

Corrigé de l'épreuve de Seconde chance du 31 janvier
Durée : 2h

Sont interdits : Documents, calculatrices, ordinateurs, téléphones (voire plus, à la discrétion des enseignants).

Les correcteurs seront attentifs au soin et à la qualité de la rédaction

Exercice 1. Calculez les intégrales suivantes :

$$\text{(a)} \int_0^1 \frac{1-x}{x^2-5x+6} dx, \text{ (b)} \int_0^1 (x^2-1)e^{2x} dx$$

$$\text{(c)} \int_4^5 \frac{dx}{x^2+2x+17}, \text{ (d)} \int_1^2 \frac{\ln u}{u} du$$

Solution : $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$ donc il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{1-x}{x^2-5x+6} = \frac{1-x}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3) + B(x-2)}{(x-2)(x-3)} = \frac{(A+B)x - 3A - 2B}{(x-2)(x-3)}$$

et donc $A+B = -1$ et $-3A-2B = 1$, puis $A = 1$ et $B = -2$. Donc

$$\int_0^1 \frac{1-x}{x^2-5x+6} dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{x-2} + \frac{-2}{x-3} \right) dx = [\ln|x-2| - 2\ln|x-3|]_0^1 = -3\ln 2 + 2\ln 3$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x^2-1)e^{2x} dx &= \int_0^1 (x^2-1)(e^{2x}/2)' dx = [(x^2-1)e^{2x}/2]_0^1 - \int_0^1 2xe^{2x}/2 dx \\ &= 1/2 - \int_0^1 xe^{2x} dx = 1 - \int_0^1 x(e^{2x}/2)' dx \\ &= 1/2 - ([xe^{2x}/2]_0^1 - \int_0^1 e^{2x}/2 dx) \\ &= 1/2 - (e^2/2 - (e^2-1)/4) = 1/2 - e^2/2 + (e^2-1)/4 = \frac{1}{4} - \frac{e^2}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_4^5 \frac{dx}{x^2+2x+17} &= \int_{x=4}^{x=5} \frac{dx}{(x+1)^2+16} = \int_{y=5}^{y=6} \frac{dy}{y^2+16} \text{ avec } y = x+1 \\ &= \int_{z=5/4}^{z=6/4} \frac{4dz}{16z^2+16} \text{ avec } y = 4z \\ &= [\frac{1}{4} \arctan z]_{5/4}^{6/4} = \frac{1}{4} \left(\arctan \frac{3}{2} - \arctan \frac{5}{4} \right) \end{aligned}$$

Exercice 2. Effectuez la résolution des équations différentielles suivantes :

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} + tx = 3t - t^2 - 1, \\ x(0) = 2 \end{array} \right\}$$

Solution : Equation homogène : $x_H' + tx_H = 0$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x_H(t) = \lambda e^{-t^2/2}$ pour tout t .

Solution particulière sous forme de polynôme : une constante ne marche pas, on essaie $x_p(t) = at + b$ qui est solution si $a + t(at + b) = at^2 + bt + a = 3t - t^2 - 1$ donc $a = -1$ et $b = 3$, puis $x_p(t) = 3 - t$ pour tout t .

Solution générale : $x(t) = x_H(t) + x_p(t) = \lambda e^{-t^2/2} + 3 - t$. Avec $x(0) = 2$, on a $\lambda = -1$ puis $x(t) = -e^{-t^2/2} + 3 - t$ pour tout t .

$$, \text{ (b) } \left\{ y'(t) + \cos(t)y(t) = e^{-\sin(t)} \right\},$$

Solution : Equation homogène : $y'_h(t) + \cos(t)y_h(t) = 0$, on a $-\cos = \sin'$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_h(t) = \lambda e^{-\sin(t)}$ pour tout t .

Solution particulière par la var de la constante : $y_p(t) = \lambda(t)e^{-\sin(t)}$, ce qui donne

$$y'_p + \cos y_p = \lambda' e^{-\sin} = e^{-\sin}$$

donc $\lambda' = 1$ puis $\lambda(t) = t$ convient, puis $y_p(t) = te^{-\sin(t)}$.

Solution générale : $y(t) = y_h(t) + y_p(t) = \lambda e^{-\sin(t)} + te^{-\sin(t)}$.

$$\text{(c)} \left\{ \begin{array}{l} y'' - 4y' + 13y = 0, \\ y(\pi) = e^{2\pi}, \\ y'(\pi) = 0 \end{array} \right\}$$

Solution : equation caractéristique $r^2 - 4r + 13 = 0$, les racine complexes sont $2 \pm 3i$, donc

$$y(x) = e^{2x}(A \sin(3x) + B \cos(3x))$$

avec les conditions initiales, $e^{2\pi} = y(\pi) = e^{2\pi} \times (-B)$ donc $B = -1$. Et

$$0 = y'(\pi) = 2e^{2\pi}(A \sin(3x) + B \cos(3x)) + e^{2\pi}(3A \cos(3x) - 3B \sin(3x)) = 2e^{2\pi} \times (-B) - 3Ae^{2\pi}$$

donc $A = 2/3$, ce qui donne

$$y(x) = e^{2x} \left(\frac{2}{3} \sin(3x) - \cos(3x) \right)$$

Exercice 3. Déterminez les limites suivantes :

$$\text{(a)} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x)}{x - \pi}$$

Solution : avec $f(x) = \sin x$, on a

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x)}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = f'(\pi) = \cos(\pi) = -1$$

$$, \text{ (b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} \right) - x,$$

