 \\ \cancel{\mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right)} & 0 & \frac{\mathcal{C}r}{I_G} \\ 0 & \frac{\mathcal{C}r}{I_G} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mathcal{C}r}{I_G} \\ 0 & \frac{\mathcal{C}r}{I_G} & 0 \end{pmatrix}$$

Il est habituel en résistance des matériaux d'utiliser la notation $\tau = \frac{\mathcal{C}r}{I_G}$ et donc :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\mathcal{C}r}{I_G} (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta) = \tau (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta)$$

On vérifie au passage que la grandeur τ a bien la dimension d'une contrainte :

$$\tau = \frac{\overset{N.m}{\mathcal{C}} \overset{m}{r}}{\overset{m^4}{I_G}} \quad \text{avec} \quad I_G = \frac{\pi D^4}{32} \quad \text{donc } \tau \text{ est bien exprimé en Pascals (N.m}^{-2}\text{)}$$

Elle est appelée contrainte de cisaillement ou de torsion, et elle est dans notre cas dépendante du rayon. On retrouve les formules qui sont disponibles dans les tables dès qu'on cherche à dimensionner un arbre en torsion.

6) Vérifier que la condition de surface libre est satisfaite en $r = R$.

La surface latérale de l'arbre est une surface libre, et on a par conséquent la condition :

$$\begin{aligned}
\underline{t}(r=R, \theta, z, \underline{n}=\underline{e}_r) &= \underline{0} \\
\underline{\underline{\sigma}}(r=R) \cdot \underline{e}_r &= \sigma_{rr}(r=R)\underline{e}_r + \sigma_{\theta r}(r=R)\underline{e}_\theta + \sigma_{zr}(r=R)\underline{e}_z = \underline{0} \\
\Rightarrow \begin{cases} \sigma_{rr}(r=R) = 0 \\ \sigma_{\theta r}(r=R) = 0 \\ \sigma_{zr}(r=R) = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Cette condition est satisfaite d'après la forme trouvée précédemment.

7) Déterminer les contraintes principales et la base principale correspondante.

Pour déterminer la base principale, on doit diagonaliser la matrice représentative du tenseur des contraintes :

$$[\underline{\underline{\sigma}}]_{(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{on prend bien soin de préciser le repère})$$

Calculons dans ce cas les valeurs propres de cette matrice dans un premier temps :

$$[\underline{\underline{\sigma}}]_{(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{on prend bien soin de préciser le repère})$$

$$\begin{aligned}
\det(\underline{\underline{\sigma}} - \lambda \underline{\underline{1}}) &= 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \tau \\ 0 & \tau & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \\
\Rightarrow (-\lambda)^3 + \lambda \tau^2 &= 0 \\
\Rightarrow \lambda(\tau^2 - \lambda^2) &= 0
\end{aligned}$$

Cette équation possède évidemment 3 solutions, qui sont les contraintes principales organisées par convention de manière décroissante :

$$\begin{aligned}
\sigma_I &= \tau \\
\sigma_{II} &= 0 \\
\sigma_{III} &= -\tau
\end{aligned}$$

Par conséquent, le tenseur des contraintes peut également s'écrire dans la base principale sous la forme :

$$[\underline{\underline{\sigma}}]_{(\underline{e}_I, \underline{e}_{II}, \underline{e}_{III})} = \begin{pmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\tau \end{pmatrix} \quad \text{ou encore } \underline{\underline{\sigma}} = \tau(\underline{e}_I \otimes \underline{e}_I - \underline{e}_{III} \otimes \underline{e}_{III})$$

Il est intéressant ici de calculer les directions principales associées à cette nouvelle base :

$$\begin{cases} (\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_i \underline{I}) \cdot \underline{e}_i = 0 \\ \underline{e}_i \cdot \underline{e}_i = 1 \end{cases} \quad \text{avec } i \in \{I, II, III\}$$

$$\sigma_I = \tau \Rightarrow \begin{pmatrix} -\tau & 0 & 0 \\ 0 & -\tau & \tau \\ 0 & \tau & -\tau \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_I \\ \beta_I \\ \gamma_I \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -\tau\alpha_I = 0 \\ -\tau\beta_I + \tau\gamma_I = 0 \\ \tau\beta_I - \tau\gamma_I = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{e}_I = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_I \\ \beta_I \end{pmatrix}$$

$$\underline{e}_I \cdot \underline{e}_I = 1 \Rightarrow \beta_{III} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sigma_{II} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{II} \\ \beta_{II} \\ \gamma_{II} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \tau\beta_{II} = 0 \\ \tau\gamma_{II} = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{e}_{II} = \begin{pmatrix} \alpha_{II} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{e}_{II} \cdot \underline{e}_{II} = 1 \Rightarrow \alpha_{II} = \pm 1$$

$$\sigma_{III} = -\tau \Rightarrow \begin{pmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & \tau & \tau \\ 0 & \tau & \tau \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{III} \\ \beta_{III} \\ \gamma_{III} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \tau\alpha_{III} = 0 \\ \tau\beta_{III} + \tau\gamma_{III} = 0 \\ \tau\beta_{III} + \tau\gamma_{III} = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{e}_{III} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_{III} \\ -\beta_{III} \end{pmatrix}$$

$$\underline{e}_{III} \cdot \underline{e}_{III} = 1 \Rightarrow \beta_{III} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

