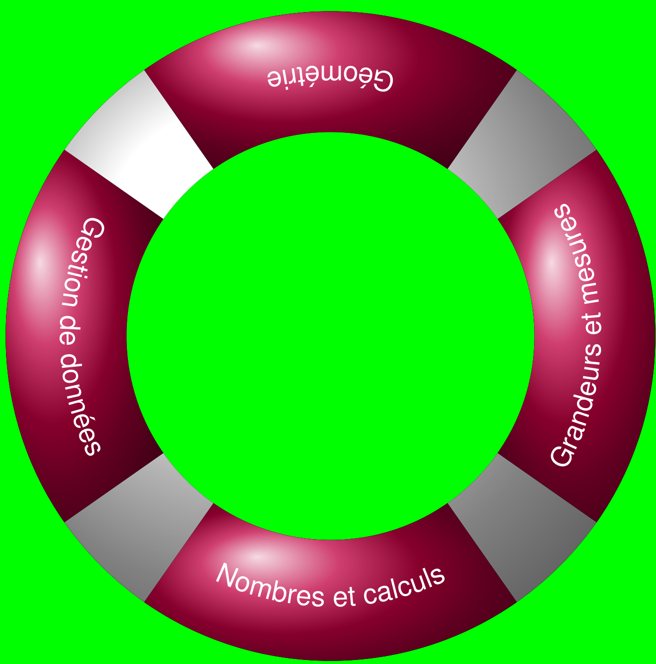
K*i*T

de survie pour le CRPE

Tome 1 : préparation à l'écrit



Nathalie Daval
INSPE Montpellier
2022-2023

Ce manuel est à destination des AED et AESH de l'académie de Montpellier, inscrits à la préparation au concours de professeur des écoles, dans le cadre de la formation proposée par la DAFPEN et préparée à la FDE.

Cette version de 2022-2023 a été écrite avec LaTeX et la classe sesamanuel distribuée librement par l'association Sesamath. Si vous y trouvez des coquilles ou erreurs, merci de me les signaler à l'adresse suivante :
nathalie.daval@umontpellier.fr

Le tome 1 propose 15 thèmes préparant l'épreuve écrite de mathématiques du concours CRPE (admissibilité).
Chaque thème est composé du cours et d'exercices corrigés suivant la trame suivante :

– **Un peu d'histoire** : quelques remarques historiques concernant la notion.

– **Cours** : l'essentiel du cours à connaître.

– **Vu au CRPE 2022** : d'éventuels exercices corrigés issus du concours de 2022, groupements 1, 2 et 3.

– *Maîtriser les bases avec* MathenPoche : on trouve sur ce site du cours, des exercices interactifs, des QCM et des devoirs niveau collège.

– **Entraînement** : des exercices corrigés reprenant les bases du cours ainsi que des exercices ou parties d'exercices issus du CRPE pour approfondir les notions et se préparer aux exercices type concours.

Pour information, voilà une petite étude statistique sur le nombre de questions posées à la session 2022 (certaines pouvant figurer dans plusieurs catégories) pour les 4 groupements en fonction des thèmes (chapitres de ce kit).

Chapitres	N1	N2	N3	N4	D5	D6	D7	D8	G9	G10	G11	G12	M13	M14	P15
Questions	8	13	15	0	22	21	19	4	1	4	3	0	11	22	20
Pourcentages	5	8	9	0	13	13	12	2	1	2	2	0	7	13	12

On remarque que les notions très souvent abordées sont les fonctions, la proportionnalité, les probabilités, scratch, en plus des aires, volumes et de la vitesse. En revanche, on note l'absence de l'arithmétique pour cette session, et peu de géométrie.

Bon courage à tous pour la session 2023 !!!

Sommaire des réjouissances du tome 1 !

NOMBRES ET CALCULS

ORGANISATION ET GESTION DE DONNÉES

GÉOMÉTRIE

GRANDEURS ET MESURES

NUMÉRIQUE

NOMBRES & CALCULS

1

Numérations et bases

La princesse Néfertiabet devant son repas. Musée du Louvre, Christian Décamps

Un peu d'histoire

Le système de numération que nous employons actuellement et qui nous semble si naturel est le fruit d'une longue évolution des concepts mathématiques. En effet, un nombre est une entité abstraite qui peut surprendre : on a déjà vu *un* élève, *un* animal donné, on sait ce qu'est *un* jour de congé, mais qu'est-ce que *un* ? C'est une entité qui, prise seule, n'a pas vraiment de sens. De nombreuses civilisations ont imaginé des systèmes de numération plus ou moins compliqués, plus ou moins pratiques : le plus ancien système semble avoir vu le jour en Mésopotamie dès le IVe siècle avant J.-C. Après avoir expérimenté des systèmes utilisant des bases et des principes différents, le système de numération positionnel de base dix est maintenant utilisé de manière universelle.

Cours

1. Différents types de numération

DÉFINITION : Numération

On appelle **numération**, tout code permettant de représenter un nombre.

Une numération peut être gestuelle, écrite ou orale et ne se limite pas à un ensemble de signes (le vocabulaire), elle fonctionne avec des règles d'agencement de ces signes (la grammaire). Il existe de nombreux systèmes de numération, chacun lié à une ou plusieurs grandes civilisations.
Il existe trois familles principales de systèmes de numération : **additif, hybride et positionnel**.

A. Deux exemples de système additif : les égyptiens et les romains

Pendant probablement plus de 3 600 ans, les Égyptiens ont utilisé des hiéroglyphes pour écrire. La plus ancienne inscription a été découverte en 1992 et est datée d'environ $-3\,200$ av. J.-C. L'écriture hiéroglyphique a été déchiffrée à partir de 1821 par Jean-François **Champollion** grâce à la pierre de Rosette.
Dans cette numération, chaque symbole renvoie à une quantité toujours identique et ceci indépendamment de la position qu'il occupe dans l'écriture du nombre. Le nombre codé est obtenu par addition de toutes les quantités représentées par les différents chiffres. Les signes utilisés par ce système sont indiqués dans le tableau ci-dessous :

hiéroglyphe	nom	valeur	mnémonique
𓏺	trait	1	un bâton représentant l'unité
𓎆	pont	10	l'anse d'un panier qui contient environ 10 objets
𓍢	escargot	100	un rouleau de papyrus car on peut y écrire environ 100 hiéroglyphes
𓆼	lotus	1 000	une fleur de lotus car on les trouve par milliers
𓂭	index	10 000	un doigt montrant le ciel étoilé car on y voit près de 10 000 étoiles
𓆐	têtard	100 000	un têtard car on en trouve environ 100 000 après la ponte
𓁨	dieu	1 000 000	un dieu agenouillé supportant la voute céleste car le dieu est éternel et un million d'années c'est l'éternité (!)

Pour écrire les nombres, on juxtapose simplement autant de signes élémentaires que nécessaire. Il s'agit d'un **système additif** utilisant les groupements-échanges par 10 : on ne trouve jamais, dans l'écriture finale d'un nombre, plus de neuf signes identiques.

Exemple

1) ∩|| et ||∩ et |∩| sont trois écritures différentes du nombre 12 ($10 + 1 + 1$).
2) 𓆼 ∩∩∩∩∩∩∩ |||||| représente $1 \times 1\,000 + 7 \times 10 + 6 \times 1 = 1\,076$.

À l'heure actuelle, nous utilisons encore (un peu) le système romain, par exemple pour le nom des rois, l'écriture des siècles et les numérotations de chapitres. Les signes utilisés sont indiqués dans le tableau ci-dessous :

chiffre	valeur	provenance possible
I	1	une marque verticale
V	5	représente la main ouverte
X	10	réunion de deux mains ouvertes
L	50	moitié inférieure de l'étoile à six branches, représentant cent. La lettre ψ évoluera vers le L
C	100	X et I superposés (étoile à six branches), transformé en ⊐|⊏, puis abrégé en C, initiale de *centum*
D	500	la moitié de 1 000, écrit ↀ
M	1 000	X entouré, écrit comme phi ϕ, devenu ↀ, et enfin confondu avec M, initiale de *milia*

Au Moyen Âge où il est utilisé, ce système utilise le groupement par dix et un groupement auxiliaires par cinq. Il s'agit d'un système **additif**, mais aussi **soustractif** permettent des écritures plus courtes.

Principes : Numération romaine

- Principe additif : tout signe placé à la droite d'un autre signe représentant une valeur supérieure ou égale à la sienne s'ajoute à celui-ci.
- Principe soustractif : tout signe placé à la gauche d'un autre signe représentant une valeur supérieure à la sienne doit être soustrait du nombre indiqué à droite.
  Seuls les signes I, X et C peuvent être soustraits, et ce seulement pour des valeurs 10 fois supérieures au maximum.
- La même lettre ne peut pas être employée quatre fois consécutivement sauf pour le signe représentant 1000 : M.
- Les valeurs sont groupées en ordre décroissant, sauf pour les valeurs à retrancher.

Exemple

1) Procédé additif : MMXV représente $1\,000 + 1\,000 + 10 + 5 = 2\,015$.
2) Procédé soustractif : CM représente $1\,000 - 100 = 900$.
3) Combinaison : DCXCIX représente $500 + 100 + (100 - 10) + (10 - 1) = 699$.
4) 999 n'est pas représenté par IM mais par CMXCIX car on ne peut pas ôter 1 de 1 000 !

Le système est vite limité pour écrire des grands nombres (supérieurs à 4 999). Plus tard, les romains ajouteront une barre au dessus des signes multipliant par 1 000 leur valeur initiale.

B. Un exemple de sytème hybride : les chinois

Dès le début de notre ère, les chinois disposent du système de notation de nombres qu'ils utilisent encore aujourd'hui. Ils ont neuf caractères pour les unités de un à neuf et un caractère pour chacune des puissances de dix. Ils utilisent des classes d'amplitude 1 000. C'est un système sans irrégularités, contrairement au nôtre !

> **Exemple** En chinois, le nombre 71 755 875 s'écrit 7175 5875 et se lit :
> « sept mille un cent sept dix cinq dix mille - cinq mille huit cent sept dix cinq ».

C'est un **système hybride** de base 10 dont les nombres sont représentés par addition de multiples de puissances de la base. Les signes chinois sont ceux du tableau ci-dessous et les nombres s'écrivent de haut en bas.

signe	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	百	千	万
valeur	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100	1 000	10 000

> **Exemple** 28 s'écrit 二
十
八 et 4 092 s'écrit 四
千
九
十
二

C. Un exemple de système positionnel : le babyloniens

Les Babyloniens ont utilisé de nombreuses bases différentes. Nous nous intéresserons ici à un système très élaboré à base 60 (voir §2.), qui leur a servi pour les tables astronomiques. Notre propre calcul du temps en heures, minutes, secondes, et notre calcul des angles en degrés sont des vestiges de ce système vieux de quatre mille ans.
Le système babylonien est un **système positionnel** de base 60 (système sexagésimal) et de base secondaire 10, et il est additif pour les nombres inférieurs à 60. Chacun des chiffres est écrit au moyen de seulement deux signes : le clou 𒁹 valant 1 et le chevron 𒌋 valant 10. Le tableau suivant montre comment étaient écrits quelques chiffres.

signe	𒁹	𒁹𒁹	𒁹𒁹𒁹	...	𒌋	𒌋𒁹	𒌋𒁹𒁹	...	𒌋𒌋𒌋𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹
valeur	1	2	3	...	10	11	12	...	59

> **Exemple** Pour écrire 10 000 en babylonien, on effectue les divisions euclidiennes par 60 :
>
> $$\begin{array}{r|l} 10000 & 60 \\ \hline 40 & 166 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 166 & 60 \\ \hline 46 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 60 \\ \hline 2 & 0 \end{array}$$
>
> Puis on écrit de droite à gauche les restes successifs des divisions : 2 46 40, que l'on « transcrit » en babylonien : 𒁹𒁹 𒌋𒌋𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹 𒌋𒌋𒌋𒌋
> On peut également décomposer 10 000 selon les puissances décroissantes de 60 :
> $10\,000 = 2 \times 60^2 + 46 \times 60 + 40.$

Remarque : dans un premier temps, les mésopotamiens ne possédaient pas le zéro, ce nombre pouvait donc aussi représenter $2 \times 60^3 + 46 \times 60 + 40 = 434\ 800$. C'était alors le contexte qui renseignait l'ordre du nombre !

2. Les bases

A. Notre système de numération

La notation positionnelle est un procédé d'écriture des nombres, dans lequel chaque position d'un chiffre ou symbole est reliée à la position voisine par un multiplicateur, appelé base du système de numération. Chaque position peut être renseignée par un symbole (notation sans base auxiliaire) ou par un nombre fini de symboles (notation avec base auxiliaire).

Notre système de numération est un système positionnel de base dix sans base auxiliaire et il est composé de dix chiffres indo-arabes (chiffres venus de l'Inde, mais utilisés et dispersés par les arabes).

Exemple

1) Dans l'écriture de 37, le chiffre 3 correspond à la quantité trente ;
2) dans l'écriture de 73, le chiffre 3 correspond à la quantité trois ;
3) dans l'écriture de 307, le chiffre 3 correspond à la quantité trois cents. Le 0 exprime l'absence de dizaine.

MÉTHODE 1 Notation « usuelle » des nombres en base 10

Dans les exercices du CRPE, il est souvent demandé de travailler avec les chiffres d'un nombre.
Par exemple, la notation usuelle pour écrire un nombre N à trois chiffre est $N = \overline{cdu}$ avec c le chiffre des centaines, d celui des dizaines et u celui des unités.
Sa valeur est alors $N = 100\,c + 10\,d + u$.

Exercice d'application

Soit $\mathrm{N} = \overline{mcdu}$ un nombre entier écrit en base dix pour lequel $m > c > d > u > 0$.
On appelle N′ le nombre entier obtenu à partir de N en permutant le chiffre des unités avec celui des unités de mille et le chiffre des centaines avec celui des dizaines. On appelle D le nombre $\mathrm{N} - \mathrm{N}'$.

1) Dressez la liste des nombres N pour lesquels le chiffre des milliers est 6.
2) Exprimez D en fonction de m, c, d et u.
3) Quelle est la valeur maximum de D ? Pour quelle(s) valeur(s) de N, D est-il maximum ?

Correction

1) On a $\mathrm{N} = \overline{6cdu}$ avec $0 < u < d < c < 6$ d'où $\mathrm{N} \in \{6\,321\,;\ 6\,421\,;\ 6\,521\,;\ 6\,431\,;\ 6\,531\,;\ 6\,541\,;\ 6\,432\,;\ 6\,532\,;\ 6\,542\,;\ 6\,543\}$.
2) $\mathrm{N} = \overline{mcdu} = 1\,000\,m + 100\,c + 10\,d + u$
$\mathrm{N}' = \overline{udcm} = 1\,000\,u + 100\,d + 10\,c + m$.
$$\begin{aligned}\mathrm{D} &= 1\,000(m-u) + 100(c-d) + 10(d-c) + (u-m)\\ &= 1\,000(m-u) - 1(m-u) + 100(c-d) - 10(c-d)\\ &= 999(m-u) + 90(c-d).\end{aligned}$$
3) $m - u$ et $c - d$ sont positifs puisque $m > u$ et $c > d$.
D atteint son maximum lorsque ces deux différences sont les plus grandes possibles, donc lorsque $m = 9$ et $u = 1$ d'une part, et lorsque $c = 8$ et $d = 2$ d'autre part.
On trouve alors $\mathrm{D} = 999(9-1) + 90(8-2) = 8\,532$.
Et donc $\mathrm{N} = 9\,821$.

Remarque : lorsqu'on écrit $\overline{cdu}$, la « barre » au dessus de cdu exprime l'écriture du nombre, à ne pas confondre avec un nombre « cdu » qui pourrait exprimer implicitement un nombre c multiplié par d multiplié par u.

Cours

B. Numération en base b

Un nombre en base 10 qui s'écrit $\overline{abcd}$ est égal à $1\,000\,a + 100\,b + 10\,c + d = a \times 10^3 + b \times 10^2 + c \times 10^1 + d \times 10^0$.
D'autres bases peuvent être employées. Dans la vie courante par exemple, on utilise la numération en base 2 (binaire) en informatique ; la numération en base 60 (sexagésimale), reste de la civilisation sumérienne, dans notre système de mesure du temps.

Principes : Symboles utilisés

- Dans une base b, on utilise b symboles (les chiffres) pour écrire les nombres ;
- par convention, lorsque l'on utilise une numération de position avec une base inférieure à 10, on utilise les chiffres arabes à de 0 à 9 ;
- quand la base est supérieure à 10, on ajoute aux dix chiffres des lettres A, B, C... en nombre suffisant pour parvenir à un total de b symboles.

DÉFINITION : Écriture dans une base

Dans une numération en base b, les groupements successifs se font par b éléments.
Le nombre qui s'écrit $\overline{a_n \dots a_1 a_0}^b$ dans la base b est égal à $a_n \times b^n + \dots + a_1 \times b^1 + a_0 \times b^0$.

MÉTHODE 2 Méthode pour passer de la base 10 à la base b

On peut utiliser la méthode des divisions successives : on divise le nombre par b, puis le quotient obtenu par b, puis le nouveau quotient par b, et ainsi de suite jusqu'à ce que le quotient soit égal à 0.
On écrit alors côte à côte et de droite à gauche les restes successifs de toutes ces divisions.

