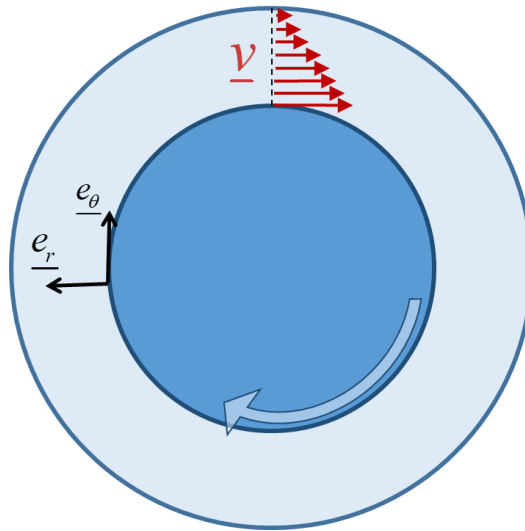


## TD7 : corrigé

### Première partie : champ de vitesses autour de la surface latérale

1) Pour cette surface, justifier que l'on puisse postuler un champ de vitesses et de pression sous la forme  $\underline{v} = v_\theta(r)\underline{e}_\theta$  et  $p(r, z)$  respectivement.

Tentons de représenter la circulation du fluide autour de la surface latérale :



Le problème étant entièrement axisymétrique, il ne sera pas dépendant de  $\theta$  :

$$\underline{v}(\underline{x}) = v_r(r, \theta, z)\underline{e}_r + v_\theta(r, \theta, z)\underline{e}_\theta + v_z(r, \theta, z)\underline{e}_z$$

Pour le champ de pressions on arrive donc directement à la forme demandée :

$$p(\underline{x}) = p(r, \theta, z) = p(r, z)$$

Si le volant est assez haut, on peut faire l'hypothèse que pour chaque section transverse du volant on aura la même répartition, et que par conséquent on a uniquement :

$$\underline{v}(\underline{x}) = \underline{v}(r) = v_r(r, \theta, z)\underline{e}_r + v_\theta(r, \theta, z)\underline{e}_\theta + v_z(r, \theta, z)\underline{e}_z$$

Dans ce cas, on pourra également faire l'hypothèse que le champ de vitesses est entièrement contenu dans le plan et on aura :

$$\underline{v}(r) = v_r(r)\underline{e}_r + v_\theta(r)\underline{e}_\theta + v_z(r)\underline{e}_z$$

Enfin, si le fluide est considéré incompressible, on aura la relation suivante :

$$\text{div } \underline{v} = 0$$

$$\text{div } \underline{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} = \frac{v_r}{r} + \frac{\partial(v_r)}{\partial r} = 0$$

On a donc à résoudre l'équation différentielle :

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} v_r = 0 \Rightarrow v_r = A e^{-\int \frac{1}{r} dr} = A e^{-\ln r + \text{cste}} = C e^{-\ln r} = \frac{C}{r}$$

Pour déterminer la constante, on peut se servir de la condition d'adhésion à la paroi de l'enceinte :

$$v_r(r = R_{\text{ext}}) = \frac{C}{R_{\text{ext}}} = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow \underline{v}(r) = v_\theta(r) \underline{e}_\theta$$

On final on peut postuler le champ de vitesses :

$$\underline{v}(r) = v_\theta(r) \underline{e}_\theta$$

## 2) Trouver la forme du champ de vitesses en utilisant l'équation de Navier-Stokes.

L'équation de Navier-Stokes s'écrit :

$$\rho \frac{d\underline{v}}{dt} = \rho \left( \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{\text{grad}}(\underline{v}) \cdot \underline{v} \right) = -\underline{\text{grad}}(p) + \mu \underline{\Delta v} + \rho \underline{g}$$

