

Seconde chance du 31 janvier

Durée : 2h

Sont interdits : Documents, calculatrices, ordinateurs, téléphones (voire plus, à la discrétion des enseignants).

Les correcteurs seront attentifs au soin et à la qualité de la rédaction

Exercice 1. Calculez les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} \text{(a)} \int_0^1 \frac{1-x}{x^2-5x+6} dx, \quad \text{(b)} \int_0^1 (x^2-1)e^{2x} dx \\ \text{(c)} \int_4^5 \frac{dx}{x^2+2x+17}, \quad \text{(d)} \int_1^2 \frac{\ln u}{u} du \end{aligned}$$

Exercice 2. Effectuez la résolution des équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned} \text{(a)} \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} + tx = 3t - t^2 - 1, \\ x(0) = 2 \end{array} \right\}, \quad \text{(b)} \left\{ \begin{array}{l} y'(t) + \cos(t)y(t) = e^{-\sin(t)} \end{array} \right\}, \\ \text{(c)} \left\{ \begin{array}{l} y'' - 4y' + 13y = 0, \\ y(\pi) = e^{2\pi}, \\ y'(\pi) = 0 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Exercice 3. Déterminez les limites suivantes :

$$\begin{aligned} \text{(a)} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x)}{x - \pi}, \quad \text{(b)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} \right) - x, \\ \text{(c)} \text{limites en } +\infty \text{ et } -\infty \text{ de } x \mapsto \frac{3e^{2x} - x^3}{5x^2 + e^{2x} + 1}. \end{aligned}$$

Exercice 4. En utilisant la représentation complexe, linéarisez $(\sin(2x))^3$.

Exercice 5. Tableau de variations et graphe de la fonction

$$x \mapsto |x^2 - x - 2| + x + 1$$

Exercice 6. Dérivez deux fois $x \mapsto \cos(x^2)$ et $x \mapsto e^x \sin(3x)$.

Exercice 7. On se donne $\alpha > 0$. Le but de cet exercice est de démontrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0$ (on ne pourra donc naturellement pas l'utiliser dans cet exercice). On pose $\beta = \frac{\alpha}{2}$ et la fonction

$$\left\{ \begin{array}{ll} f :]0, 1] & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^\beta \ln x \end{array} \right.$$

- (1) Calculez la dérivée de f .
- (2) En étudiant les variations de f sur $]0, 1]$, montrez qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $0 > x^\beta \ln x \geq C$ pour tout $x \in]0, 1]$.
- (3) Montrez que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0$.