Exercice d'application

On souhaite coder en binaire le nombre que nous écrivons 43 en base 10.

Correction

On effectue les divisions euclidiennes successives par 2 :

$\begin{array}{r|l} 43 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & 21 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 21 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & 10 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 10 & 2 \\ \cline{2-2} 0 & 5 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 5 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & 2 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 2 & 2 \\ \cline{2-2} 0 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 1 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & 0 \end{array}$

Puis on écrit de droite à gauche les restes successifs : 101011.

Remarque : on peut également chercher la décomposition de 43 suivant les puissances décroissantes de 2 :

$$\begin{aligned} 43 &= 32 + 8 + 2 + 1 \\ &= 2^5 + 2^3 + 2^1 + 2^0 \\ &= 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \end{aligned}$$

MÉTHODE 3 Méthode pour passer de la base b à la base 10

On utilise « tout simplement » la formule $\overline{a_n \dots a_1 a_0}^b = a_n \times b^n + \dots + a_1 \times b^1 + a_0 \times b^0$.

Exercice d'application

Quelle est la valeur de $\overline{3024}^5$ en base 10 ?

Correction

$\overline{3024}^5 = 3 \times 5^3 + 0 \times 5^2 + 2 \times 5^1 + 4 \times 5^0 = 389$.

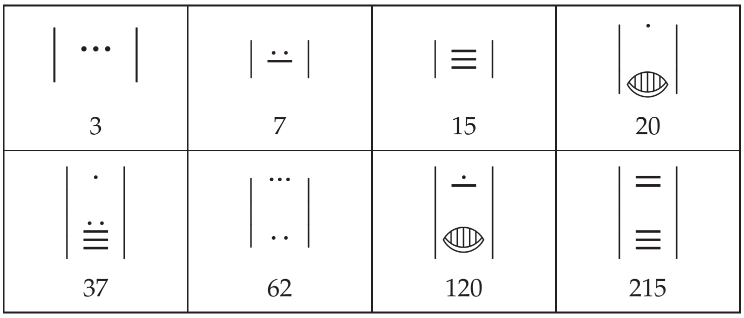
Groupement 2 - Exercice 5 : numération ancienne

En Amérique centrale, les Mayas utilisaient un système de numération comprenant trois signes.

Le point | · | Le trait | — | La coquille 

Le signe « coquille » indique l'absence de quantité.

Quelques correspondances entre écriture Maya et écriture décimale sont données dans le tableau ci-dessous :

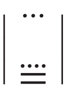


1) Donner la valeur du signe « point » et celle du signe « trait » dans l'écriture de 7 ?

2) Le système maya est un système vigésimal (il a pour base 20). Donner l'écriture maya du nombre 21.

3) Justifier l'écriture maya du nombre 37.

4) Donner l'écriture des deux nombres suivants dans notre système de numération.

a)    **b)** 

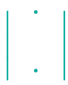
5) **a)** Donner l'écriture maya du nombre 25.

b) Donner l'écriture maya du nombre 101.

c) Le système de numération maya est qualifié, tout comme le système de numération que nous utilisons, de système positionnel. Expliquer pourquoi.

Exemple de corrigé.

1) On a $7 = (5 + 2 \times 1)$. Le point vaut 1 et le trait vaut 5.

2) $21 = (1) \times 20 + (1) \times 1$, le nombre s'écrit donc avec un point en haut et un point en bas : 

3) $37 = (1) \times 20 + (3 \times 5 + 2) \times 1$, soit une vingtaine en haut et 17 unités (3 traits et 2 points) en bas.

4) **a)** $(3) \times 20 + (2 \times 5 + 4) \times 1 = 3 \times 20 + 14 \times 1 = 60 + 14 = 74$.

b) $(1) \times 20^2 + (3 \times 5 + 2) \times 20 + (5) \times 1 = 1 \times 400 + 17 \times 20 + 5 \times 1 = 400 + 340 + 5 = 745$.

5) **a)** $25 = (1) \times 20 + (5) \times 1$ s'écrit 

b) $101 = (5) \times 20 + (1) \times 1$ s'écrit 

c) Le système maya est un système positionnel, car la valeur de ses « chiffres » de 0 à 20 dépend de leur position dans leur écriture.

Entraînement

1 Comme les cinq doigts de la main

1) Quelle est la valeur, dans le système décimal, du nombre $\overline{3241}^5$?

2) Quel est le nombre qui précède $\overline{1200}^5$? Celui qui suit $\overline{4214}^5$?

3) Écrire en base cinq le nombre 442 de notre système décimal.

2 C'est binaire !

1) Soit $a = 60$. Écrire a en base 2.

2) Soit $b = \overline{1010101}^2$. Écrire b en base 10.

3) Donner la parité de b.

4) Calculer $2b$; $4b$ et $8b$ en base 2 sans passer par l'écriture décimale.

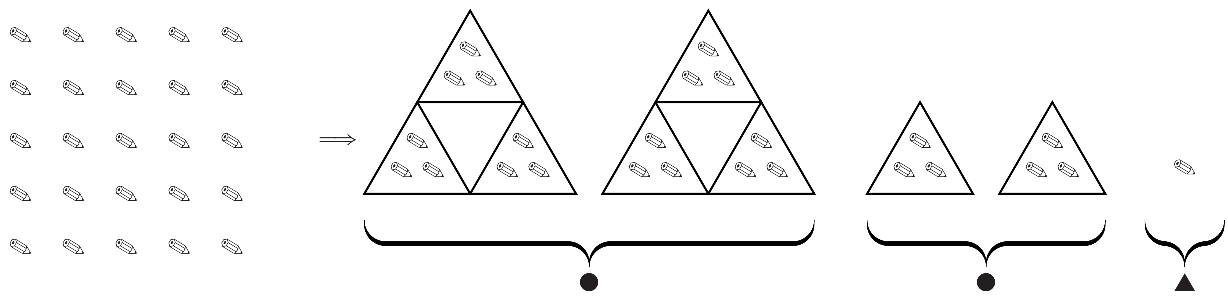
5) Calculer $a + b$ en base 2 sans passer par l'écriture décimale.

3 Les triominis

Sur la planète trigone, au fin fond de la galaxie des triades vit le peuple des triominis. Ses habitants ne possèdent que trois doigts. De ce fait, leur numération ne contient que 3 symboles :

- notre 0 se note : ★
- notre 1 se note : ▲
- notre 2 se note : ●

Pour continuer à dénombrer, ils sont obligés de faire des regroupements par 3.
Par exemple, voilà comment ils dénombrent cette quantité :



De la même manière, on a les correspondances suivantes :

Numération décimale	21	39	133
Numération trimontoise	●▲★	▲▲▲★	▲▲●●▲

1) Caractériser ce système de numération.

2) À partir de quel nombre, exprimé en écriture décimale, les triominis utilisent-ils quatre symboles ?

3) Écrire dans notre numération le nombre triomontois suivant : ●▲★▲★.

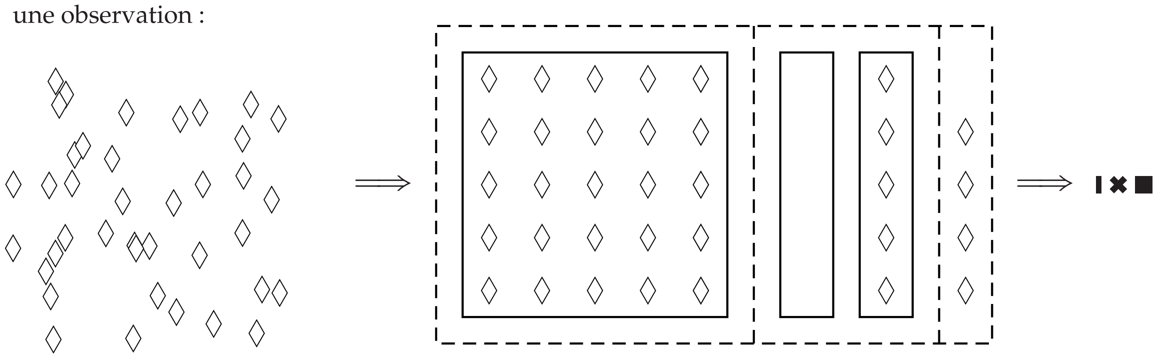
4) Écrire le nombre que nous écrivons 143 en numération triomontoise.

5) Quel nombre écrit en numération trimontoise vient juste avant ▲★●★ ?

4 CRPE 2005 Lille

Dans la tribu des Cincofiles, on a une manière particulière de compter. Lors d'un voyage dans cette tribu, un chercheur a ramené un certain nombre d'observations qu'il a retranscrites dans un carnet.
Voici ce qu'il a noté sur la manière de compter des Cincofiles :

- c'est une numération de position ;
- il n'y a que cinq symboles pour noter les nombres :
  ● pour notre 0, ❙ pour notre 1, ✖ pour notre 2, ▼ pour notre 3, ■ pour notre 4 ;
- une observation :



- des exemples de transcriptions :

❙▼	■✖	✖●■	❙❙▼■
8	22	54	169

1) En expliquant votre démarche :
   a) Transcrire dans notre système de numération le nombre noté par les Cincofiles « ■■■ ».
   b) Transcrire dans le système Cincofile le nombre que nous notons « 273 ».
2) Sans passer par une transcription dans notre système de numération décimale, écrire :
   a) Le nombre qui précède le nombre « ▼■● » dans le système Cincofile ?
   b) Le nombre qui suit le nombre « ✖■■ » dans le système Cincofile ?
   Ces deux derniers nombres seront donnés en écriture Cincofile.

5 Des nombres mystérieux

Tous les nombres considérés dans cet exercice sont écrits dans la numération décimale.
Déterminer les deux nombres mystère vérifiant les propriétés décrites.

1) Premier nombre mystère :
- son chiffre des unités est égal à 5 ;
- il a 431 centaines ;
- son chiffre des dizaines est égal à 2.

2) Deuxième nombre mystère :
- il est compris entre 15 000 et 16 000 ;
- tous ses chiffres sont différents ;
- son chiffre des centaines est un multiple de 3 ;
- son chiffre des unités est un nombre pair supérieur à 5 ;
- son chiffre des dizaines est le successeur du chiffre des centaines et est la moitié du chiffre des unités.

Entraînement

6 CRPE 2001 Aix

1) Voici deux propositions concernant des nombres entiers donnés en écriture décimale. Dire pour chacune d'elles si elle est vraie ou fausse et justifier.
A : si l'écriture d'un nombre se termine par 2, alors l'écriture du carré de ce nombre se termine par 4.
B : si l'écriture d'un nombre se termine par 4, alors l'écriture du carré de ce nombre se termine par 16

2) L'écriture d'un nombre entier n est de la forme $\overline{a5}$ où a est le chiffre des dizaines, différent de 0.
Démontrer que n^2 s'écrit avec 4 chiffres au plus.
Démontrer que l'écriture de n^2 se termine par 25 et que le nombre de centaines de n^2 est égal à $a(a+1)$.

7 CRPE 2018 G2

Pour calculer de tête le carré d'un nombre entier se terminant par 5 :

- on prend le nombre de dizaines et on le multiplie par l'entier qui suit ce nombre de dizaines, cela donne le nombre de centaines du résultat ;
- on écrit ensuite 25 à droite du nombre de centaines pour obtenir le résultat.

Par exemple, 105 est composé de 10 dizaines et 5 unités, son carré. s'obtient :

- étape 1 : en calculant $10 \times 11 = 110$, ce qui donne le nombre de centaines du résultat ;
- étape 2 : on écrit ensuite 25 à droite de 110 pour obtenir le résultat.

On a donc $105^2 = 11\,025$.

1) Montrer comment calculer mentalement 45^2.

2) Soit n un nombre entier se terminant par 5, n peut s'écrire : $10d + 5$ avec d le nombre de dizaines.
Établir la relation : $n^2 = 100d(d+1) + 25$.

3) Grâce au résultat de la question 2), justifier la technique de calcul mental présentée dans l'énoncé.

4) Comment, par extension de la technique de calcul mental présentée, calculer mentalement le carré de 3,5 ?

8 CRPE 2022 Sujet 0

Soit M un nombre entier naturel inférieur à 100. On note u le chiffre des unités du nombre M et d son chiffre des dizaines.
Soit N un nombre entier naturel inférieur à 100, ayant le même chiffre d des dizaines que M et tel que son chiffre v des unités vérifie $u + v = 10$.
Par exemple, pour $M = 34$, alors $N = 36$ vérifie ces conditions.
Pour M et N vérifiant les conditions ci-dessus, on propose d'utiliser l'algorithme ci-dessous pour calculer le produit $M \times N$.

Algorithme de calcul
– On calcule le produit de d et de l'entier suivant $d+1$.
– On calcule le produit de u et de v.
– On ajoute au produit de u et de v, 100 fois le produit de d et de l'entier suivant $d+1$.

1) Vérifier en détaillant les calculs que cet algorithme fonctionne pour 34×36.

2) Démontrer que cet algorithme de calcul donne effectivement le résultat escompté pour tous les couples de nombres M et N vérifiant les conditions mentionnées en début d'exercice.
On pourra utiliser les égalités $M = 10d + u$ et $N = 10d + v$.

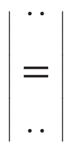
3) Montrer comment on peut utiliser cet algorithme de calcul, en détaillant les calculs, pour calculer mentalement $4,2 \times 4,8$.

9 **CRPE 2003 Guadeloupe**

On cherche à déterminer un nombre à trois chiffres dont la somme est 16.
Si l'on intervertit le chiffre des centaines et celui des dizaines, le nombre augmente de 450 et si l'on intervertit le chiffre des centaines et celui des unités il augmente de 198.
Déterminer ce nombre.

10 **Quel charabia !**

Compléter le tableau suivant en considérant la numération maya comme une numération de base 20.

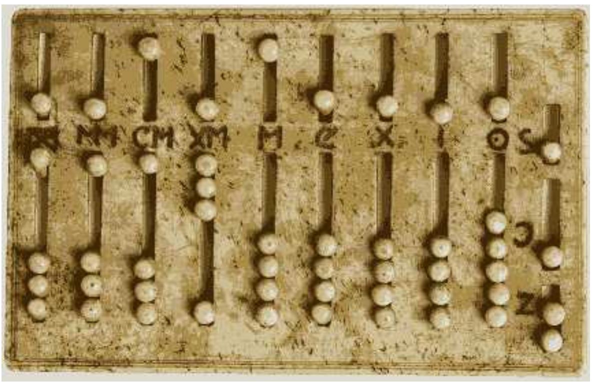
	12					
Égyptien	∩ǀǀ	∩∩∩∩				
Romain	XII		CCXLVIII			
Chinois	十 二			三 千 十 九		
Maya						
Binaire						1111101011

Entraînement

NOMBRES & CALCULS

2

Ensembles de nombres et calculs



Abaque romain en ivoire. INRIA, photo J.-M. Ramès

Un peu d'histoire

La création des nombres n'a pas été linéaire dans l'histoire : elle s'est faite au gré des croyances, des découvertes, des besoins. Des premiers nombres utilisés pour compter le nombre d'animaux dans un troupeau aux nombres que l'on qualifie de « complexes », la route a été longue. Il a fallu classer ces nombres dans des ensembles, munis d'opérations arithmétiques, ayant des propriétés remarquables.

Concernant les calculs, il y a quelques siècles, compter sur ses doigts était le seul bagage de l'homme. On confiait les multiplications et divisions à quelques calculateurs professionnels que les gens vénéraient comme de véritables sorciers ! Les Babyloniens, les Grecs, les Romains et les Européens utilisent des abaques à jetons au moins jusqu'au Moyen-Âge : des tables sur lesquelles on place des jetons pour caractériser les nombres puis effectuer des calculs. Les pays asiatiques et russes se servent eux de bouliers. Vers 1220, l'italien **Léonardo Fibonacci** rapporte des pays arabes nos chiffres (eux mêmes venus des Indes) et des techniques de calcul plus rapides que les calculs sur abaques. Plus tard, c'est la course à l'invention d'outils et de machines à calculer comme par exemple les réglettes multiplicatrices de **John Neper** en 1617, la Pascaline, première machine à additionner en 1642, la machine analytique de **Charles Babbage** vers 1830, proche du concept de nos ordinateurs.

Cours

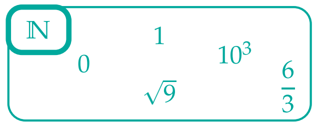
1. Les nombres entiers naturels

Dès lors que les peuples ont commencé à dénombrer, ils l'ont fait le plus naturellement possible : certains comptaient les bisons, d'autres un nombre de jours… Les nombres utilisés à cet effet sont les entiers naturels car ce sont ceux que l'on utilise naturellement dans la vie de tous les jours. Il en existe une infinité.

DÉFINITION : $\mathbb{N}$, entiers naturels

Un nombre **entier naturel** est un nombre positif (ou nul) permettant de dénombrer des objets comptant chacun pour un. L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$ comme *natural*.

Les entiers naturels permettent de mesurer des collections d'entités discrètes. Ils peuvent se cacher sous des formes « peu naturelles ».