On va faire l'hypothèse que le volant est placé verticalement de telle sorte que :

$$\underline{g} = -g \underline{e}_z$$

Ecrivons les différents termes de l'équation de Navier-Stokes:

$$\underline{\text{grad}} p = \frac{\partial p}{\partial r} \underline{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \underline{e}_\theta + \frac{\partial p}{\partial z} \underline{e}_z$$

$$\underline{\Delta v} = \underline{\text{div}}(\underline{\text{grad}}(\underline{v}))$$

$$\left[ \underline{\text{grad}} \underline{v} \right] = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) & \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{v_\theta}{r} & 0 \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\left[ \underline{\text{div}}(\underline{\text{grad}}(\underline{v})) \right] &= \begin{pmatrix} \cancel{\frac{\partial [\underline{\text{grad}}(\underline{v})]_{rr}}{\partial r}} + \cancel{\frac{1}{r} \frac{\partial [\underline{\text{grad}}(\underline{v})]_{r\theta}}{\partial \theta}} + \cancel{\frac{1}{r} ([\underline{\text{grad}}(\underline{v})]_{r\theta} - [\underline{\text{grad}}(\underline{v})]_{\theta r})} + \cancel{\frac{\partial [\underline{\text{grad}}(\underline{v})]_{rz}}{\partial z}} \\ \cancel{\frac{\partial [\underline{\text{grad}}(\underline{v})]_{\theta r}}{\partial r}} + \cancel{\frac{1}{r} \frac{\partial [\underline{\text{grad}}(\underline{v})]_{\theta\theta}}{\partial \theta}} + \frac{1}{r} ([\underline{\text{grad}}(\underline{v})]_{r\theta} + [\underline{\text{grad}}(\underline{v})]_{\theta r}) + \cancel{\frac{\partial [\underline{\text{grad}}(\underline{v})]_{\theta z}}{\partial z}} \\ \cancel{\frac{\partial [\underline{\text{grad}}(\underline{v})]_{zr}}{\partial r}} + \cancel{\frac{1}{r} \frac{\partial [\underline{\text{grad}}(\underline{v})]_{z\theta}}{\partial \theta}} + \cancel{\frac{1}{r} [\underline{\text{grad}}(\underline{v})]_{z\theta}} + \cancel{\frac{\partial [\underline{\text{grad}}(\underline{v})]_{zz}}{\partial z}} \end{pmatrix} \\
\left[ \underline{\text{div}}(\underline{\text{grad}}(\underline{v})) \right] &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial [\underline{\text{grad}}(\underline{v})]_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} ([\underline{\text{grad}}(\underline{v})]_{r\theta} + [\underline{\text{grad}}(\underline{v})]_{\theta r}) \\ 0 \end{pmatrix} \\
\left[ \underline{\text{div}}(\underline{\text{grad}}(\underline{v})) \right] &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Reprenons l'équation de Navier-Stokes. La dérivée particulière de la vitesse en régime stationnaire s'écrit :

$$\rho \frac{d\underline{v}}{dt} = \rho \left( \cancel{\frac{\partial \underline{v}}{\partial t}} + \underline{\text{grad}}(\underline{v}) \cdot \underline{v} \right) = \rho \begin{pmatrix} 0 & -\frac{v_\theta}{r} & 0 \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ v_\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho \frac{v_\theta^2}{r} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

NB : On retrouve la forme connue pour l'accélération centripète  $\|\underline{a}\| = -\frac{\|\underline{v}\|^2}{r}$

Si on réécrit l'équation de Navier-Stokes on obtient donc :

$$\begin{aligned}
-\underline{\text{grad}}(p) + \mu \underline{\Delta} \underline{v} + \rho \underline{g} &= -\rho \frac{v_\theta^2}{r} \underline{e}_r \\
\Rightarrow \begin{cases} -\frac{\partial p}{\partial r} = -\rho \frac{v_\theta^2}{r} \\ \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} = 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Intéressons-nous désormais à la seconde équation, qui concerne le champ de vitesses :

$$\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} = 0$$

On montre que cette équation a pour solution (voir aide à la fin de l'énoncé de TD) :

$$\begin{aligned} v_\theta &= \frac{A}{r} + Br \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} &= -\frac{A}{r^2} + B \\ \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} &= \frac{2A}{r^3} \\ \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} &= \frac{2A}{r^3} - \frac{A}{r^3} + \frac{B}{r} - \frac{A}{r^3} - \frac{B}{r} = 0 \end{aligned}$$

