

Premier montage :

La tension entre neutre est nulle :

$$\bar{V}_{NN'} = \bar{E} - (R + jX)\bar{I} = a^2\bar{E} - (R + jX)a^2\bar{I} = a\bar{E} - a(R + jX)\bar{I}$$

En additionnant les trois branches on trouve :

$$3\bar{V}_{NN'} = (1 + a^2 + a)(\bar{E} - (R + jX)\bar{I}) = 0$$

Nous avons donc :

$$\bar{E} = (R + jX)\bar{I}$$

La puissance apparente de la source est :

$$\bar{S}_s = 3\bar{E}\bar{I}^* = 3\frac{|\bar{E}|^2}{R - jX} = 3|\bar{E}|^2\frac{R + jX}{R^2 + X^2} = 3 \cdot 230^2 \frac{10 + 10j}{10^2 + 10^2} \simeq 7935(1 + j)VA$$

La puissance apparente de la charge est :

$$\bar{S}_c = 3\bar{V}\bar{I}^* = 3R|\bar{I}|^2 = 3|\bar{E}|^2\frac{R}{R^2 + X^2} = \Re(\bar{S}_s) = 7935$$

Deuxième montage :

En notant $\bar{U}$ la tension de ligne aux bornes de la charge R , et $\bar{J}$ le courant dans la charge, la maille 1-2 donne :

$$\bar{E}(1 - a^2) - jX\bar{I}(1 - a^2) = \bar{U} = R\bar{J}$$

et avec la loi aux noeuds sur la phase 1 de la charge :

$$\bar{J}(1 - a) = \bar{I}$$

Il vient donc :

$$\bar{E} - jX\bar{I} = R\frac{\bar{J}}{1 - a^2} = R\frac{\bar{I}}{(1 - a^2)(1 - a)} = \frac{R}{3}\bar{I}$$

Nous voyons donc que le passage triangle étoile triple la puissance a charge donnée et il faut diviser l'impédance par 3 pour trouver l'impédance étoile équivalente. Ainsi il suffit de remplacer R par $R/3$ dans ce qui précède pour trouver les puissances. La puissance apparente de la source est :

$$\bar{S}_s = 3\bar{E}\bar{I}^* = 3\frac{|\bar{E}|^2}{R/3 - jX} = 3|\bar{E}|^2\frac{R/3 + jX}{(R/3)^2 + X^2} = 3 \cdot 230^2 \frac{10/3 + 10j}{(10/3)^2 + 10^2} \simeq 4800 + 14000jVA$$

La puissance apparente de la charge est :

$$\bar{S}_c = 3\bar{V}\bar{I}^* = 3R/3|\bar{I}|^2 = 3|\bar{E}|^2\frac{R/3}{(R/3)^2 + X^2} = \Re(\bar{S}_s) = 4800$$

Troisième montage :

Les équations précédentes sont identiques si l'on remplace $1/R$ par $Y = 1/R + jC\omega$. Ainsi, en notant $\bar{U}$ la tension de ligne aux bornes de la charge R , et $\bar{J}$ le courant dans la charge, la maille 1-2 donne :

$$\bar{E}(1 - a^2) - jX\bar{I}(1 - a^2) = \bar{U} = \frac{\bar{J}}{\bar{Y}}$$

$$\bar{J}(1 - a) = \bar{I}$$

Il vient donc :

$$\bar{E} - jX\bar{I} = \frac{\bar{J}}{\bar{Y}(1 - a^2)} = \frac{\bar{I}}{\bar{Y}(1 - a^2)(1 - a)} = \frac{1}{3\bar{Y}}\bar{I}$$

Le courant s'exprime comme :

$$\bar{I} = \frac{3\bar{Y}\bar{E}}{1 + 3jX\bar{Y}}$$

La puissance apparente de la source est :

$$\bar{S}_s = 3\bar{E}\bar{I}^* = 9|\bar{E}|^2 \left(\frac{\bar{Y}}{1 + 3jX\bar{Y}} \right)^* = 9|\bar{E}|^2 \left(\frac{1/R - jC\omega}{1 - 3XC\omega - j3X/R} \right) = 3700 + j18400$$

La puissance apparente de la charge est :

$$\bar{S}_c = 3\bar{V}\bar{J}^* = 3\frac{|\bar{J}|^2}{\bar{Y}} = \frac{|\bar{I}|^2}{\bar{Y}} = 9|\bar{E}|^2 \frac{\bar{Y}^*}{|1 + 3jX\bar{Y}|^2} = 3700(1 - j)$$