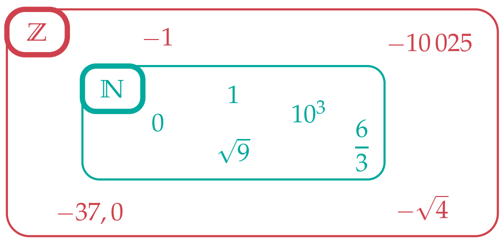
2. Les nombres entiers relatifs

A. Définitions et comparaison

DÉFINITION : $\mathbb{Z}$, entiers relatifs

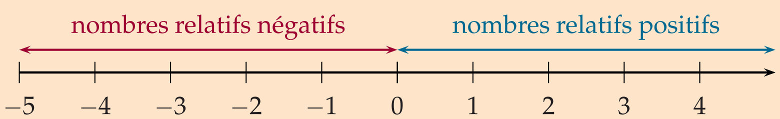
Un nombre **entier relatif** est un entier naturel muni d'un signe positif ou négatif qui indique sa position par rapport à 0. Le nombre sans son signe correspond à sa distance à l'origine. L'ensemble des entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$ comme *Zahl*, nombre en allemand.

Tous les entiers naturels sont des entiers relatifs. On note $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

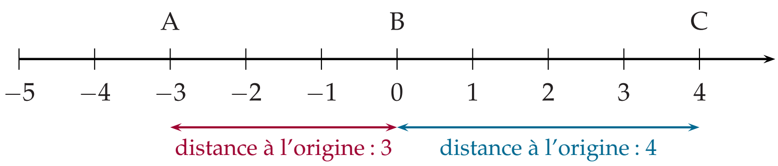


DÉFINITION : Abscisse et droite graduée

Sur une droite graduée, on repère chaque point par un nombre : son **abscisse**.



Exemple L'abscisse de A est -3, on note $A(-3)$; l'abscisse de B est 0 et l'abscisse de C est $+4$.



PROPRIÉTÉ : Comparaison

- Deux nombres relatifs négatifs sont rangés dans l'ordre inverse de leur distance à zéro.
- Un nombre relatif négatif est inférieur à un nombre relatif positif.
- Deux nombres relatifs positifs sont rangés dans l'ordre de leur distance à zéro.

Exemple $-4 < -2$ car $4 > 2$; $-4 < 2$ car $-4 < 0$ et $2 > 0$; $+4 > +2$ car $4 > 2$.

Remarque : les nombres négatifs sont rangés « dans le sens inverse » des nombres positifs.

B. Opérations avec les entiers relatifs

Dans un calcul, on commence toujours pas effectuer les calculs entre parenthèses, puis les multiplications et divisions, et enfin les additions et soustractions.

PROPRIÉTÉ : Signe

- Le produit ou le quotient de deux nombres relatifs de même signe est positif.
- Le produit ou le quotient de deux nombres relatifs de signes différents est négatif.
- Dans une fraction, le signe « $-$ » se place indifféremment : $\dfrac{-a}{b} = -\dfrac{a}{b} = \dfrac{a}{-b}$

Exemple $(-3) \times (-4) = 12$ $(-4) \times 5 = -20$ $25 \div (-4) = -6,25$ $\dfrac{-1}{3} = -\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{-3}$.

PROPRIÉTÉ : Somme

- La somme de deux nombres relatifs ayant le même signe s'obtient en ajoutant les distances à 0 et en mettant le même signe que les nombres.
- La somme de deux nombres relatifs n'ayant pas le même signe s'obtient en calculant la différence entre les distances à 0 et en mettant le signe du terme ayant la plus grande distance à 0.

Exemple $7,3 + 4 = 11,3$ $(-9) + (-5) = -14$ $(-5) + 9 = 4$ $6,2 - 14 = -7,8$.

DÉFINITION : Opposé

L'**opposé** d'un nombre relatif est le nombre relatif obtenu en changeant son signe.

Exemple L'opposé de $5 = +5$ est -5 ; l'opposé de (-7) est $+7 = 7$.

PROPRIÉTÉ : Soustraction

Soustraire un nombre revient à ajouter son opposé : $a - b = a + (-b)$.

Exemple $-4 - (-7) = -4 + (+7) = 3$ $10 + (-4) = 10 - 4 = 6$.

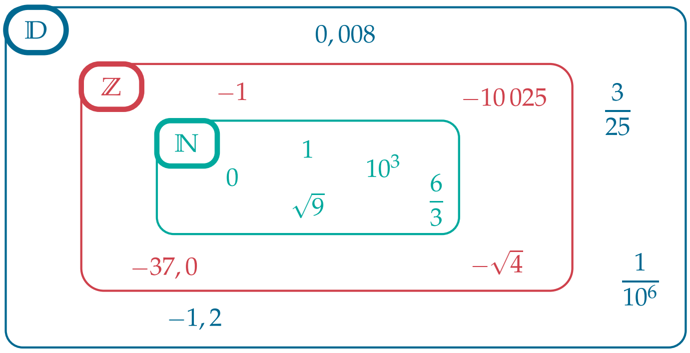
3. Les nombres décimaux

A. Défintion

DÉFINITION : $\mathbb{D}$, nombres décimaux

Un nombre **décimal** est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction décimale, c'est à dire une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10 du type $\dfrac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$. Son ensemble est noté $\mathbb{D}$ comme *décimal*.

Un nombre décimal possède une quantité quelconque, mais finie de chiffres après la virgule. Contrairement à ce que l'on pourrait croire, les nombres décimaux ont été introduits après les fractions, suite à la découverte des fractions décimales. C'est donc un *cas particulier* des nombres fractionnaires.



B. Reconnaître un nombre décimal

MÉTHODE 1 Déterminer si un nombre est décimal

Pour reconnaître qu'un nombre exprimé sous forme de fraction est un nombre décimal, on peut effectuer les étapes suivantes :

- mettre le nombre sous forme de fraction irréductible ;
- si le dénominateur est de la forme $2^n \times 5^p$ (où n et p sont des entiers naturels), c'est à dire si le dénominateur ne comporte que des puissances de 2 et de 5, alors ce nombre est décimal ; sinon, ce nombre n'est pas décimal.

Exercice d'application $\dfrac{21}{140}$ est-il un décimal ?

Correction

- On commence par mettre la fraction sous la forme d'une fraction irréductible :
  $\dfrac{21}{140} = \dfrac{3 \times \cancel{7}}{20 \times \cancel{7}} = \dfrac{3}{20}$.
- Puis on décompose le dénominateur en produit de facteurs premiers : $\dfrac{3}{20} = \dfrac{3}{2^2 \times 5}$.
  Le dénominateur ne comporte que des puissances de 2 et de 5, donc il est décimal.
  Son écriture décimale est 0,15.

Exercice d'application $\dfrac{3}{140}$ est-il décimal ?

Correction

- La fraction est déjà sous forme irréductible.
- On décompose le dénominateur en produit de facteurs premiers : $\dfrac{3}{140} = \dfrac{3}{2^2 \times 5 \times 7}$
  Le dénominateur comporte le nombre 7, donc il n'est pas décimal.

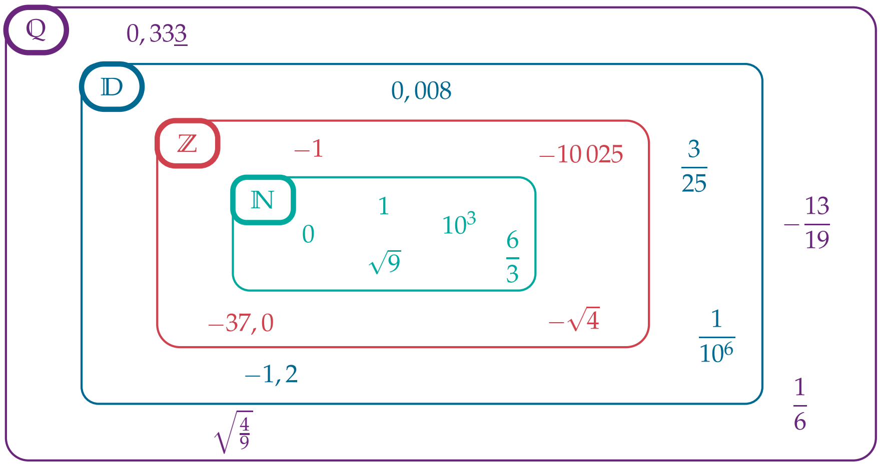
4. Les nombres rationnels

A. Définition

De tout temps, l'homme a souhaité partager des quantités, prémisse de ce qu'on appellera bien plus tard les fractions. Ces nombres que l'on « coupait » étaient appelés les *nombres rompus*.

DÉFINITION : $\mathbb{Q}$, nombres rationnels

Les **nombres rationnels** sont les nombres pouvant s'écrire sous la forme d'une fraction $\frac{p}{q}$ où p et q sont des entiers relatifs (non nul pour q). Cet ensemble est noté $\mathbb{Q}$ comme *quotient*.



B. Calculer avec des fractions

PROPRIÉTÉ : Multiplication ou division par un nombre

On ne change pas la valeur d'une fraction en multipliant ou en divisant le numérateur et le dénominateur par un même nombre relatif non nul.

$$\frac{a \times k}{b \times k} = \frac{a}{b} \quad ; \quad \frac{a \div k}{b \div k} = \frac{a}{b}$$

Exemple $\frac{5}{13} = \frac{5 \times 3}{13 \times 3} = \frac{15}{39}$ $\qquad$ $\frac{15}{39} = \frac{15 \div 3}{39 \div 3} = \frac{5}{13}$

REMARQUE : on peut utiliser cette propriété pour simplifier une fraction : $\frac{18}{27} = \frac{2 \times \cancel{9}}{3 \times \cancel{9}} = \frac{2}{3}$.

PROPRIÉTÉ : Produit

On obtient le produit de deux nombres fractionnaires en multipliant les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux et en formant une nouvelle fraction avec ces produits.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Exemple $\frac{4}{-3} \times \frac{-7}{-5} = \frac{4 \times (-7)}{-3 \times (-5)} = \frac{-28}{15} = -\frac{28}{15}$.

Cours

DÉFINITION : Inverse

L'**inverse** d'un nombre x non nul est le nombre $x^{-1} = \dfrac{1}{x}$ par lequel on le multiplie pour obtenir 1.

$$x \times x^{-1} = x^{-1} \times x = x \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \times x = 1$$

Exemple L'inverse de 10 est $\dfrac{1}{10} = 1 \div 10 = 0,1$.
L'inverse de 3 est $\dfrac{1}{3} = 1 \div 3 = 0,\overline{3} = 0,333\dots$. Le résultat n'est pas un nombre décimal.

PROPRIÉTÉ : Division

Diviser par un nombre revient à multiplier par son inverse.

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c} = \frac{a}{bc} \qquad ; \qquad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Exemple $\dfrac{5}{3} \div \dfrac{3}{-7} = \dfrac{5}{3} \times \dfrac{-7}{3} = \dfrac{5 \times (-7)}{3 \times 3} = \dfrac{-35}{9} = -\dfrac{35}{9}$.

PROPRIÉTÉ : Addition de fractions de même dénominateur

Pour additionner [resp. soustraire] deux fractions ayant le même dénominateur, on ajoute [resp. soustrait] les numérateurs et on garde le même dénominateur :

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \qquad \text{et} \qquad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

Exemple $\dfrac{-4}{7} - \dfrac{-12}{7} = \dfrac{-4-(-12)}{7} = \dfrac{-4+12}{7} = \dfrac{8}{7}$.

PROPRIÉTÉ : Addition de fractions de dénominateurs différents

Pour additionner ou soustraire deux fractions ayant des dénominateurs différents, on transforme l'écriture des fractions pour qu'elles aient le même dénominateur.

Exemple $\dfrac{-4}{3} + \dfrac{5}{2} = \dfrac{-4 \times 2}{3 \times 2} + \dfrac{5 \times 3}{2 \times 3} = \dfrac{-8}{6} + \dfrac{15}{6} = \dfrac{-8+15}{6} = \dfrac{7}{6}$.

5. Les nombres réels

Aux alentours du V^{e} siècle av. J.-C., des mathématiciens grecs démontrent que les longueurs de la diagonale du carré et de son côté sont incommensurables. Nous disons aujourd'hui que ce rapport, de longueur $\sqrt{2}$, est **irrationnel**, c'est-à-dire qu'il n'est pas égal à une fraction. Ceci met en évidence que l'ensemble $\mathbb{Q}$ ne peut suffire pour représenter toutes les grandeurs mesurables et qu'il faut construire un ensemble plus grand.

DÉFINITION : $\mathbb{R}$, nombres réels

Un nombre **réel** est un nombre qui peut être représenté par une partie entière et une liste finie ou infinie de décimales. Son ensemble est noté $\mathbb{R}$ comme *réal*.

On trouve dans cet ensemble et pas ailleurs, par exemple, les nombres π, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, e...
On représente cet ensemble par une droite graduée appelée droite numérique. Tout point de cette droite a pour abscisse un nombre réel et tout nombre réel est l'abscisse d'un point de cette droite. On a alors :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

DÉFINITION : Intervalle

L'ensemble des nombres réels compris entre a et b (inclus) est appelé intervalle et se note $[\,a\,;\,b\,]$. a et b sont les bornes de l'intervalle.

On peut définir plusieurs types d'intervalle :

Inégalité	Notation	Représentation
$a \leqslant x \leqslant b$	$x \in [\,a\,;\,b\,]$	
$a < x \leqslant b$	$x \in]\,a\,;\,b\,]$	
$a \leqslant x < b$	$x \in [\,a\,;\,b\,[$	
$a < x < b$	$x \in]\,a\,;\,b\,[$	
$x \geqslant a$	$x \in [\,a\,;\,+\infty\,[$	
$x > a$	$x \in]\,a\,;\,+\infty\,[$	
$x \leqslant b$	$x \in]-\infty\,;\,b\,]$	
$x < b$	$x \in]-\infty\,;\,b\,[$	

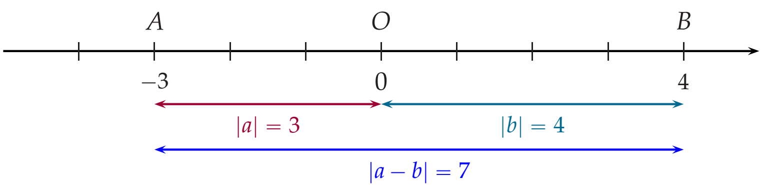
Les signes $-\infty$ et $+\infty$ se lisent « moins l'infini » et « plus l'infini ». L'ensemble $\mathbb{R}$ s'écrit aussi $]-\infty\,;\,+\infty\,[$.

DÉFINITION : Valeur absolue et distance

On considère une droite graduée d'origine O et des points A et B d'abscisses a et b.

- La valeur absolue de a, notée $|a|$ est le nombre égal à la distance OA.
- On appelle distance entre les réels a et b la distance AB, notée $|a-b|$.

Exemple



Vu au CRPE en 2022

Groupement 3 - Exercice 3 - Partie C : calculs et fractions

Dans la perspective d'offrir des bouquets de fleurs pour la fête de l'école, l'enseignante souhaite planter des graines dans le potager. Dans la classe il y a 26 élèves et chaque élève reçoit 20 graines à semer.
On a reporté ci-dessous ce que l'on peut lire sur le paquet de graines choisi.

Taux de germination des graines : 90 %
Prix du paquet de graines : 4,53 €.
Ce paquet contient 50 graines.
Période de semis : d'avril à juin.
Hauteur adulte : 50 cm.

On rappelle que le taux de germination d'un paquet de graines indique le pourcentage de graines qui devraient germer et donc produire une fleur.

1) Combien de fleurs un élève peut-il espérer voir pousser ?

2) Quel sera le budget à prévoir pour l'achat des graines ?

3) En plus des graines, des bulbes de tulipes et de jonquilles sont plantés.

a) L'enseignante en plante sur un sixième du potager puis un peu plus loin sur un huitième de ce même potager.
Un élève affirme que les bulbes représentent plus de 25 % du potager. À-t-il raison ? Justifier votre réponse.

b) Elle met dans un panier 30 bulbes de jonquilles et des bulbes de tulipes. La proportion de bulbes de jonquilles dans le panier est de $\frac{5}{6}$.
Calculer le nombre de bulbes de tulipes dans ce panier.

Exemple de corrigé.

1) Un élève reçoit 20 graines, dont le taux de germination est de 90 %.
Cela fait : $\frac{90}{100} \times 20$ graines $= 18$ graines.
Chaque élève peut espérer voir pousser 18 graines.

2) Pour les 26 élèves, il faut acheter 26×20 graines $= 520$ graines.
Un paquet contenant 50 graines, il faut donc acheter 11 paquets (11×50 graines $= 550$ graines).
Un paquet de graines coûte 4,53 €, ce qui fait un budget de $11 \times 4,53$ € $= 49,83$ €.
Le budget à prévoir pour l'achat des graines est de 49,83 €.

3) a) $\frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{8}{48} + \frac{6}{48} = \frac{14}{48} = \frac{7}{24}$.
Or, $25\,\% = \frac{1}{4} = \frac{6}{24}$ qui est plus petit que $\frac{7}{24}$.
Les bulbes représentent plus de 25 % du potager, l'élève a raison.

b) Un proportion de jonquilles de $\frac{5}{6}$ signifie que, pour 5 bulbes jonquilles, on a 1 bulbe de tulipe.
Par conséquent, si on a 30 bulbes jonquilles (donc 6 fois plus), alors on a 6 bulbes de tulipes.
Il y a 6 bulbes de tulipes dans le panier.