Les conditions aux limites nous permettent d'écrire :

$$\begin{cases} v_\theta(r = R_{\text{int}}) = \frac{A}{R_{\text{int}}} + BR_{\text{int}} = \Omega R_{\text{int}} \\ v_\theta(r = R_{\text{ext}}) = \frac{A}{R_{\text{ext}}} + BR_{\text{ext}} = 0 \end{cases} \quad \text{avec } \Omega \text{ la vitesse de rotation du moteur}$$

On se trouve devant un système de deux équations à deux inconnues, et on connaît donc les deux constantes (rien ne sert de les calculer ici). On remarque simplement qu'elles seront linéairement dépendantes de la vitesse  $\Omega$ . On a donc le champ :

$$v_\theta = \frac{A(\Omega)}{r} + B(\Omega)r$$

### 3) En déduire le champ de contraintes sur la surface latérale.

D'après la loi de comportement pour un fluide newtonien on a :

$$\underline{\underline{\tau}} = 2\mu \underline{\underline{d}} = \mu \left( \underline{\underline{\text{grad } v}} + \left( \underline{\underline{\text{grad } v}} \right)^T \right)$$

On a calculé précédemment  $\underline{\underline{\text{grad } v}}$  :

$$\left[ \underline{\underline{\text{grad } \underline{v}}} \right] = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{v_\theta}{r} & 0 \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{A}{r^2} - B & 0 \\ -\frac{A}{r^2} + B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit donc le tenseur des contraintes visqueuses, tous calculs faits :

$$\left[ \underline{\underline{\tau}} \right] = \mu \left( \begin{pmatrix} 0 & -\frac{A}{r^2} - B & 0 \\ -\frac{A}{r^2} + B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{A}{r^2} + B & 0 \\ -\frac{A}{r^2} - B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = -\mu \frac{2A}{r^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le champ de contraintes à la surface latérale est donc :

$$\underline{\underline{\sigma}}(r = R_{\text{int}}) = -p \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tau}}(r = R_{\text{int}}) = -p \underline{\underline{I}} - \mu \frac{2A}{R_{\text{int}}^2} (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r)$$

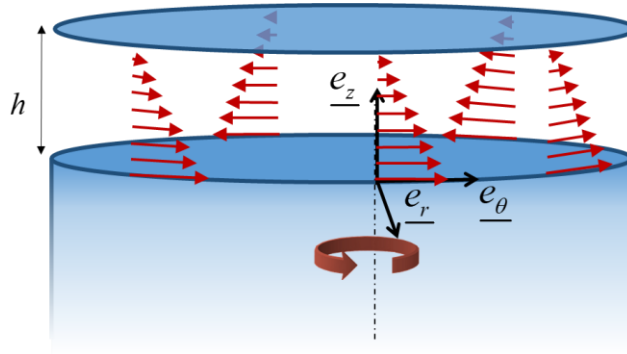
On n'a pour l'instant pas déterminé le champ de pression : nous verrons ensuite que calcul n'est pas nécessaire pour calculer le couple résistant.

## Seconde partie : champ de vitesses autour de la surface supérieure

- 4) Pour cette seconde surface, on postule un champ de vitesses et de pression sous la forme  $\underline{v} = v_\theta(r, z) \underline{e}_\theta$  et  $p(r, z)$  respectivement, et on admet que la vitesse dépend linéairement de  $z$ . En reprenant la démarche précédente, calculer le champ de contraintes sur la surface supérieure..**

Intéressons-nous désormais à la surface supérieure. On admet (sans les justifier) les deux formes précédentes pour les champs de vitesses et de pression :

$$\begin{aligned} \underline{v}(\underline{x}) &= v_\theta(r, z) \underline{e}_\theta \\ p(\underline{x}) &= p(r, z) \end{aligned}$$



Cette fois, on postule que le champ de vitesse est linéaire en  $z$  et donc de la forme :

$v_\theta(r, z) = A(r)z + B(r)$  avec  $A(r)$  et  $B(r)$  deux fonctions à déterminer.