Solution : pour $x > 0$, on a

$$\left(\sqrt{x^2 + x} \right) - x = \frac{\left(\sqrt{x^2 + x} \right)^2 - x^2}{\left(\sqrt{x^2 + x} \right) + x} = \frac{x}{\left(\sqrt{x^2 + x} \right) + x} = \frac{1}{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right) + 1}$$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} \right) - x = 1/2$.

$$\text{(c)} \text{ limites en } +\infty \text{ et } -\infty \text{ de } x \mapsto \frac{3e^{2x} - x^3}{5x^2 + e^{2x} + 1}.$$

Solution : En $+\infty$, c'est l'exponentielle qui va dominer :

$$\frac{3e^{2x} - x^3}{5x^2 + e^{2x} + 1} = \frac{e^{2x}(3 - x^3e^{-2x})}{e^{2x}(5x^2e^{-2x} + 1 + e^{-2x})} = \frac{(3 - x^3e^{-2x})}{(5x^2e^{-2x} + 1 + e^{-2x})} \rightarrow \frac{3}{1} \text{ quand } x \rightarrow +\infty.$$

En $-\infty$, ce sont les polynômes qui vont dominer :

$$\frac{3e^{2x} - x^3}{5x^2 + e^{2x} + 1} = \frac{-x^3(-3e^{2x}/x^3 + 1)}{x^2(5 + e^{2x}/x^2 + 1/x^2)} = (-x) \times \frac{(-3e^{2x}/x^3 + 1)}{(5 + e^{2x}/x^2 + 1/x^2)} \rightarrow +\infty \text{ quand } x \rightarrow -\infty$$

Exercice 4. En utilisant la représentation complexe, linéarisez $(\sin(2x))^3$.

Solution :

$$\begin{aligned} (\sin(2x))^3 &= \left(\frac{e^{2ix} - e^{-2ix}}{2i} \right)^3 = \frac{e^{6ix} - 3e^{4ix}e^{-2ix} + 3e^{2ix}e^{-4ix} - e^{-6ix}}{8i^3} \\ &= \frac{e^{6ix} - e^{-6ix} - 3(e^{2ix} - e^{-2ix})}{-8i} = \frac{2i \sin(6x) - 6i \sin(2x)}{-8i} \\ &= \frac{\sin(6x) - 3 \sin(2x)}{-4} = \frac{-\sin(6x) + 3 \sin(2x)}{4} \end{aligned}$$

Exercice 5. Tableau de variations et graphe de la fonction

$$x \mapsto |x^2 - x - 2| + x + 1$$

Solution : $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$. C'est > 0 en dehors des racines, et < 0 sinon. Du coup :

Si $x < -1$: on a $f(x) = (x^2 - x - 2) + x + 1 = x^2 - 1$, $f'(x) = 2x < 0$ donc décroissante, $f(-1) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

Si $-1 < x < 2$: on a $f(x) = -(x^2 - x - 2) + x + 1 = -x^2 + 2x + 3$, $f'(x) = -2x + 2$ donc croissante sur $[-1, 1]$ avec $f(1) = 4$, et décroissante sur $[1, 2]$ avec $f(2) = 3$.

Si $x > 2$: on a $f(x) = (x^2 - x - 2) + x + 1 = x^2 - 1$, $f'(x) = 2x > 0$ donc croissante, $f(2) = 3$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 6. Dérivez deux fois $x \mapsto \cos(x^2)$ et $x \mapsto e^x \sin(3x)$.

Solution :

$$(\cos(x^2))'' = (-2x \sin(x^2))' = -2 \sin(x^2) - 4x^2 \cos(x^2)$$

$$\begin{aligned} (e^x \sin(3x))'' &= (e^x \sin(3x) + 3e^x \cos(3x))' = e^x \sin(3x) + 3e^x \cos(3x) + 3e^x \cos(3x) - 9e^x \sin(3x) \\ &= -8e^x \sin(3x) + 6e^x \cos(3x) \end{aligned}$$

Exercice 7. On se donne $\alpha > 0$. Le but de cet exercice est de démontrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0$ (on ne pourra donc naturellement pas l'utiliser dans cet exercice). On pose $\beta = \frac{\alpha}{2}$ et la fonction

$$\begin{cases} f :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^\beta \ln x \end{cases}$$

(1) Calculez la dérivée de f .

$$\text{Solution : } f'(x) = \beta x^{\beta-1} \ln x + x^{\beta-1} = x^{\beta-1}(\beta \ln x + 1).$$

(2) En étudiant les variations de f sur $]0, 1]$, montrez qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$0 > x^\beta \ln x \geq C \text{ pour tout } x \in]0, 1].$$

Solution : Pour $0 < x < e^{-1/\beta}$, on a $f'(x) < 0$ donc f décroissante. Pour $e^{-1/\beta} < x < 1$, on a $f'(x) > 0$ donc f croissante. Donc pour $x \in]0, 1]$, on a $f(x) \geq f(e^{-1/\beta})$. On pose alors $C = f(e^{-1/\beta})$. Pour $0 < x \leq 1$, on a $\ln x \leq 0$. L'inégalité est prouvée.

(3) Montrez que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0$.

Solution : En multipliant par x^β , on a

$$0 > x^{2\beta} \ln x \geq Cx^\beta \text{ pour tout } x \in]0, 1].$$

à la limite $x \rightarrow 0$ et en utilisant $2\beta = \alpha$, on a le résultat.