Groupement 3 - Exercice 1 - Questions 4 à 6 : fractions

Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Donner la bonne réponse en la justifiant.
Une réponse erronée n'enlève pas de point. Une réponse non justifiée ne rapporte pas de point.

Questions :	**A**	**B**	**C**	**D**
1. $\dfrac{4}{25}$ est ...	un nombre réel mais n'est pas un nombre rationnel.	un nombre rationnel mais n'est pas un nombre décimal.	un nombre décimal mais n'est pas un nombre entier.	un nombre entier.
2. Le quart de $\dfrac{4}{12}$ est...	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{4}{3}$	$\dfrac{16}{48}$	$\dfrac{4}{48}$
3. $\dfrac{2}{3} \times 5 + 5 \times \dfrac{1}{3}$ est égale à	5	$\dfrac{20}{9}$	$\dfrac{15}{15}$	$\dfrac{20}{90}$

Exemple de corrigé.

1) $\dfrac{4}{25} = \dfrac{16}{100} = 0,16$ donc, cette fraction est un nombre décimal mais n'est pas un entier. La réponse est C.

2) $\dfrac{1}{4} \times \dfrac{4}{12} = \dfrac{4}{48}$. La réponse est D.

3) $\dfrac{2}{3} \times 5 + 5 \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{10}{3} + \dfrac{5}{3} = \dfrac{15}{3} = 5$. La réponse est A.

Entraînement

Maîtriser les bases avec Mathenpoche

Classe	N°	Thème	Dans le cours
6e	N1	Nombres entiers et décimaux	1. et 3.
	N3	Opérations	1. à 3.
	N5	Fractions, écritures fractionnaires	4.
5e	A1	Nombres décimaux	3.
	A2	Nombres relatifs	2.
	A3	Nombres rationnels	4.
4e	A1	Nombres décimaux	3.
	A2	Nombres relatifs	2.
	A3	Nombres rationnels	4.
3e	A3	Nombres rationnels	4.
2nde	N3	Intervalles et inégalités	5.

1 Meli-mélo de calculs

Effectuer les calculs suivants à la main.

1) $A = |123,45|$

2) $B = 123,2 + 12,32 + 1,232$

3) $C = (-2) \times (-8)$

4) $D = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{4}{7}$

5) $E = -5 \times \dfrac{-2}{3}$

6) $F = \dfrac{3}{4} + \dfrac{7}{6}$

7) $G = 3,728 \times 15,12$

8) $H = (+2) + (-13)$

9) $I = 13\,235 - 788$

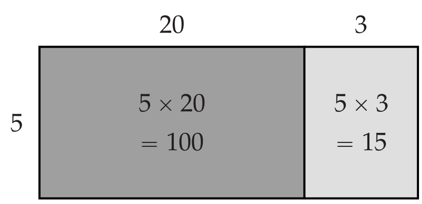
10) $J = |-12|$

11) $K = (-5) + (-14)$

12) $L = \left|-\dfrac{1}{4}\right|$

2 Multiplication par les aires

La technique « classique » de la multiplication peut être modélisée par des aires.
Par exemple, pour 5×23, on modélise ici la situation par un schéma qui n'est pas à l'échelle :



Écriture en ligne :

$$\begin{aligned} 5 \times 23 &= 5 \times (20 + 3) \\ &= 5 \times 20 + 5 \times 3 \\ &= 100 + 15 \\ &= 115 \end{aligned}$$

Écriture en colonnes :

$$\begin{array}{rrrr} & & & 5 \\ \times & & 2 & 3 \\ \hline & & 1 & 5 \\ & 1 & 0 & 0 \\ \hline & 1 & 1 & 5 \end{array}$$

1) Quelle propriété de la multiplication ces trois représentations mettent-elles en valeur ?

2) Représenter sous forme d'aires, d'écriture en ligne et en colonnes les deux opérations suivantes :

a) 43×69 **b)** 234×75

3 Le bon intervalle

1) Pour chacune des droites graduées, donner l'inégalité correspondant à la partie colorée puis l'intervalle correspondant.

a) 

b) 

c) 

d) 

2) Pour chaque inégalité, représenter la solution sur une droite graduée puis donner l'intervalle correspondant.

a) $-2,5 \leqslant x < 1$.

b) $x \geqslant 2$.

c) $-4,2 < x \leqslant 2,3$.

d) $x < 3$.

4 Dans l'absolu

Sur une droite graduée, placer les nombres A et B puis calculer AB.

1) $A(-3)$ et $B(-1)$.

2) $A(3)$ et $B(-4)$.

3) $A(5)$ et $B\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

4) $A(-12,3)$ et $B(3,56)$.

5 Une histoire d'impôts

En 2020, pour Mme Mathics dont le revenu brut global R appartient à l'intervalle $[\,27\,086\ ;\ 72\,617\,]$ (en euros), le montant de l'impôt est donné par la formule : $I = 0,3R - 5\,706,74$.
Donner un encadrement du montant de l'impôt de Mme Mathics.

6 Ensemble, c'est mieux !

Indiquer à quel(s) ensemble(s) les nombres suivants appartiennent.

Ensemble	$\dfrac{17}{8}$	$\dfrac{8}{17}$	$\dfrac{2\,794}{55}$	$\dfrac{1\,096}{52}$	$\sqrt{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2\,209}$	$3,14$	π
$\mathbb{N}$									
$\mathbb{Z}$									
$\mathbb{D}$									
$\mathbb{Q}$									
$\mathbb{R}$									

7 CRPE 2007 G6

La lettre x désigne un nombre. Dire, en justifiant, si les énoncés suivants sont vrais ou faux :

- Énoncé 1 : « Si $2x$ est un nombre entier naturel, alors x est un nombre entier naturel. »
- Énoncé 2 : « Si $\dfrac{x}{2}$ est un nombre entier naturel, alors x est un nombre entier naturel. »
- Énoncé 3 : « Si $x + 1$ est un nombre entier naturel, alors x est un nombre entier naturel. »

8 **CRPE 1998 Nice**

Écrire un entier à la place du point pour que l'écriture fractionnaire désigne :

un entier naturel	un décimal non naturel	un rationnel non décimal
$\dfrac{\bullet}{85}$	$\dfrac{\bullet}{85}$	$\dfrac{\bullet}{85}$
$\dfrac{85}{\bullet}$	$\dfrac{85}{\bullet}$	$\dfrac{85}{\bullet}$

9 **CRPE 2022 Sujet 0**

Un nombre décimal est souvent défini de la façon suivante : « Un nombre décimal est un nombre pouvant s'écrire sous la forme $\dfrac{a}{10^n}$ où a est un nombre entier et n est un nombre entier positif ».

1) On s'appuiera sur la définition précédente pour répondre aux deux questions suivantes.
   a) Montrer que 0,127 est un nombre décimal.
   b) Montrer que $\dfrac{1}{4}$ est un nombre décimal.
2) Dans une classe de CM2 un enseignant demande aux élèves de dire ce qu'est un nombre décimal, voici trois réponses proposées par des élèves :
   - Élève A : « Un nombre décimal est un nombre avec une virgule. »
   - Élève B : « Un nombre décimal est un nombre qui s'écrit avec une fraction qui a 10 ou 100 au dénominateur. »
   - Élève C : « Un nombre décimal est un nombre qui n'est pas entier. »

   Expliquer pourquoi chacune des définitions proposées ne convient pas d'un point de vue mathématique. On pourra notamment s'appuyer sur des contre-exemples.
3) Parmi les nombres suivants dire, en justifiant, lesquels sont décimaux et lesquels ne le sont pas :

   $2,48 \quad ; \quad \dfrac{7}{25} \quad ; \quad 12 \quad ; \quad \dfrac{7}{9} \quad ; \quad \dfrac{49}{14}.$
4) Le produit de deux nombres décimaux est-il toujours un nombre décimal ? Justifier.
5) Le quotient de deux nombres décimaux est-il toujours un nombre décimal ? Justifier.

10 **Ou comment démontrer que 0,999... = 1**

Le quotient de deux nombres entiers naturels peut avoir une écriture décimale qui « ne se termine pas ».

Par exemple, $\dfrac{2}{3} = 0,666\ldots$; $\dfrac{227}{110} = 2,06363\ldots$

L'écriture décimale est alors périodique à partir d'un certain rang, c'est-à-dire que la même séquence de chiffres finit par se répéter indéfiniment. On écrit :

$\dfrac{2}{3} = 0,\overline{6}$ (la période est 6), et : $\dfrac{227}{110} = 2,0\overline{63}$ (la période est 63).

1) Déterminer la période de $\dfrac{22}{7}$ en faisant un calcul « à la main ».
2) Problème réciproque : on considère le nombre $x = 0,\overline{27}$.
   a) Calculer $100x - x$ de deux manières différentes.
   b) En déduire l'écriture fractionnaire irréductible de x.
3) Déterminer une écriture fractionnaire de $19,\overline{78}$.
4) Un « paradoxe » étrange : démontrer que $0,999\cdots = 1$.

NOMBRES & CALCULS

3

Calcul littéral

Timbre Al-Khwarizmi

Un peu d'histoire

Le mathématicien perse **Muhammad bin Musa Al-Khawarizmi** (≈780-850), est à l'origine des mots *algorithme*, issu de son nom et *algèbre*, issu d'une méthode et du titre de l'un de ses ouvrages. Son apport en mathématiques est tel qu'il est surnommé « le père de l'algèbre », avec **Diophante d'Alexandrie**, dont il reprendra les travaux. En effet, il est le premier à répertorier de façon systématique des méthodes de résolution d'équations en les classant dans son ouvrage *Kitab al-mukhtasar fi hisab al-jabr wa'l muqabala* qui signifie *Livre sur la science de la transposition et de la réduction*. L'acte de naissance officiel de l'Algèbre est la publication de ce livre, dédié au calife **al-Ma'moun**.

Cours

1. Calculs avec des puissances entières

DÉFINITION : Notation

$$\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}} = a^n \qquad ; \qquad \underbrace{10 \times 10 \times \cdots \times 10}_{n \text{ facteurs}} = 10^n$$

Exemple $(-5)^3 = (-5) \times (-5) \times (-5) = -125 \qquad 10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10\,000.$

Par convention, on pose $a^0 = 1$ pour tout nombre a non nul.

PROPRIÉTÉ : Règles de calcul

Pour tout réel a non nul et pour tous entiers relatifs m et n, on a les propriétés suivantes :

Produit de puissances : $a^m \times a^n = a^{m+n}$ — Puissance de puissance : $(a^m)^n = a^{m \times n}$

Inverse d'une puissance : $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ — Fraction de puissances : $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Exemple $2^3 \times 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 \qquad 2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} \qquad \dfrac{10^5}{10^2} = 10^{5-2} = 10^3 \qquad \left(4^2\right)^3 = 4^{2\times 3} = 4^6.$

Lorsque les valeurs d'une grandeur sont très grandes ou très petites dans l'unité choisie, il est commun d'utiliser un préfixe dans le nom de l'unité :

Puissance	10^9	10^6	10^3	10^2	10^1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}
Préfixe	giga	méga	kilo	hecto	déca	déci	centi	milli	micro	nano
Symbole	G	M	k	h	da	d	c	m	μ	n

2. Calculs avec des radicaux

DÉFINITION : Racine carrée

Soit a un nombre positif. On appelle **racine carrée** du nombre a le seul nombre positif dont le carré est a. On note ce nombre $\sqrt{a}$.

REMARQUE : pour tout nombre réel a, on a $\sqrt{a^2} = |a|$.

Il est utile de connaître les premiers carrés parfaits afin de simplifier, ou calculer plus rapidement une racine carrée :

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144

PROPRIÉTÉ : Opérations élémentaires

Pour tous nombres positifs a et b, avec b non nul s'il est placé au dénominateur :

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \qquad ; \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

⚠ $$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b} \qquad ; \qquad \sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

Exemple $\sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = \sqrt{36} \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2} \qquad ; \qquad \sqrt{\dfrac{25}{121}} = \dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{121}} = \dfrac{5}{11}.$

$\sqrt{64+36} = \sqrt{100} = \sqrt{10^2} = 10$ mais $\sqrt{64} + \sqrt{36} = \sqrt{8^2} + \sqrt{6^2} = 8 + 6 = 14.$

3. Transformation d'écritures littérales

A. Développement

■ DÉFINITION : **Dévélopper**

Développer, c'est passer d'un produit à une somme (on enlève les parenthèses).

■ PROPRIÉTÉ : **Distributivité**

Distributivité simple : $k \times (a+b) = k \times a + k \times b = ka + kb$

Distributivité double : $(a+b)(c+d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d = ac + ad + bc + bd$

Exemple $3 \times (2x-1) = 3 \times (2x) + 3 \times (-1) = 6x - 3$.
$(x+2)(x-3) = x \times x + x \times (-3) + 2 \times x + 2 \times (-3) = x^2 - 3x + 2x - 6$.

■ DÉFINITION : **Simplifier**

Simplifier une expression, c'est écrire une expression équivalente plus simple en regroupant les termes de même type.

Exemple $(x+2)(x-3) = x^2 - 3x + 2x - 6 = x^2 - x - 6$.
$3x + 5t + 2x - 2t = 3x + 2x + 5t - 2t = 5x + 3t$.

B. Factorisation

■ DÉFINITION : **Factoriser**

Factoriser, c'est passer d'une somme à un produit (on ajoute des parenthèses).

Exemple $5x + 40 = \underline{5} \times x + \underline{5} \times 8 = \underline{5} \times (x+8) = 5(x+8)$.
Factoriser $3x + 5y$ est impossible car il n'y a aucun facteur en commun dans les deux termes.

■ PROPRIÉTÉ : **Identités remarquables**

Pour distribuer ou factoriser, on peut utiliser les identités remarquables suivantes :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

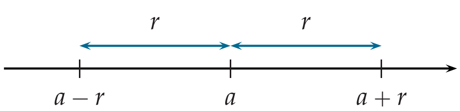
Exemple $(2x-3)^2 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 3 + 3^2 = 4x^2 - 12x + 9$.
$9x^2 - 16 = (3x)^2 - 4^2 = (3x+4)(3x-4)$.

C. Valeur absolue et intervalle

■ PROPRIÉTÉ : **Écriture d'un intervalle**

Lorsqu'un intervalle s'écrit sous la forme $[a-r\,;a+r]$, avec $r > 0$, on dit que l'intervalle a pour centre a et pour rayon r et on peut écrire :

$$x \in [a-r\,;a+r] \iff |x-a| \leqslant r$$



4. Résolution d'équations

A. Règles générales

DÉFINITION : Équation

Une **équation** est une égalité entre deux expressions où apparaissent des **inconnues** désignées par des lettres. **Résoudre** l'équation, c'est trouver toutes les valeurs possibles pour l'inconnue.

PROPRIÉTÉ : Addition d'un terme et Multiplication par un scalaire

- Dans une équation, on ne change pas les solutions en ajoutant ou en soustrayant un même nombre à chaque membre.
- Dans une équation, on ne change pas les solutions en multipliant ou en divisant chaque membre par un même nombre non nul.

B. Équation du type $ax + b = 0$

PROPRIÉTÉ : Solution

L'équation $ax + b = 0$ avec $a \neq 0$ a une seule solution : $x = -b \div a = -\dfrac{b}{a}$.

PREUVE On soustrait b de chaque côté de l'égalité : $ax + b - b = 0 - b$ c'est à dire $ax = -b$, on divise chaque membre par a, on obtient l'équation $\cancel{a}x \div \cancel{a} = -b \div a$, c'est à dire $x = -b \div a$.

Exemple $4x - 8 = 0 \iff 4x - \cancel{8} + \cancel{8} = 0 + 8$ On ajoute 8 de chaque côté de l'égalité

$\iff 4x = 8$

$\iff \cancel{4}x \div \cancel{4} = 8 \div 4$ On divise par 4 de chaque côté de l'égalité

$\iff x = 2.$

C. Équation du type $ax + b = cx + d$

PROPRIÉTÉ : Résolution

Pour résoudre une équation du type $ax + b = cx + d$, on regroupe les termes « en x » d'un même côté de l'égalité et les nombres de l'autre côté.

Exemple Résolution l'équation $5x + 4 = 2x - 5$:

on regroupe les x à gauche par soustraction de $2x$ à gauche et à droite	$5x + 4 - 2x = \cancel{2x} - 5 - \cancel{2x}$
on réduit les expressions obtenues	$3x + 4 = -5$
on regroupe les nombres à droite par soustraction de 4 à gauche et à droite	$3x + \cancel{4} - \cancel{4} = -5 - 4$
on réduit les expressions obtenues	$3x = -9$
on divise chaque membre de l'équation par 3	$\cancel{3}x \div \cancel{3} = (-9) \div 3$
on réduit les expressions obtenues	$x = -3$

D. Équation-produit

PROPRIÉTÉ : Produit de facteurs nul

Un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul.

$$A \times B = 0 \iff A = 0 \text{ ou } B = 0$$

Exemple Résolution de l'équation $(x-4)(2x+5) = 0$.