Ecrivons les deux conditions aux limites en vitesses :

$$v_\theta(r, z=0) = \Omega r \quad \forall r \Rightarrow B(r) = \Omega r$$

$$v_\theta(r, z=h) = 0 \quad \forall r \Rightarrow A(r)h + B(r) = 0 \Rightarrow A(r) = \frac{-B(r)}{h} = \frac{-\Omega r}{h}$$

On peut donc proposer un champ de vitesses sous la forme :

$$v_\theta(r, z) = r\Omega \left(1 - \frac{z}{h}\right)$$

NB : la réécriture de l'équation de Navier-Stokes conduirait à l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} = 0$$

dont la forme  $v_\theta(r, z) = r\Omega \left(1 - \frac{z}{h}\right)$  est une solution.

Calculons comme précédemment le tenseur des contraintes visqueuses :

$$\underline{\underline{\tau}} = 2\mu \underline{\underline{d}} = \mu \left( \underline{\underline{\text{grad } \underline{v}}} + \left( \underline{\underline{\text{grad } \underline{v}}} \right)^T \right)$$

On doit calculer à nouveau  $\underline{\underline{\text{grad } \underline{v}}}$  :

$$\left[ \underline{\underline{\text{grad } \underline{v}}} \right] = \begin{pmatrix} \cancel{\frac{\partial v_r}{\partial r}} & \frac{1}{r} \left( \cancel{\frac{\partial v_r}{\partial \theta}} - v_\theta \right) & \cancel{\frac{\partial v_r}{\partial z}} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left( \cancel{\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}} + \cancel{v_r} \right) & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \cancel{\frac{\partial v_z}{\partial r}} & \frac{1}{r} \cancel{\frac{\partial v_z}{\partial \theta}} & \cancel{\frac{\partial v_z}{\partial z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{v_\theta}{r} & 0 \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & 0 & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega \left( \frac{z}{h} - 1 \right) & 0 \\ \Omega \left( 1 - \frac{z}{h} \right) & 0 & -\frac{r\Omega}{h} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit donc le tenseur de cisaillement, tous calculs faits :

$$[\underline{\underline{\tau}}] = \mu \left( \begin{pmatrix} 0 & \Omega\left(\frac{z}{h}-1\right) & 0 \\ \Omega\left(1-\frac{z}{h}\right) & 0 & \frac{-r\Omega}{h} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \Omega\left(1-\frac{z}{h}\right) & 0 \\ \Omega\left(\frac{z}{h}-1\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-r\Omega}{h} & 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{-\mu r \Omega}{h} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le champ de contraintes au niveau de la surface supérieure est donc :

$$\underline{\underline{\sigma}}(z=0) = \underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tau}} = -p\underline{\underline{I}} - \frac{\mu r \Omega}{h} (\underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z)$$

**1) Surface latérale : déterminer le couple résistant au niveau du volant en raison du frottement fluide.**

Pour cette surface, on a calculé dans la première partie du TD le champ de contraintes :

$$\underline{\underline{\sigma}}(r = R_{\text{int}}) = -p\underline{\underline{I}} - \mu \frac{2A}{R_{\text{int}}^2} (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r)$$

avec A une constante qui dépend linéairement de la vitesse de rotation

Le milieu fluide considéré a pour normale sortante  $-\underline{e}_r$  au contact avec le volant.