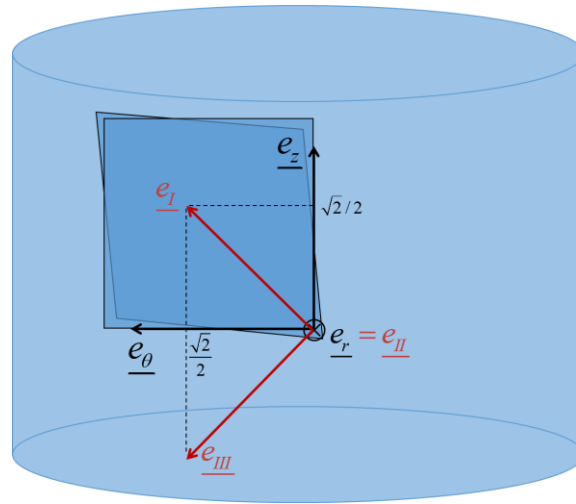
On vient donc de déterminer les trois directions principales suivantes :

$$\underline{e}_I = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} (\underline{e}_\theta + \underline{e}_z)$$

$$\underline{e}_{II} = \pm \underline{e}_r$$

$$\underline{e}_{III} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} (\underline{e}_\theta - \underline{e}_z)$$

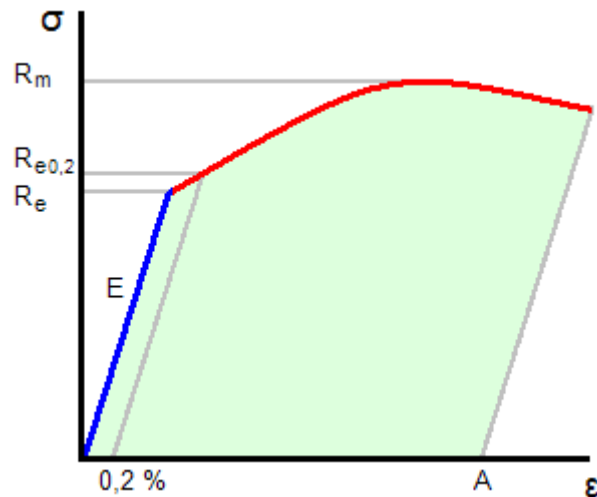
Dans cette nouvelle base $\underline{e}_I, \underline{e}_{II}, \underline{e}_{III}$, les contraintes sont normales. On peut facilement réaliser l'interprétation physique en dessinant se nouveau repère :



On comprend alors que le matériau subit un état de traction suivant $\underline{e_I}$ et de compression suivant $\underline{e_{III}}$.

8) Calculer la contrainte équivalente de Von-Mises, en en déduire le couple maximal admissible pour un matériau et des dimensions données.

La contrainte équivalente de Von Mises permet de calculer une valeur scalaire comparable avec la limite d'élasticité R_e du matériau. On rappelle le moyen de déterminer la limite d'élasticité à partir de l'essai de traction uniaxiale :



Cette contrainte a pour définition : $\sigma_{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2}$

Ici on la calcule donc très simplement :

$$\sigma_{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2}$$

$$\sigma_{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\tau^2 + \tau^2 + (-\tau - \tau)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{6\tau^2} = \sqrt{3}\tau$$

On notera bien que la contrainte de cisaillement $\tau = \mathcal{C}r / I_G$ est dépendante de r . Le matériau va être sollicité en dehors de sa limite d'élasticité dans un premier lieu là où cette contrainte est maximale, c'est-à-dire en $r_{\max} = R$. A cet endroit on a :

$$\tau_{\max} = \frac{\mathcal{C}R}{I_G} = \frac{\mathcal{C}D}{2I_G} = \frac{32\mathcal{C}D}{2\pi D^4} = \frac{16\mathcal{C}}{\pi D^3}$$

Le matériau sort de son comportement élastique lorsqu'on a la relation :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_{eq} - R_e = 0$$

Cette condition s'écrit donc dans notre cas :

$$\sigma_{VM}^{\max} - R_e = 0 \Rightarrow \sqrt{3} \tau_{\max} = R_e \Rightarrow \sqrt{3} \frac{16\mathcal{C}^{\max}}{\pi D^3} = R_e \Rightarrow \mathcal{C}^{\max} = \frac{R_e \pi D^3}{16\sqrt{3}}$$

On constate que cette valeur est dépendante de D^3 , qui joue donc un rôle prépondérant dans le dimensionnement de l'arbre, mais pas de sa longueur. En réalité, si la longueur est trop grande, on risque de sortir vite de l'HPP et donc toute la démarche qui vient d'être faite n'est plus valide...

Application numérique :

On considère un arbre de 10 cm de diamètre en acier ($R_e = 240\text{MPa}$), quel est le couple maximal transmissible ?

$$\mathcal{C}^{\max} = \frac{R_e \pi D^3}{16\sqrt{3}} = \frac{240 \cdot 10^6 \times \pi \times 0.1^3}{16\sqrt{3}} = 28341 \text{ N.m}$$

Ce couple équivaut au moment créé par une masse de 2,8 tonnes au bout d'un bras de levier d'un mètre.