Un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un au moins de ses facteurs est nul :

$$\begin{aligned}
(x-4)(2x+5) = 0 \quad &\iff \quad x - 4 = 0 \text{ ou } 2x + 5 = 0 \\
&\iff \quad x - \cancel{4} + \cancel{4} = 0 + 4 \text{ ou } 2x + \cancel{5} - \cancel{5} = 0 - 5 \\
&\iff \quad x = 4 \text{ ou } 2x = -5 \\
&\iff \quad x = 4 \text{ ou } x = -\frac{5}{2}
\end{aligned}$$

Les solutions de l'équation $(x-4)(2x+5) = 0$ sont $-\dfrac{5}{2}$ et 4.

5. Résolution d'une inéquation

PROPRIÉTÉ : Ordre d'une inéquation

- L'ordre est **conservé** lorsqu'on ajoute (ou soustrait) un même nombre aux deux membres d'une inégalité ou lorsqu'on multiplie (ou divise) les deux membres d'une inégalité par un même nombre strictement positif.
- L'ordre est **inversé** lorsqu'on multiplie (ou divise) les deux membres d'une inégalité par un même nombre strictement négatif.

Exemple

- Si $x + 7 < 4$ alors $x + \cancel{7} - \cancel{7} < 4 - 7$ donc $x < -3$ (*soustraction d'un nombre*).
- Si $6x > 24$ alors $\dfrac{\cancel{6}x}{\cancel{6}} > \dfrac{24}{6}$ donc $x > 4$ (*division par un nombre positif*).
- Si $-5x < 35$ alors $\dfrac{-\cancel{5}x}{-\cancel{5}} > \dfrac{35}{-5}$ donc $x > -7$ (*division par un nombre négatif*).

Résoudre une inéquation revient à déterminer toutes les valeurs possibles de l'inconnue telle que l'inégalité soit vraie. On obtient un intervalle, qui peut être réduit à un point ou aucun point.

Exemple Résoudre l'inéquation : $3x - 2 > 5x + 8$.

$$\begin{aligned}
3x - 2 > 5x + 8 \quad &\iff \quad 3x - 2 - 5x > \cancel{5x} + 8 - \cancel{5x} \\
&\iff \quad -2x - 2 > 8 \\
&\iff \quad -2x - \cancel{2} + \cancel{2} > 8 + 2 \\
&\iff \quad -2x > 10 \\
&\iff \quad \frac{-\cancel{2}x}{-\cancel{2}} < \frac{10}{-2} \\
&\iff \quad x < -5
\end{aligned}$$

Les solutions de l'inéquation $3x - 2 > 5x + 8$ sont les nombres x strictement inférieurs à -5.

On peut écrire $\mathcal{S} =]-\infty\,; -5[$.

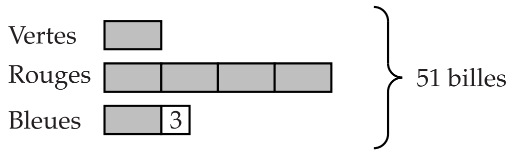
Groupement 1 - Exercice 3 : résolution de problème, équation

Un enseignant d'une classe de CM2 a proposé ce problème à ses élèves.

Dans un bocal, un enfant a des billes vertes, des billes rouges et des billes bleues. Il a 4 fois plus de billes rouges que de billes vertes et il a 3 billes vertes de plus que de billes bleues. En tout il a 51 billes.
Combien a-t-il de billes de chaque couleur ?

D'après un problème du Guide pour enseigner la résolution de problèmes au cours moyen, Ministère de l'éducation nationale, 2021.

1) Voici la réponse proposée par Samira, une élève de la classe de CM2 :



$51 - 3 = 48$

$6\,\square = 48$

$\square = 8 \qquad 4 \times 8 = 32$

$8 + 3 = 11$

Il y a 8 billes vertes, 32 billes rouges et 11 billes bleues, ça fait bien 51 billes.

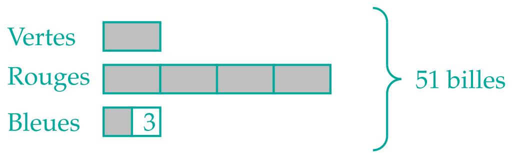
Proposer une version corrigée du schéma utilisé par Samira pour résoudre le problème.

2) a) En notant v le nombre de billes vertes, déterminer, en fonction de v, le nombre de billes rouges et le nombre de billes bleues.

b) Mettre le problème en équation et la résoudre pour répondre algébriquement à la question posée dans l'énoncé

Exemple de corrigé.

1)



$51 + 3 = 54$

$6\,\square = 54$

$\square = 9 \qquad 4 \times 9 = 36$

$9 - 3 = 6$

Il y a 9 billes vertes, 36 billes rouges et 6 billes bleues, ça fait bien 51 billes.

2) Si v est le nombre de billes vertes, il y a 4 fois plus de billes rouges, donc $4v$ billes rouges. Il y a également 3 billes vertes de plus que de billes bleues, donc 3 billes bleues de moins que de billes vertes, soit $v - 3$ billes bleues.
Dans le bocal, il y a v billes vertes, $4v$ billes rouges et $v - 3$ billes bleues.

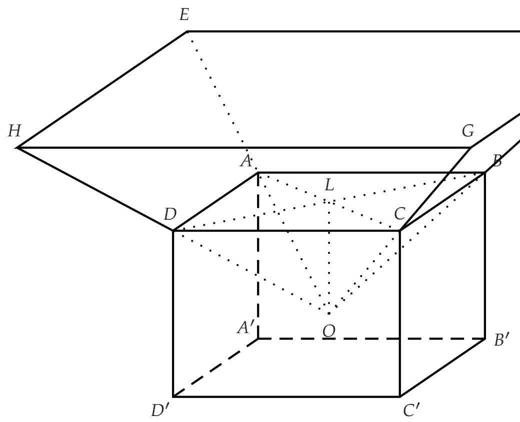
3) La somme des billes vertes, rouges et bleues donne 51. Donc, on peut établir l'équation suivante :

$$\begin{aligned} v + 4v + v - 3 = 51 &\iff 6v - 3 = 51 \\ &\iff 6v = 51 + 3 = 54 \\ &\iff v = \frac{54}{6} = 9. \end{aligned}$$

Le bocal contient 9 billes vertes, 36 billes rouges et 6 billes bleues.

Groupement 2 - Exercice 3 - Partie B : calcul algébrique, équation

On considère un pavé droit $ABCDA'B'C'D'$ avec $DD' = 5$ cm ; $DC = 6$ cm et $DA = 7$ cm.
On note L le point d'intersection des diagonales $[AC]$ et $[BD]$.
On creuse ce pavé, en retirant une pyramide $OABCD$ de hauteur $[OL]$. On pose $OL = x$, où x est un nombre compris entre 0 et 5.
Le pavé creusé que l'on obtient est le socle en bois d'un trophée. Sur ce socle, on pose une pyramide en verre $OEFGH$ qui est un agrandissement de la pyramide $OABCD$ de rapport 2.



1) Exprimer le volume de la pyramide $OABCD$ en fonction de x.
2) Montrer que le volume du socle en bois est $210 - 14x$.
3) Montrer que le volume de la pyramide en verre $OEFGH$ est $112x$.
4) Quelle valeur choisir pour x, pour que le volume de la pyramide en verre soit égal au double du volume du socle en bois ?

Exemple de corrigé.

1) Les longueurs sont exprimées en cm, les volumes en cm^3.
$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABCD} \times OL = \frac{1}{3} \times 6 \times 7 \times x = 14x$.
Le volume de la pyramide est égal à $14x$.

2) Le volume du socle en bois correspond au volume du pavé creusé et s'obtient en soustrayant le volume de la pyramide $OABCD$ au volume du pavé droit $ABCDA'B'C'D'$:
$\mathcal{V} = 5 \times 6 \times 7 - 14x = 210 - 14x$.
Le volume du socle en bois est égal à $210 - 14x$.

3) La pyramide $OEFGH$ est un agrandissement de facteur 2 de la pyramide $OABCD$.
Son volume est donc 2^3 fois plus grand.
$\mathcal{V}_{OEFGH} = 2^3 \times \mathcal{V}_{OABCD} = 8 \times 14x = 112x$.
Le volume de la grande pyramide en verre est égal à $112x$.

4) On résout l'équation : $112x = 2 \times (210 - 14x) \iff 112x = 420 - 28x$

$$\iff 112x + 28x = 420$$
$$\iff 140x = 420$$
$$\iff x = \frac{420}{140} = 3.$$

Le volume de la pyramide en verre est égal au double du volume du socle en bois pour $x = 3$.

Vu au CRPE en 2022

Groupement 2 - Exercice 4 - Questions 2 à 5 : calcul algébrique, équation

Adam propose le programme de calcul suivant :
« Si le nombre de départ est x, alors le résultat est $(2x+3)(x-2)$ ».

1) Pauline, quant à elle, propose le programme de calcul suivant.

Choisis un nombre. Élève-le au carré. Soustrais 3. Multiplie par 2. Soustrais le nombre de départ.

a) Montrer que si le nombre de départ est 3, le résultat obtenu est égal à 9.

b) Quel est le résultat donné par le programme si le nombre de départ est $\frac{7}{3}$?

2) Montrer que, pour un même nombre de départ, les programmes de calcul d'Adam et Pauline donnent le même résultat.

3) Déterminer le ou les nombres de départ possibles pour que les résultats des programmes de calcul soient nuls. Justifier.

Exemple de corrigé.

1) a) $3 \xrightarrow{x^2} 9 \xrightarrow{-3} 6 \xrightarrow{\times 2} 12 \xrightarrow{-3} 9.$

Si le nombre de départ est 3, alors le résultat est 9.

b) $\frac{7}{3} \xrightarrow{x^2} \frac{49}{9} \xrightarrow{-3} \frac{22}{9} \xrightarrow{\times 2} \frac{44}{9} \xrightarrow{-\frac{7}{3}} \frac{33}{9}$

Si le nombre de départ est $\frac{7}{3}$, alors le résultat est $\frac{23}{9}$.

2) Pour Adam, pour un nombre quelconque x choisi, le résultat est égal à

$$\begin{aligned}(2x+3)\times(x-2) &= (2x)\times x-(2x)\times 2+3\times x-3\times 2\\ &= 2x^2-4x+3x-6\\ &= 2x^2-x-6\end{aligned}$$

Pour Pauline, pour un nombre quelconque x choisi, le résultat est égal à

$x \xrightarrow{x^2} x^2 \xrightarrow{-3} x^2-3 \xrightarrow{\times 2} 2x^2-6 \xrightarrow{-x} 2x^2-x-6$

Pour un même nombre de départ, les programmes d'Adam et de Pauline sont équivalents.

3) Les deux programmes donnant le même résultat, il suffit de choisir l'un d'entre eux et de trouver les valeurs pour lesquelles il est nul.

On choisit celui d'Adam, plus simple à résoudre sous sa forme factorisée : on résout donc l'équation $(2x+3)(x-2)=0$.

Un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul.

$2x+3=0 \iff x=-\frac{3}{2}$ ou $x-2=0 \iff x=2$.

Pour $x=-\frac{3}{2}$ et $x=2$, le résultat des programmes est nul.

Groupement 3 - Exercice 1 - Question 2 : puissances

Une seule des quatre réponses proposées est exacte. Donner la bonne réponse en la justifiant.

Question :	**A**	**B**	**C**	**D**
Le 1er juin, Nicolas lance une rumeur en la partageant avec trois personnes. Chaque jour, une personne prévenue la veille prévient trois nouvelles personnes qui ne sont pas encore informées. Combien de personnes apprennent la rumeur le 10 juin ?	30	1 000	59 049	177 147

Exemple de corrigé.

Au premier jour, 3 personnes sont prévenues, soit 3^1 ; le deuxième jour chacune de ces 3 personnes en préviennent 3, ce qui fait 9 personnes, soit 3^2 ; le troisième jour, 27 personnes sont prévenues, soit 3^3...

Au dixième jour, on aura 3^{10} personnes prévenues, soit 59 049.

La bonne réponse est C.

Groupement 3 - Exercice 3 - Partie 1 - Question 3 : calcul algébrique, équation

Une enseignante a le projet d'installer un potager rectangulaire $ADEF$ sur une parcelle de forme triangulaire ABC dans l'enceinte de l'école.

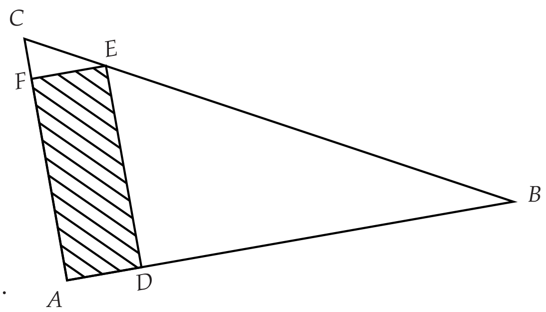
Les points A, B, C, D, E et F sont tels que :

– $AB = 24$ m, $AC = 10$ m et $BC = 26$ m ;

– $D \in [AB]$, $E \in [BC]$ et $F \in [AC]$;

– Le triangle ABC est rectangle en A.

La figure ci-contre n'est pas à l'échelle.



On note x la longueur, exprimée en mètre, du segment $[AD]$.

1) Montrer que $DE = 10 - \dfrac{5}{12}x$.

2) En déduire l'aire du rectangle $ADEF$ en fonction de x.

Exemple de corrigé.

1) $ADEF$ est un rectangle, les côtés (AF) et (DE) sont donc parallèles.

De plus, les points B, D, A et B, E, C sont alignés dans cet ordre.

D'après le théorème de Thalès, avec des mesures de longueurs en mètre, on a :

$$\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC} = \frac{DE}{AC} \iff \frac{24-x}{24} = \frac{BE}{26} = \frac{DE}{10}$$
$$\implies DE = \frac{(24-x)\times 10}{24}$$
$$\implies DE = \frac{240-10x}{24}$$
$$\implies DE = 10 - \frac{5x}{12}.$$

La longueur DE, en mètre, est égale à $10 - \dfrac{5}{12}x$.

2) $\mathcal{A}_{ADEF} = AD \times DE = x \times \left(10 - \dfrac{5}{12}x\right) = 10x - \dfrac{5}{12}x^2$.

L'aire du triangle $ADEF$ est égale à $10\,x - \dfrac{5}{12}x^2$.

Entraînement

Maîtriser les bases avec MathenPoche

Classe	N°	Thème	Dans le cours
5e	A6	Le rôle de la lettre et du signe égal	3. et 4.
	A7	Calcul littéral	3.
	A8	Équations, inéquations	4. et 5.
4e	A4	Puissances	1.
	A6	Le rôle de la lettre et du signe égal	3. et 4.
	A7	Calcul littéral	3.
	A8	Équations, inéquations	4. et .
3e	A7	Calcul littéral	3.
	A8	Équations et inéquations	4. et 5.
2nde	N2	Nombres et calculs numériques	1. et 2.
	N4	Identités remarquables et calculs algébriques	3. et 4.

1 Méli-mélo de calculs, le retour !

Simplifier les écritures des puissances et des radicaux suivants :

1) $8^2 \times 8^4$

2) $10^{-2} \times 10^{-5}$

3) $\dfrac{13^5}{13^3}$

4) $(-3)^2 \times (-3)^5$

5) $\sqrt{8}$

6) $\sqrt{\dfrac{49}{100}}$

7) $\sqrt{20}$

8) $-6\sqrt{72} + 4\sqrt{2} - 11\sqrt{8}$

9) $\sqrt{\dfrac{81}{25}} \times \sqrt{\dfrac{50}{27}}$

2 Des chiffres... et des lettres

1) Développer les expressions suivantes :

$5(x-2)$ $\quad$ $(-8) \times (k+5)$

$(x+5)(4x-1) + (3x+7)(2x-9)$ $\quad$ $(5x+3)(x-1) - (7x+9)(2x-5)$

2) Factoriser les expressions suivantes :

$7x + 21$ $\quad$ $36 + 42a$ $\quad$ $6y + 7y$

$(x+7)(4x+5) + (x+7)(2x-1)$ $\quad$ $(7x-8)(4x+3) - (7x-8)(5x+2)$

3 CRPE 2008 G6

On se propose de calculer A$= 50\,000\,006 \times 70\,000\,008$.

1) En tapant ce produit sur une calculatrice scientifique, on peut voir apparaître sur l'écran : $3,50000082 \times 10^{15}$. Justifier sans calculer A que la valeur affichée n'est pas la valeur exacte de A.

2) Toujours sans calculer A, démontrer que $35 \times 10^{14} < A < 48 \times 10^{14}$.
En déduire le nombre de chiffres de A.

3) Le nombre A peut aussi s'écrire $(5 \times 10^7 + 6) \times (7 \times 10^7 + 8)$.
En utilisant les produits 5×7 ; 5×8 ; 6×7 et 6×8, déterminer la valeur exacte de A.

4) Soit B$= 48\,506\,557 \times 505\,149$.
Calculer en utilisant une calculatrice : $48\,506 \times 505$; 557×505 ; $48\,506 \times 149$; 557×149.
En déduire, sans nouvelle utilisation de la calculatrice, la valeur exacte de B.