Chacun des vecteurs-contraintes au niveau de la surface latérale crée un couple élémentaire qui s'écrit :

$$\begin{aligned} d\mathcal{C}_{S_{\text{lat}}/\text{fluide}} &= R_{\text{int}} \underline{e}_r \wedge \underline{t}(r = R_{\text{int}}, -\underline{e}_r) \\ d\mathcal{C}_{S_{\text{lat}}/\text{fluide}} &= R_{\text{int}} \underline{e}_r \wedge (\underline{\underline{\sigma}}(r = R_{\text{int}}) \cdot -\underline{e}_r) \\ d\mathcal{C}_{S_{\text{lat}}/\text{fluide}} &= R_{\text{int}} \underline{e}_r \wedge (-\sigma_{rr}(r = R_{\text{int}}) \underline{e}_r - \sigma_{\theta r}(r = R_{\text{int}}) \underline{e}_\theta - \sigma_{zr}(r = R_{\text{int}}) \underline{e}_z) \\ d\mathcal{C}_{S_{\text{lat}}/\text{fluide}} &= -\sigma_{\theta r}(r = R_{\text{int}}) R_{\text{int}} \underline{e}_z + \cancel{\sigma_{zr}(r = R_{\text{int}}) R_{\text{int}} \underline{e}_\theta} \\ d\mathcal{C}_{S_{\text{lat}}/\text{fluide}} &= -\sigma_{\theta r}(r = R_{\text{int}}) R_{\text{int}} \underline{e}_z \end{aligned}$$

On constate alors que le calcul de la pression n'était pas nécessaire à l'écriture de ces couples élémentaires. Pour obtenir le couple total résistant sur la surface latérale, il suffit d'intégrer ces couples élémentaires sur la surface latérale :

$$\mathcal{C}_{S_{\text{lat}}/\text{fluide}} = \int_{S_{\text{lat}}} -\sigma_{\theta r}(r = R_{\text{int}}) R_{\text{int}} dS = \int_0^H \int_0^{2\pi} \mu \frac{2A}{R_{\text{int}}^2} R_{\text{int}} \times R_{\text{int}} d\theta dz = 4\mu A\pi H$$

La constante  $A(\Omega)$  est linéairement dépendante de la vitesse de rotation, et on constate que le couple résistant l'est aussi.

Ceci correspond au couple exercé par le volant d'inertie sur le fluide : si on veut calculer le couple résistant (couple exercé par le fluide sur le volant) : il s'agit donc de changer le signe :

$$\mathcal{C}_{\text{fluide}/\text{paroi latérale}} = -\mathcal{C}_{S_{\text{lat}}/\text{fluide}} = -4\mu A\pi H$$



## 2) Surface supérieure : déterminer le couple résistant au niveau du volant en raison du frottement fluide.

Pour cette surface, on a calculé dans la première partie du TD le champ de contraintes :

$$\underline{\underline{\sigma}}(z=0) = -p\underline{\underline{I}} - \frac{\mu r \Omega}{h} (\underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z)$$

La normale sortante au fluide au niveau de la surface supérieure est  $-\underline{e}_z$ .

Chacun des vecteurs-contraintes au niveau de la surface supérieure crée donc un couple élémentaire de la paroi sur le fluide qui s'écrit :

$$\begin{aligned} d\underline{\underline{\mathcal{C}}}_{\text{Sup}/\text{fluide}} &= r\underline{e}_r \wedge \underline{t}(z=0, -\underline{e}_z) \\ d\underline{\underline{\mathcal{C}}}_{\text{Sup}/\text{fluide}} &= r\underline{e}_r \wedge (\underline{\underline{\sigma}}(z=0) \cdot -\underline{e}_z) \\ d\underline{\underline{\mathcal{C}}}_{\text{Sup}/\text{fluide}} &= r\underline{e}_r \wedge (-\sigma_{rz}(z=0)\underline{e}_r - \sigma_{\theta z}(z=0)\underline{e}_\theta - \sigma_{zz}(z=0)\underline{e}_z) \\ d\underline{\underline{\mathcal{C}}}_{\text{Sup}/\text{fluide}} &= -\sigma_{\theta z}(z=0)r\underline{e}_z + \sigma_{zz}(z=0)r\underline{e}_\theta \end{aligned}$$