4 **CRPE 2009 G1**

Les deux questions sont indépendantes.

1) a) Développer et réduire l'expression suivante où x est un nombre réel : $(x+1)(x-1)-(x+2)(x-2)$.

b) Utiliser le résultat précédent pour trouver rapidement sans utiliser la calculatrice : $297 \times 295 - 298 \times 294$.

2) Observer les résultats ci dessous :

- $1^2 - 0^2 = 1$; $2^2 - 1^2 = 3$; $3^2 - 2^2 = 5$; $4^2 - 3^2 = 7$.

Les égalités ci-dessus permettent de conjecturer une propriété. Deux sont proposées ici :

1. Si a et b sont deux nombres consécutifs, alors leur somme est égale à la différence de leurs carrés.
2. Si a et b sont deux nombres consécutifs, alors leur somme est égale au carré de leur différence.

Une seule de ces propriétés est exacte. Laquelle ? La démontrer.

5 **CRPE 2017 G1 et G2, 2018 G1**

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant la réponse.
Une réponse exacte, mais non justifiée, ne rapporte aucun point. Une réponse fausse n'enlève pas de point.

- **Affirmation 1 :** 6 est l'unique solution de l'équation $(x-7)(x+4) = (x-7)(16-x)$.
- Dans un club sportif, les trois quarts des adhérents sont mineurs (ils ont moins de 18 ans) et le tiers des adhérents majeurs a plus de 25 ans. **Affirmation 2 :** un adhérent sur six a donc entre 18 ans et 25 ans.
- **Affirmation 3 :** l'inverse de la somme de deux nombres est égal à la somme des inverses de ces deux nombres.

6 **CRPE 2017 G2**

Un batelier descend une rivière de 120 km en un certain nombre de jours n, puis il la remonte.
La distance parcourue quotidiennement lors de la remontée est inférieure de 6 km à celle parcourue quotidiennement lors de la descente. Le batelier met au total un jour de plus pour remonter que pour descendre.
On considère qu'il descend à vitesse constante et qu'il remonte à vitesse constante.

1) Exprimer en fonction de n, la distance, en kilomètre, parcourue quotidiennement pendant la descente et la distance, en kilomètre, parcourue quotidiennement pendant la remontée.

2) Montrer que $\dfrac{120}{n+1} = \dfrac{120}{n} - 6$.

3) Déduire de la question précédente que $n(n+1) = 20$.

4) En déduire la valeur de n et interpréter ce résultat.

7 **CRPE 2015 G3**

Les deux questions suivantes sont indépendantes.

1) L'objectif de cette question est d'établir un résultat pour la comparaison de deux nombres ayant pour écritures fractionnaires $\dfrac{n-1}{n}$ et $\dfrac{n}{n+1}$ où n est un nombre entier naturel non nul.

a) Comparer $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{2}{3}$; $\dfrac{12}{13}$ et $\dfrac{13}{14}$; $\dfrac{176}{177}$ et $\dfrac{177}{178}$. Quel résultat général peut-on conjecturer ?

b) Démontrer ce résultat.

c) Comparer les nombres $\dfrac{987\,654\,322}{987\,654\,323}$ et $\dfrac{987\,654\,321}{987\,654\,322}$ sans effectuer de calcul.

2) On considère un nombre rationnel $\dfrac{p}{q}$, où p et q sont des nombres entiers, q étant non nul.

Ce nombre a pour valeur approchée par excès à 10^{-3} près 1,118 et on sait de plus que $q = 1789$.

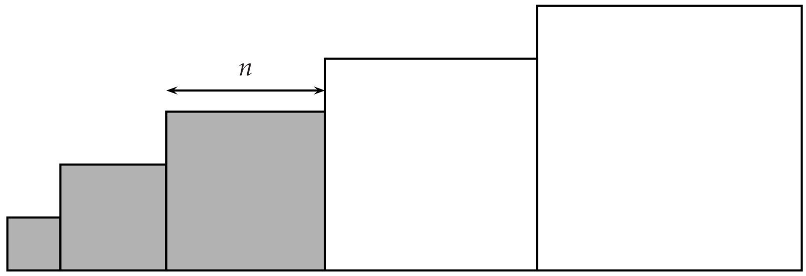
Quelle(s) est (sont) la (les) valeur(s) possible(s) pour p ?

Entraînement

8 CRPE 2019 G1

La situation des cinq carrés

La figure ci-dessous qui n'est pas à l'échelle représente cinq carrés dont les mesures des côtés, en centimètre, sont des nombres entiers consécutifs. Les trois plus petits carrés sont gris, les deux autres sont blancs.



On désigne par n la mesure, exprimée en centimètres, du côté du carré gris le plus grand (carré du milieu). L'objectif est de chercher les valeurs de n pour lesquelles la somme des aires des trois carrés gris est égale à la somme des aires des deux carrés blancs.

1) Montrer que résoudre ce problème revient à résoudre l'équation $n^2 - 12n = 0$.

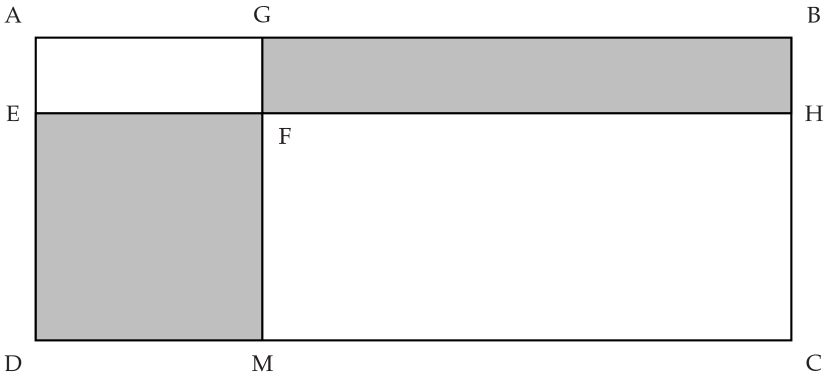
2) Quelles sont les solutions de l'équation $n^2 - 12n = 0$? Justifier la réponse.

3) Ces solutions peuvent-elles être retenues pour le problème de la « situation des cinq carrés » ? Justifier votre réponse.

4) Réaliser une figure à l'échelle $\frac{1}{5}$ d'une solution du problème de la « situation des cinq carrés » en détaillant les calculs effectués pour construire la figure.

9 Un rectangle qui ne manque pas d'aire

On considère le rectangle ABCD représenté ci-dessous tel que AB = 20 cm et AD = 8 cm (la figure n'est pas à taille réelle).



Les points E, F, G, H et M sont tels que : E appartient à [AD] ; M appartient à [DC] ; G appartient à [AB] ;
le quadrilatère EDMF est un carré ; le quadrilatère GFHB est un rectangle.
On admettra que G, F et M sont alignés et que E, F et H le sont également. On note DE = x.

1) Quelles sont les valeurs que peut prendre x ?

2) Démontrer que l'aire de la partie grisée est égale à : $2x^2 - 28x + 160$.

3) Établir l'égalité : $2x^2 - 28x + 160 = 2(x-7)^2 + 62$.

4) Pour quelle valeur de x l'aire de la partie grisée est-elle minimale ?

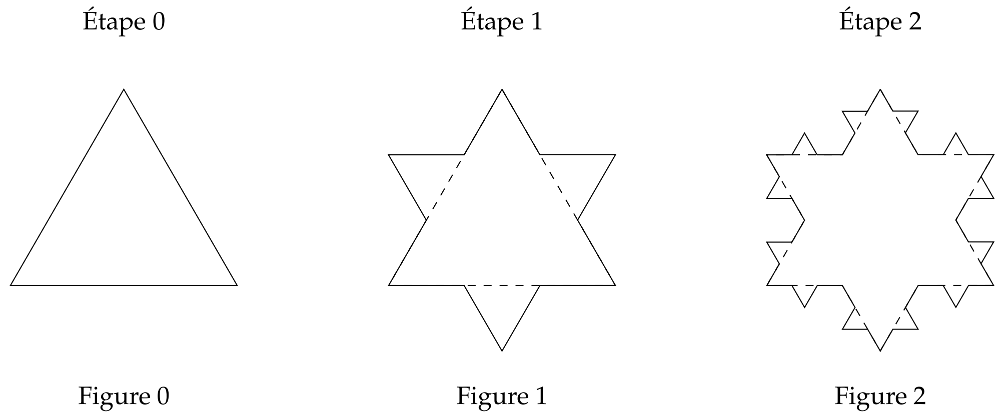
5) Pour quelle(s) valeur(s) de x l'aire de la partie grisée est-elle égale à $112\,\text{cm}^2$?

10 **CRPE 2020 G7**

Le mathématicien suédois von Koch a imaginé en 1904 une figure géométrique obtenue à partir d'un triangle équilatéral par réitération d'une transformation appliquée à chaque côté d'un triangle. Cette figure s'appelle le flocon de von Koch.

Pour passer d'une figure à la suivante, chaque côté est partagé en trois segments de même longueur. On remplace le tiers central de chaque segment par un triangle équilatéral sans base. On répète cette opération sur la figure obtenue.

On donne les trois premières étapes de construction :



1) a) Donner le nombre de côtés de la Figure 1, puis de la Figure 2.
   b) Déterminer le nombre de côtés de la Figure 3.
   c) Exprimer le nombre de côtés de la Figure n obtenue à l'Étape n pour un nombre entier positif n.

On suppose que le côté du triangle équilatéral de la Figure 0 mesure 1 cm.
On appelle $L_0, L_1, L_2, \dots L_n$ les longueurs d'un côté des Figures 0, 1 , 2, ..., n.
On appelle $P_0, P_1, P_2, \dots P_n$ les périmètres des Figures 0, 1 , 2, ..., n.
Par exemple, $L_0 = 1$ et $P_0 = 3$.

2) a) Justifier que $L_1 = \frac{1}{3}$, puis donner sous forme de fraction irréductible les valeurs de L_2 et L_3/
   b) Donner une expression de L_n en fonction de n.
3) a) Justifier que $P_1 = 4$, puis donner les valeurs de P_2 et P_3.
   b) Donner une expression de P_n en fonction de n.
4) Peut-on trouver un nombre entier n tel que le périmètre P_n de la Figure n soit supérieur à 1 km ? Expliquer le raisonnement suivi.

Entraînement

NOMBRES & CALCULS

4

Arithmétique

Allegory of Arithmetic, Margarita Philosophica (1504) © Gregor Reisch

Un peu d'histoire

L'arithmétique est une branche des mathématiques qui, entre autre, étudie les propriétés des nombres entiers. Elle est parfois appelée « la science des nombres ». Dans l'école Pythagoricienne du 6e siècle avant J.-C., elle fait partie des quatre sciences mathématiques avec la géométrie, l'astronomie et la musique.

Avec l'arrivée des chiffres indo-arabes, les opérations sur les nombres deviennent plus simples. Sur la gravure ci-dessus de **Gregor Reich**, on y voit un algoriste : **Boethius** (à gauche) effectuer une opération avec les chiffres indo-arabes alors que l'abaciste **Pythagore** (à droite), effectue une même opération à l'aide d'un abaque à jetons. Dame Arithmétique montre le triomphe de l'algoriste.

Il faut ensuite attendre le début du16e siècle avec notamment **Fermat** pour que cette science fasse un bon en avant. Actuellement, l'arithmétique, et plus particulièrement les nombres entiers font partie intégrante des systèmes de codages en tous genres !

Cours

1. Multiples et diviseurs

DÉFINITION : Division euclidienne

Effectuer la division euclidienne d'un **dividende** par un **diviseur**, c'est trouver deux nombres entiers appelés **quotient** et **reste** tels que :

« dividende = diviseur × quotient + reste » avec reste < diviseur.

Exemple

Avec une bouteille de 150 cL de jus, combien peut-on remplir de verres de 8 cL ?

Réponse : $150 = 18 \times 8 + 6$
donc, on peut remplir 18 verres de 8 cL et il restera 6 cL.

Correction

dividende

$$\begin{array}{rr|l} & 1\,5\,0 & 8 \leftarrow \text{diviseur} \\ \cline{3-3} - & 8 & 1\,8 \leftarrow \text{quotient} \\ \cline{2-2} & 7\,0 & \\ - & 6\,4 & \\ \cline{2-2} & 6 & \leftarrow \text{reste} \end{array}$$

DÉFINITION : Multiple, diviseur

Soient a et b deux nombres entiers. Lorsque le reste de la division euclidienne de a par b est égal à 0, on dit que a est un **multiple** de b, ou que b est un **diviseur** de a, ou encore que a est **divisible** par b. Autrement dit, il existe un entier k tel que $a = k \times b$.

Exemple

- 15 est multiple de 3 car $15 = 3 \times 5 + 0$, ou 3 est un diviseur de 15, ou 15 est divisible par 3.
- 17 n'est pas un multiple de 3 car $17 = 3 \times 5 + 2$.
- Les diviseurs de 24 sont 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 24. Ceux de 36 sont 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 9 ; 12 ; 18 ; 36.
- Il y a une infinité de multiples de 18, comme par exemple 18 ; 36 ; 54 ; 180...

PROPRIÉTÉ : Critères de divisibilité

- un nombre est divisible par 2 s'il se termine par 0 ; 2 ; 4 ; 6 ou 8, c'est un nombre pair ;
- un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est un multiple de 3 ;
- un nombre est divisible par 5 s'il se termine par 0 ou 5 ;
- un nombre est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est un multiple de 9 ;
- un nombre est divisible par 10 s'il se termine par 0.

Exemple 658 254 est-il divisible par 2 ? 3 ? 5 ? 9 ? 10 ?

- Pour les critères de divisibilité par 2, 5 et 10, il suffit de regarder le dernier chiffre, qui est 4. Ce nombre est divisible par 2 (il est pair), mais pas par 5 et 10.
- Pour les critères de divisibilité par 3 et 9, il suffit de calculer la somme des chiffres qui composent le nombre et de vérifier si cette somme est un multiple de 3 ou 9.
  $6 + 5 + 8 + 2 + 5 + 4 = 30$ est multiple de 3, mais pas de 9 donc, 658 254 est divisible par 3 mais pas par 9.
- Conclusion : 658 254 est divisible par 2 et 3.

2. Nombres premiers

■ DÉFINITION : **Nombre premier**

Un entier naturel $p > 1$ est un **nombre premier** s'il admet comme seuls diviseurs 1 et p.

MÉTHODE 1 **Crible d'Érathostène**

Il s'agit d'une méthode permettant de trouver tous les nombres premiers inférieurs à un certain nombre n. Pour déterminer ces nombres, on remplit un tableau de nombres jusqu'à n, et on procède par élimination en commençant par éliminer 1, puis :

- on garde le nombre suivant non barré 2 et on élimine tous les multiples de 2 ;
- on garde le nombre suivant non barré 3 et on élimine tous les multiples de 3 et ainsi de suite jusqu'à n...

Exercice d'application Pour $n = 100$, on a :

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Correction donc, les nombres premiers inférieurs à 100 sont :
2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 et 97.

■ PROPRIÉTÉ

Les nombres premiers inférieurs à 30 sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 et 29.

Pour vérifier qu'un nombre est premier, on vérifie qu'il n'est divisible par aucun des nombres premiers inférieurs à sa racine carrée.

Exemple 97 est-il un nombre premier ?
$\sqrt{97} \simeq 9,8$ donc, il on teste s'il existe un nombre premier inférieur ou égal à 9 qui divise 97 :
97 n'est pas divisible par 2, ni 3, ni 5, ni 7 donc, 97 est un nombre premier.

Cours

PROPRIÉTÉ : Décomposition

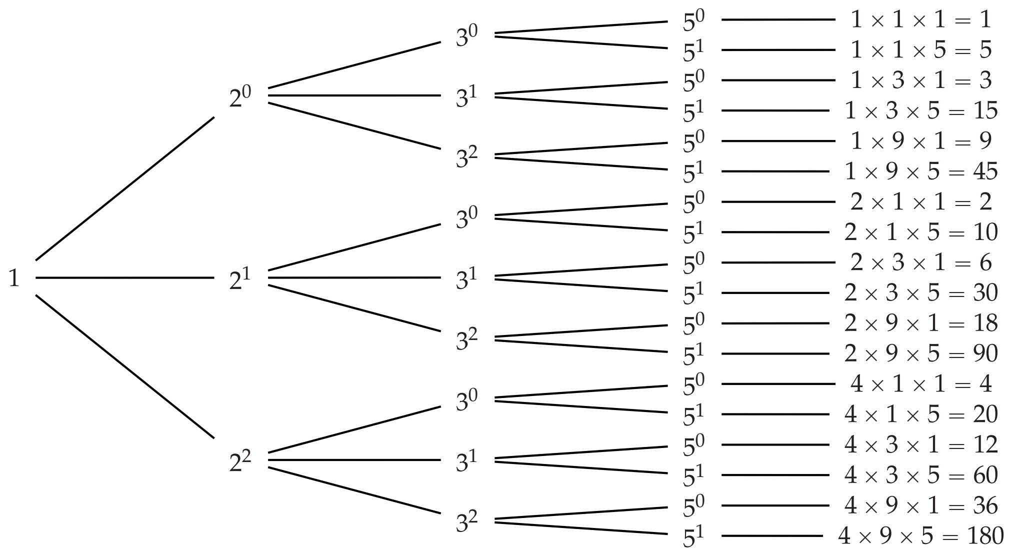
Tout nombre entier admet une décomposition en produit de facteurs premiers, unique à l'ordre des facteurs près.

Pour déterminer cette décomposition, on teste si le nombre est divisible par les nombres premiers successifs, éventuellement plusieurs fois.

Exemple La décomposition de 180 en produit de facteurs premiers donne :
$180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$ ou encore, $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$.

$$\begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Grâce à cette décomposition, on peut retrouver tous les diviseurs de 180 : en effet, un diviseur de 180 sera nécessairement un nombre de la forme $2^\alpha \times 3^\beta \times 5^\gamma$ où $\alpha = 0, 1$ ou 2, $\beta = 0, 1$ ou 2 et $\gamma = 0$ ou 1.
Il y en a $(\alpha + 1) \times (\beta + 1) \times (\gamma + 1) = 3 \times 3 \times 2 = 18$, que l'on peut trouver, par exemple, à partir d'un arbre :



On obtient tous les diviseurs de 180 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 9 ; 10 ; 12 ; 15 ; 18 ; 20 ; 30 ; 36 ; 45 ; 60 ; 90 ; 180.

DÉFINITION : Irréductibilité

Une fraction **irréductible** est une fraction dont le numérateur et le dénominateur n'ont pas de diviseur commun autre que 1. On ne peut donc pas la simplifier davantage.

Exemple $\dfrac{15}{30} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$. Parmi ces écritures du nombre 0,5 seule la fraction $\dfrac{1}{2}$ est irréductible.

MÉTHODE 2 Rendre une fraction irréductible

Pour rendre irréductible une fraction, on peut procéder de la façon suivante :
- on décompose le numérateur et le dénominateur en produit de facteurs premiers ;
- on simplifie par tout nombre commun au numérateur et au dénominateur.

Exercice d'application

Rendre la fraction $\dfrac{90}{84}$ irréductible.

Correction

$$\frac{90}{84} = \frac{2 \times 3^2 \times 5}{2^2 \times 3 \times 7} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{3} \times 3 \times 5}{\cancel{2} \times 2 \times \cancel{3} \times 7} = \frac{3 \times 5}{2 \times 7} = \frac{15}{14}.$$

3. PGCD

DÉFINITION : PGCD

Soient a et b deux entiers, on appelle PGCD de a et b le **Plus Grand Commun Diviseur** de a et b. On le note PGCD(a, b) ou pgcd(a, b).

MÉTHODE 3 Calcul du PGCD à partir des diviseurs

On détermine tous les diviseurs des deux nombres et on prend le plus grand de leurs diviseurs communs.

Exercice d'application

Déterminer le PGCD de 24 et 36.

Correction

Les diviseurs de 24 sont 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 24.
Ceux de 36 sont 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 9 ; 12 ; 18 ; 36.
Les diviseurs communs à 24 et 36 sont : 1; 2; 3; 4; 6 et 12.
Donc, PGCD$(24, 36) = 12$.

MÉTHODE 4 Calcul du PGDC à partir de la décomposition

On effectue la décomposition en facteurs premiers de chacun des nombres, leur PGCD s'obtient en multipliant les facteurs communs munis de la puissance minimale.

Exercice d'application

Déterminer le PGCD de 24 et 36.

Correction

$24 = 2^3 \times 3$ et $36 = 2^2 \times 3^2$ donc, PGCD$(24, 36) = 2^2 \times 3 = 12$.

MÉTHODE 5 Calcul du PGCD par l'algorithme d'Euclide

On déroule l'algorithme d'Euclide, le PGCD de deux nombres est le dernier reste non nul.

Exercice d'application

Déterminer le PGCD de 24 et 36.

Correction

$$\begin{aligned} 36 &= 24 \times 1 + 12 \\ 24 &= 12 \times 2 + 0 \end{aligned}$$

Le dernier reste non nul est 12 donc PGCD$(36, 24) = 12$.

DÉFINITION : Nombres premiers entre eux

Deux nombres sont dits **premiers entre eux** si leur PGCD est égal à 1.

Exemple Les nombres 126 et 715 sont premiers entre eux car
$126 = 2 \times 3^2 \times 7$ et $715 = 5 \times 11 \times 13$ donc, PGCD$(126, 715) = 1$.

REMARQUE : Deux nombres sont premiers entre eux s'ils n'ont aucun diviseur commun.

PROPRIÉTÉ

Si n est multiple de a et de b et si a et b sont premiers entre eux, alors n est multiple de $a \times b$.

Exemple Si n est multiple de 4 et de 3, il est multiple de 12.
Mais : si n est multiple de 6 et de 8, il n'est pas forcément multiple de 48 (exemple : 24).

Entraînement

Maîtriser les bases avec MathenPoche

Classe	N°	Thème	Dans le cours
6e	N2	Division euclidienne, divisibilité	1. et 2.
5e	A3	Nombres rationnels	4.
	A4	Nombres entiers	1. et 2.
4e	A3	Nombres rationnels	4.
	A5	Nombres entiers	3.
3e	A5	Nombres entiers	3. et 4.

1 **CRPE 2020 G5**

Pour chacune des affirmations ci-dessous, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Affirmation 1 : « Le nombre $\dfrac{27}{45}$ est un nombre décimal. »

Affirmation 2 : « Si a et b sont deux nombres décimaux positifs non nuls, alors le résultat de la division de a par b est plus petit que a. »

Affirmation 3 : « La somme de trois entiers consécutifs est toujours un multiple de 3. »

Affirmation 4 : « 42 possède exactement 7 diviseurs positifs. »

2 **CRPE 2017 G1-G3 et 2018 G3**

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant la réponse.
Une réponse exacte, mais non justifiée, ne rapporte aucun point. Une réponse fausse n'enlève pas de point.

1) Affirmation : « 117 est un nombre premier. »

2) a) Affirmation « Pour n'importe quel nombre entier n, $(n+2)^2-(n-2)^2$ est un multiple de 8. »

b) Affirmation : « Pour n'importe quel nombre entier n, $(n+2)^2-(n-2)^2$ est un multiple de 32. »

3) Affirmation : « Il existe au moins un nombre entier pair supérieur à 7, divisible par 3 mais divisible ni par 9 ni par 4. »

4) Pour réaliser un collier en perles, Camille enfile 200 perles en répétant le modèle suivant : une perle jaune, puis trois perles rouges, puis deux perles blanches. Affirmation : La couleur de la 147e perle sera rouge.

5) Affirmation : 126 possède exactement 10 diviseurs.

3 **CRPE 2020 G5**

1) a) Soit N un nombre entier compris entre 100 et 999.
N s'écrit sous la forme $N = a \times 100 + b \times 10 + c$ où a, b et c sont des entiers compris entre 0 et 9.
Démontrer que si le nombre formé par le chiffre des dizaines et le chiffre des unités est divisible par 4 alors N est divisible par 4. Par exemple, pour 732, comme 32 est divisible par 4 alors 732 est divisible par 4.

b) Cette règle fonctionne-t-elle pour la divisibilité par 8, c'est à dire, « Si le nombre formé par le chiffre des dizaines et le chiffre des unités d'un nombre N supérieur à 10 est divisible par 8 alors N est divisible par 8 » ?

2) On considère toujours un nombre entier N compris entre 100 et 999 s'écrivant sous la forme sous la forme $N = a \times 100 + b \times 10 + c$ où a, b et c sont des entiers compris entre 0 et 9.
Calculer $N - (a+b+c)$. Démontrer que si $a+b+c$ est divisible par 9, alors N l'est aussi.

4 **CRPE 2019 G3**

1) Pour tout nombre entier n, montrer que $30n + 25$ est divisible par 5.

2) Voici un programme de calcul :

- Choisir un nombre entier.
- Multiplier par 3.
- Ajouter 5.
- Elever au carré.
- Soustraire 9 fois le carré du nombre de départ

a) Montrer que ce programme a pour résultat 265 si le nombre entier choisi est 8. Les calculs seront détaillés.

b) Quel résultat obtient-on si le nombre entier choisi est -56 ?

c) Montrer que le résultat de ce programme de calculs, quel que soit le nombre de départ, est divisible par 5.

5 **CRPE 2005 Réunion**

Étant donné un entier n supérieur ou égal à 10, on appelle associé de n l'entier obtenu en intercalant un 0 entre le chiffre des dizaines et celui des unités de n. Par exemple, l'associé de 5 467 est 54 607.

1) Quel est l'associé de 768 492 ?

2) L'entier 2 005 est-il l'associé d'un nombre ? Si oui, duquel ?

3) **a)** Démontrer la propriété suivante : si n est un entier divisible par 9, alors son associé l'est également.

b) Formuler la réciproque de la propriété précédente.

c) Cette réciproque est-elle vraie ? Justifier.

4) Énoncer une condition nécessaire et suffisante portant sur l'entier n pour que son associé soit divisible par 4. La démontrer.

5) Démontrer que les restes de la division euclidienne de n et de son associé par 5 sont les mêmes.

6 **CRPE 2003 Rouen**

Introduction : le but de cet exercice est de mettre en évidence et d'utiliser un critère de divisibilité par 7.

1) Donner tous les nombres entiers naturels à un et deux chiffres divisibles par 7.

2) *Description et utilisation de la procédure :*

voici deux exemples mettant en œuvre une même procédure permettant de déterminer si un nombre entier naturel est divisible par 7 ou non.

574 est-il divisible par 7 ?

$$\begin{array}{r} 5\ 7\,|\,4 \quad \times 2 \\ -\quad 8 \\ \hline 4\ 9 \end{array}$$

49 est divisible par 7 donc 574 l'est aussi.

827 est-il divisible par 7 ?

$$\begin{array}{r} 8\ 2\,|\,7 \quad \times 2 \\ -\ 1\ 4 \\ \hline 6\ 8 \end{array}$$

68 n'est pas divisible par 7 donc 827 non plus.

a) En appliquant la même procédure, dire si les nombres 406, 895 et 3 906 sont divisibles par 7.

b) Rédiger un texte décrivant, dans le cas général, la procédure permettant de déterminer si un nombre entier naturel est divisible par 7.

3) *Justification :*

a) On décompose tout nombre entier naturel E sous la forme $E = 10v + u$ où v est un nombre entier naturel et u un nombre entier naturel à un chiffre. Ecrire cette décomposition pour 273 et 1 856.

b) Exprimer en fonction de v et u le nombre obtenu en appliquant la procédure précédente à un nombre entier naturel E.

c) Montrer que si ce nombre obtenu après application de la procédure est divisible par 7 alors E sera lui aussi divisible par 7.

Entraînement

7 CRPE 2009 G6

Toutes les réponses devront être justifiées.

Un entier naturel N est composé de trois chiffres dont le produit est 120 et la somme 16.

1) Montrer que N ne contient ni 0, ni 1, ni 2.

2) N peut-il contenir le chiffre 7 ? le chiffre 9 ?

3) Déterminer un nombre N solution du problème ci-dessus en explicitant votre procédure. Peut-on en déduire d'autres solutions ? Si oui, lesquelles ?

4) Déterminer tous les nombres N solutions de ce problème.

8 CRPE 2015 G1

A et B sont deux nombres entiers positifs tels que :

- 111 est un multiple du nombre entier positif A ;
- A − B est un nombre entier positif ou nul divisible par 10 ;
- B est le cube d'un nombre entier.

Trouver toutes les valeurs possibles pour A et B.

9 CRPE 2009 G2

Dans cet exercice, a, b et c sont des chiffres compris entre 1 et 9. On considère des nombres écrits en base dix avec ces chiffres et on note, par exemple, $\overline{bac}$ le nombre dont b est le chiffre des centaines, a celui des dizaines et c celui des unités. Les questions sont indépendantes.

1) Parmi les nombres 7, 13, 57 et 61, lequel n'est pas un nombre premier ? Justifier.

2) **a)** Le nombre 3 737 est-il un nombre premier ? Justifier.

b) Un nombre de la forme $\overline{abab}$ peut-il être un nombre premier ? Justifier.

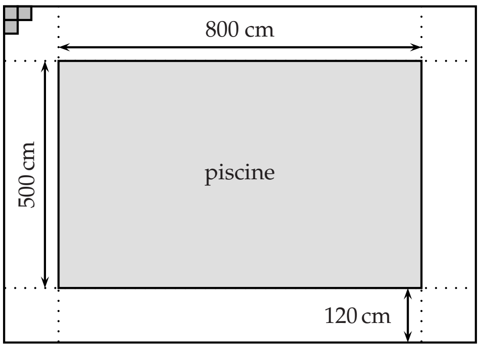
3) **a)** On considère les trois nombres $\overline{abc}$, $\overline{abb}$ et $\overline{acc}$. Montrer que la somme de ces trois nombres est un nombre divisible par 3.

b) On considère les deux nombres $\overline{cba}$ et $\overline{bba}$. Proposer un troisième nombre de trois chiffres, uniquement formé avec des chiffres choisis parmi les chiffres a, b et c, pour que la somme des trois nombres soit divisible par 3. Justifier.

10 CRPE 2016 G1

Monsieur Durand veut faire poser des dalles carrées autour de la piscine sur une largeur de 120 cm comme indiqué sur le schéma ci-après où on a représenté dans le coin supérieur gauche la disposition des premières dalles convenue avec le carreleur.

Les dalles utilisées sont toutes identiques et la longueur, en centimètres, de leur côté est un nombre entier. On néglige l'épaisseur des joints.



1) Monsieur Durand souhaite ne pas avoir à couper de dalles. Quelles sont toutes les valeurs possibles pour la longueur du côté des dalles carrées ?

2) Monsieur Durand choisit des dalles carrées de 20 cm de côté.

a) Combien de dalles seront utilisées ?

b) En déduire le nombre de dalles nécessaires, s'il avait choisi des dalles carrées de 5 cm de côté.

ORGANISATION ET GESTION DE DONNÉES

5

Fonctions et tableurs

Gottfried Wilhelm Leibniz, 1 700. © Johann Friedrich Wentzel

Un peu d'histoire

L'idée de relation entre des quantités est très ancienne. Le premier âge de l'idée de fonction est celui de l'antiquité avec notamment les mathématiciens babyloniens qui usaient largement des tables sexagésimales de réciproques, de carrés, de racines carrées, de cubes... Mais peut-on dire que l'idée de fonction était présente ? Ces tables étaient conçues comme des relations entre des ensembles discrets et finis de quantités constantes, bien loin avant que la quantité variable, et la loi de variation soient exhibées comme des objets mathématiques.

Il faudra attendre la fin du 17^e siècle pour que le terme de fonction (du latin *fuctio* qui signifie exécution) soit introduit par le mathématicien allemand **Leibniz Gottfried**, dans un cadre géométrique. La notation fx apparaît chez **Léonard Euler** en 1734.

Actuellement, de multiples fonctions sont représentées dans des tableaux, ou plutôt des tableurs : un logiciel qui permet de manipuler des données numériques, d'effectuer un certain nombre d'opérations de façon automatisée en utilisant des fonctions prédéfinies.

Le premier tableur fut créé en 1978 par **Daniel Bricklin**, étudiant à Harvard qui devait créer des tableaux comptables pour une étude de cas sur Pepsi-Cola sans pour autant établir tous les calculs « à la main ». Son premier prototype, *VisiCalc* (pour Visible Calculator), pouvait manipuler un tableau de vingt lignes et cinq colonnes !

Cours

1. Généralités sur les fonctions

A. Définitions

DÉFINITION : Fonction, image, antécédent

Une **fonction** est une relation qui, à chaque élément x d'un ensemble $\mathcal{D}$ appelé ensemble de définition, est associé un unique élément y.
On note : $y = f(x)$ ou $f : x \mapsto f(x)$ ou encore $x \overset{f}{\mapsto} f(x)$.
y est l'**image** de x par f et x est un **antécédent** de y par f.

REMARQUE : il y a toujours une image, mais il peut y avoir aucun, un ou plusieurs antécédents.

Exemple Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3$.

- Pour calculer l'image d'un nombre x par f, il suffit de remplacer le « x » dans l'expression de f : l'image de 5 par f est $f(5) = 5^2 + 3 = 28$.
- Pour calculer les éventuels antécédents d'un nombre y par f, il faut résoudre l'équation $f(x) = y$:
  - les antécédents de 7 vérifient $f(x) = 7$ c'est à dire $x^2 + 3 = 7 \iff x^2 = 4 \iff x = -2$ ou $x = 2$; il y a deux antécédents de 7 par f.
  - les antécédents éventuels de 1 vérifieraient $f(x) = 1$ c'est à dire $x^2 + 3 = 1 \iff x^2 = -2$; cette équation est impossible car un carré ne peut pas être négatif, donc il n'y a pas d'antécédent de 1 par f.
  - l'antécédent de 3 vérifie $f(x) = 3$ c'est à dire $x^2 + 3 = 3 \iff x^2 = 0 \iff x = 0$; il y a un seul antécédent de 3 par f.