Le couple résistant qu'il s'agit de calculer ici concerne la composante  $\underline{e}_z$  (Pour calculer la composante sur  $\underline{e}_\theta$  il faudrait au préalable identifier le champ de pression)

Pour obtenir le couple total, il suffit d'intégrer ces couples élémentaires sur la surface supérieure :

$$\underline{\underline{\mathcal{C}}}_{\text{Sup}/\text{fluide}} = \int_{S_{\text{sup}}} -\sigma_{\theta z}(z=0) r dS = \int_{S_{\text{sup}}} \frac{\mu r \Omega}{h} r dS = \frac{\mu \Omega}{h} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_{\text{int}}} r^3 d\theta dr = \frac{\pi \mu \Omega R_{\text{int}}^4}{2h}$$

Ce nouveau couple est également linéairement dépendant de la vitesse de rotation.

Ceci correspond au couple exercé par le volant d'inertie sur le fluide : si on veut calculer le couple résistant (couple exercé par le fluide sur le volant) : il s'agit donc de changer le signe :

$$\underline{\underline{\mathcal{C}}}_{\text{fluide}/\text{paroi supérieure}} = -\underline{\underline{\mathcal{C}}}_{\text{Sup}/\text{fluide}} = -\frac{\pi \mu \Omega R_{\text{int}}^4}{2h}$$

## 3) En considérant le volant indéformable , déduire l'accélération angulaire du volant d'inertie lors de l'application du couple moteur $\mathcal{C}$ .

Le théorème du moment cinétique s'écrit :

$$\ddot{\theta} I_{0z} = \sum_i \mathfrak{M}_{Oz}(\underline{F}^{(i)})$$

Ici,  $\ddot{\theta} = \dot{\Omega}$  correspond à l'accélération angulaire,  $I_{0z} = \int r^2 dm$  correspond au moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation, et le terme  $\sum_i \mathfrak{M}_{Oz}(\underline{F}^{(i)})$  correspond à la somme des couples appliqués au système.

Dans le cas d'un cylindre plein, le moment d'inertie s'écrit  $I_{0z} = \frac{1}{2} \rho \pi R_{\text{int}}^4 H$

Les différents couples appliqués au volant d'inertie sont :

- le couple moteur appliqué au volant d'inertie  $\underline{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \underline{e}_z$
- le couple résistant dû à la surface latérale  $\mathcal{C}_{\text{fluide/paroi latérale}} = -4\mu A \pi H$
- les couples résistants dus aux surface supérieures et inférieures :

$$2 \times \mathcal{C}_{\text{fluide/paroi supérieure}} = -\frac{\pi \mu \Omega R_{\text{int}}^4}{h}$$

Par conséquent on a :

$$\dot{\Omega} = \frac{\sum_i \mathfrak{M}_{Oz}}{I_{0z}} = \frac{2(\mathcal{C} + \mathcal{C}_{\text{fluide/paroi latérale}} + 2 \times \mathcal{C}_{\text{fluide/paroi supérieure}})}{\rho \pi R_{\text{int}}^4 H} = \frac{2\left(\mathcal{C} - 4\mu A \pi H - \frac{\pi \mu \Omega R_{\text{int}}^4}{h}\right)}{\rho \pi R_{\text{int}}^4 H}$$

On peut donc prédire l'accélération angulaire du volant d'inertie.

Quelques remarques de fin :

- on a considéré le fluide incompressible ici : en général, le fluide en question est de l'air, qui est loin d'être incompressible !!
- on a considéré également le solide comme indéformable. C'est loin d'être le cas (annale de janvier 2019) : le volant se déforme évidemment, et peut vite atteindre sa limite d'élasticité s'il tourne trop vite !!