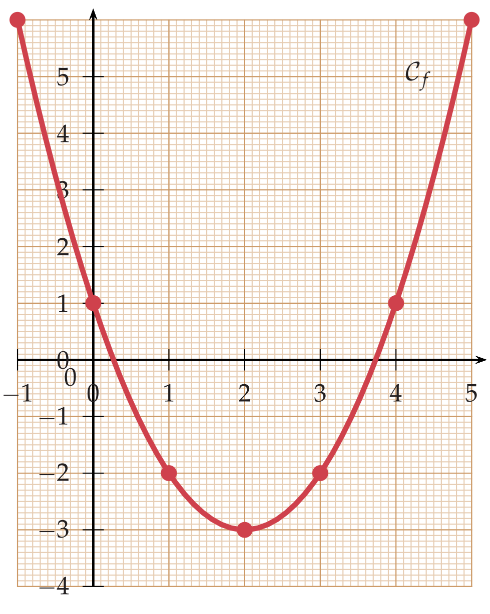
B. Différents modes de représentation

On souhaite représenter la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 4x + 1$.

On peut trace par exemple la portion de courbe représentative de f dont les abscisses sont comprises entre -1 et 5.
On commence par compléter un tableau de valeurs :

x	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	6	1	-2	-3	-2	1	6

Puis on place les points de coordonnées $M(x, f(x))$ dans le repère ci-contre avant de tracer « à main levée » la courbe passant par les points.



la touche $f(x)$ *de la calculatrice TI-Collège Plus permet de créer une table de valeurs.*

DÉFINITION : Courbe

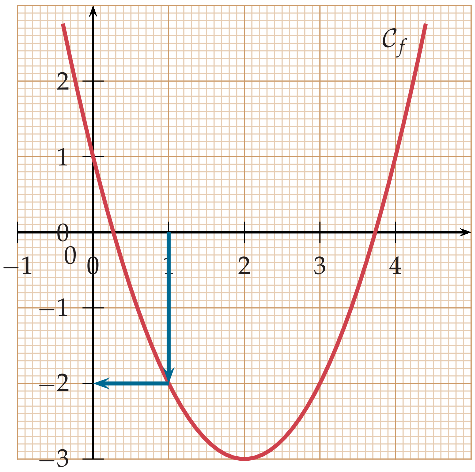
Dans un repère (ici cartésien) OIJ, l'ensemble des points M de coordonnées $(x, f(x))$ forme la **courbe représentative de la fonction** f, souvent notée $\mathcal{C}_f$.

REMARQUE : on attribue au mathématicien et philosophe français *René Descartes* l'invention des repères cartésiens : il associe à un point deux nombres, le nombre x mesurant la distance par rapport à une droite et le nombre y mesurant la distance qui s'applique par ordre à cette droite, d'où le nom ordonnée.

MÉTHODE 1 Lecture d'une image ou d'un antécédent

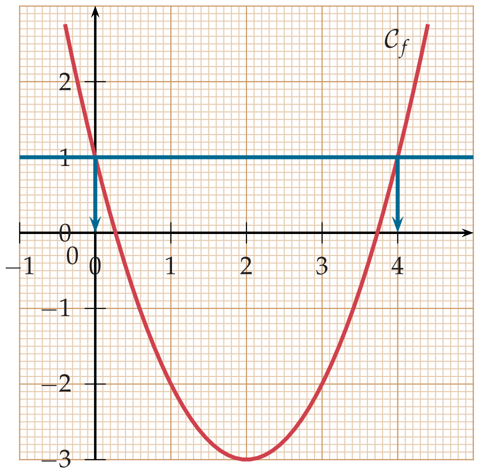
- Pour lire l'**image** d'un nombre x par une fonction f, on détermine l'ordonnée de la courbe d'abscisse x.
- Pour lire le ou les **antécédents** de y par une fonction f, on détermine le ou les abscisses de la courbe d'ordonnée y.

Exercice d'application Déterminer l'image de 1 par la fonction f.



Correction On se place en $x = 1$ sur l'axe des abscisses, puis on se déplace verticalement jusqu'à rencontrer $\mathcal{C}_f$. Enfin, on lit $y = f(x)$ sur l'axe des ordonnées :
l'image de 1 par f est -2

Exercice d'application Déterminer le ou les antécédent(s) de 1 par la fonction f.



Correction On trace la droite horizontale d'ordonnée $y = 1$. À partir des points d'intersection avec la courbe, on se déplace verticalement vers l'axe des abscisses pour lire les antécédents :
les antécédents de 1 par f sont 0 et 4

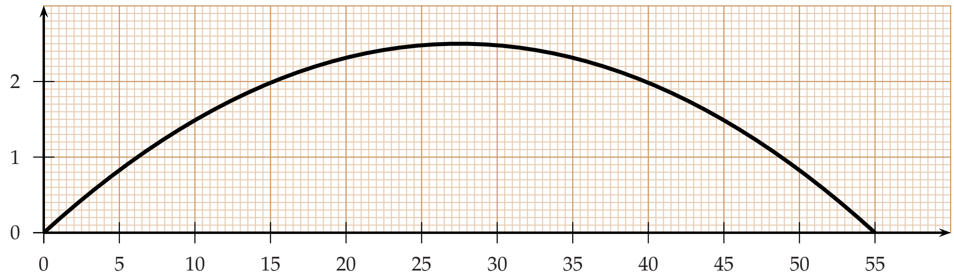
DÉFINITION : Maximum, minimum

On dit que la fonction f admet un **maximum** M [resp. **minimum** m] sur un intervalle I, atteint en x_0 si, quel que soit le réel x dans I, on a $f(x) \leqslant M$ [resp. $f(x) \geqslant m$].

Exemple La courbe précédente admet -3 comme minimum, il est atteint pour $x = 2$.

Exemple Albert part faire du ski et décide de dévaler une piste sur laquelle il effectue un saut. La hauteur du saut par rapport au sol de la piste s'exprime en fonction du déplacement horizontal, x, par la fonction $S : x \mapsto 2,5 - \frac{(2x-55)^2}{1\,210}$ où x et $S(x)$ sont exprimés en mètre.

1) Calculer l'image de 10 par la fonction S. Interpréter ce résultat.
2) On a tracé la courbe représentative de cette fonction S.



   a) Que représente, pour Albert, la valeur 55 sur l'axe des abscisses ?
   b) Déterminer graphiquement quelle a été la hauteur maximale du saut d'Albert.
3) Retrouver, par le calcul, la hauteur maximale du saut d'Albert.

Correction

1) $S(10) = 2,5 - \frac{(2\times10-55)^2}{1\,210} \approx 1,49$. Cela signifie que, quand Albert s'est déplacé horizontalement de 10 m, il est à environ 1,49 m du sol.
2) a) 55 m est la longueur du saut, mesurée en déplacement horizontal.
   b) La hauteur maximale du saut d'Albert est d'environ 2,5 m, elle correspond à une déplacement horizontal d'environ 27,5 m.
3) L'expression S est la somme de deux termes dont le premier est fixe et le second est négatif ou nul puisque $(2x-55)^2$ est un carré, positif ou nul. Il en résulte que la valeur de S est maximale lorsque $(2x-55)^2$ est nul, donc lorsque $2x = 55$ soit $x = \frac{55}{2} = 27,5$.
   Dans ce cas, $S = 2,5$. Donc, la hauteur maximale du saut d'Albert est de 2,5 m.

2. Fonctions affines et linéaires

DÉFINITION : Fonction affine, linéaire

Soient a et b deux réels donnés. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ est appelée **fonction affine**, elle est représentée par une droite où

- le réel a est le coefficient directeur de cette droite ;
- le réel b est l'ordonnée à l'origine.

Si $b = 0$, il s'agit d'une **fonction linéaire** représentée par une droite passant par l'origine.

Comme pour n'importe quelle fonction, pour tracer une fonction affine, on choisit des points que l'on place dans un repère (deux suffisent). Dans le cas d'une fonction linéaire, il suffit d'un point en plus de l'origine.

Exemple

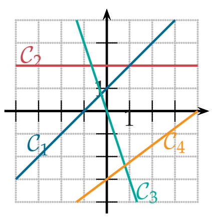
$\mathcal{C}_1 : f(x) = x + 1$

$\mathcal{C}_2 : f(x) = 2$

$\mathcal{C}_3 : f(x) = -3x$

$\mathcal{C}_4 : f(x) = \frac{3}{4}x - 3.$

Correction



La fonction est croissante si a est positif, constante si a est nul et décroissante si a est négatif.

3. Tableurs

Un tableur est un logiciel d'édition et de présentation de tableaux. Il comporte des **feuilles de calcul** composées de multiples lignes et colonnes formant des **cellules**. Chaque cellule est repérée par son adresse : une lettre désignant la colonne et un numéro désignant la ligne. Par exemple, la cellule A1 fait référence à la colonne A ligne numéro 1.

REMARQUES :
- La taille d'une cellule est variable, ses dimensions peuvent être modifiées.
- La virgule pour noter les nombres décimaux se traduit par un point dans certains logiciels.
- Une cellule peut contenir trois types de données : du texte, un nombre ou une formule.

A. Saisie d'une formule dans une cellule

PROPRIÉTÉ : Syntaxe d'une formule

Pour saisir une formule dans une cellule, il faut commencer par le signe = pour indiquer qu'il s'agit d'un calcul.

REMARQUE : si on oublie le signe `=` le contenu de la cellule n'est pas interprété comme une formule :
- l'écriture de `1+2` donne `1+2`
- l'écriture de `=1+2` donne `3`

Exemples d'éléments

- Coordonnées de cellule, par exemple `=C5`
- Opérateurs de calcul : addition `+` soustraction `-` multiplication `*` division `/`
- Fonctions : `=SOMME()` `=MOYENNE()`

Exemple on souhaite calculer la moyenne arithmétique de quatre notes à l'aide d'un tableur :

	A	B	C	D
1	Note 1	12	Moyenne méthode 1	=(B1+B2+B3+B4)/4
2	Note 2	15	Moyenne méthode 2	=SOMME(B1:B4)/4
3	Note 3	10	Moyenne méthode 3	=MOYENNE(B1:B4)
4	Note 4	13		

On peut utiliser (au minimum) trois méthodes :
- la première reprend la définition de la moyenne comme la somme des notes B1+ B2 + B3 + B4 divisée par le nombre total de notes ;
- la seconde est équivalente, mais utilise la fonction SOMME() du tableur pour calculer directement la somme de B1 à B4 ;
- la troisième utilise directement le fonction MOYENNE() du tableur.

L'avantage d'un tableur réside dans le fait que le résultat de la formule est dynamique : il dépend du contenu des cellules mentionnées (B1 à B4 dans l'exemple). Chaque fois que ce contenu est modifié, le tableur recalcule automatiquement le résultat de la formule sans aucune intervention de l'utilisateur.

B. Copie de cellules et adressages

Pour recopier le contenu d'une cellule vers d'autres cellules, on peut utiliser les fonctions « copier-coller » ou « tirer le contenu aux cellules continues » (sélectionner la croix en bas à droite de la cellule et étendre aux cellules voulues).

PROPRIÉTÉ : Adressage relatif

Lorsque l'on copie la formule de calcul d'une cellule et qu'on la colle dans une autre cellule, le tableur change automatiquement les numéros de colonnes et de lignes des cellules intervenant dans la formule. Il s'agit d'un **adressage relatif**.

Exemple Maria revient de la boulangerie avec 8 petits gâteaux qu'elle a payés 11,50 € au total. Il y a des macatias à 0,80 € l'un et des tartelettes à 2,50 € pièce.
On veut connaître le nombre de macatias et de tartelettes ramenées en utilisant un tableur.

Correction On commence par indiquer dans la **ligne 1** les données, ce sont des données de type « texte », puis, on effectue une simulation de tous les cas possibles : on commence par exemple par le cas où il y a 0 macatia et on complète la **ligne 2** :

	A	B	C	D	E
1	Nombre de macatias	Nombre de tartelettes	Prix des macatias	Prix des tartelettes	Prix payé
2	0	=8-A2	=A2*0,8	=B2*2,5	=C2+D2

- **B2 :** le nombre total de gâteaux est 8, pour connaître le nombre de tartelettes, on effectue l'opération « 8 - nombre de macatias », qui est fourni pas la cellule A2 ;
- **C2 :** le prix d'un macatia est de 0,80 €, qu'il faut multiplier par le nombre de macatias ;
- **D2 :** le prix d'une tartelette est de 2,50 €, qu'il faut multiplier par le nombre de tartelettes fourni pas la cellule B2 ;
- **E2 :** le prix total se calcule par somme du prix des macatias (C2) et des tartelettes (D2).

Il suffit ensuite de recopier cette ligne 2 vers le bas jusqu'à 8 macatias en ayant pris soin au préalable de remplir la **colonne A** comportant le nombre de macatias de 0 à 8. On obtient :

	A	B	C	D	E
1	Nombre de macatias	Nombre de tartelettes	Prix des macatias	Prix des tartelettes	Prix payé
2	0	8	0	20	20
3	1	7	0,8	17,5	18,3
4	2	6	1,6	15	16,6
5	3	5	2,4	12,5	14,9
6	4	4	3,2	10	13,2
7	**5**	**3**	4	7,5	**11,5**
8	6	2	4,8	5	9,8
9	7	1	5,6	2,5	8,1
10	8	0	6,4	0	6,4

Le prix payé est obtenu dans la cellule E7. Il correspond à l'achat de 5 macatias et de 3 tartelettes.

Au contraire, on souhaite parfois introduire dans une formule les références d'une cellule de telle sorte que cette référence ne change pas lorsque l'on copiera la formule dans une autre cellule.

PROPRIÉTÉ : Adressage absolu

Dans le cas où la copie ne doit pas modifier la référence, on ajoute le symbole $ devant le numéro de ligne ou de colonne que l'on souhaite fixer dans la copie de la cellule. Il s'agit alors d'un **adressage absolu**.

Exemple

On souhaite construire la table de multiplication de 1 à 5. Pour cela, on va utiliser le tableur avec comme données initiales dans la **ligne 1** et la **colonne A** les nombres de 1 à 5.

	A	B	C	D	E	F
1	×	1	2	3	4	5
2	1	1	2	3	4	5
3	2	2	4	6	8	10
4	3	3	6	9	12	15
5	4	4	8	12	16	20
6	5	5	10	15	20	25

Correction

On peut procéder par étapes :

- dans la cellule B2, on écrit `=B1*A2`
- en recopiant vers la droite, la cellule A2 doit rester fixe, donc la colonne A ne doit pas être modifiée. On écrit alors `=B1*$A2`
- en recopiant vers le bas, la cellule B1 doit rester fixe, donc la ligne 1 ne doit pas être modifiée. On écrit alors `=B$1*$A2`

Cette dernière formule étant valable pour toutes les cellules, il suffit de la recopier jusqu'à F6.

Vu au CRPE en 2022

Groupement 1 - Exercice 1 - Partie 2 - Question 2 : tableur

Dans une version adaptée du biathlon, les élèves ont à parcourir, en courant, 4 grands tours tracés avec des plots sur un stade. À l'issue de chacun des 3 premiers tours, ils se présentent au pas de tir et lancent trois balles sur des cibles. S'ils atteignent 3 fois leur cible, ils n'ont pas de pénalité et repartent pour le grand tour suivant. En revanche, pour chaque lancer manqué, ils doivent effectuer un petit tour avant de repartir sur le grand tour.
Pour chaque élève on mesure la durée mise pour faire un parcours complet (grands tours + lancers + petits tours de pénalité le cas échéant). L'objectif est de mettre le moins de temps possible pour effectuer le parcours complet.
Le professeur des écoles souhaite aider ses élèves à développer une stratégie pour améliorer leurs résultats. Il relève les performances d'un même élève de CE1 qui fait 3 fois l'épreuve de biathlon dans sa totalité en modifiant certains paramètres à chaque essai. Dans le tableau, V_{moy} est la vitesse moyenne de cet élève sur les périodes de course (4 grands tours + éventuels tours de pénalités).

1) La formule saisie en `H3` puis recopiée vers le bas est `=1000+(C3+E3+G3)*20`.
Expliquer le terme `(C3+E3+G3)*20` dans le contexte de l'exercice.

2) Donner une formule qui a pu être introduite dans la cellule `J3`, de telle sorte qu'elle a pu être recopiée vers le bas pour effectuer le calcul pour les autres essais.

3) Donner une formule qui a pu être introduite dans la case « durée totale » `K3`, de telle sorte qu'elle a pu être recopiée vers le bas pour effectuer le calcul pour les autres essais.

4) Interpréter le tableau pour déterminer ce que l'élève a modifié entre l'essai 2 et l'essai 3.

5) Si on analyse les performances de l'élève aux essais 2 et 3, quelle hypothèse ce tableau permet-il de faire du point de vue des stratégies à adopter ?

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	élève	tirs n°1		tirs n°2		tirs n°3		distance totale parcourue	temps course (s)	V_{moy} (m/min)	durée totale (min)
2		durée (s)	cibles manquées	durée (s)	cibles manquées	durée (s)	cibles manquées				
3	essai 1	30	0	30	1	30	2	1060	482	132	9,53
4	essai 2	30	0	32	0	35	0	1000	469	128	9,43
5	essai 3	19	3	21	3	21	3	1180	566	125	10,45

Exemple de corrigé.

1) `(C3+E3+G3)` correspond à la somme des tirs ratés. Chaque tir raté ayant comme effet de faire un tour de pénalité de 20 m, la formule `(C3+E3+G3)*20` correspond à la distance supplémentaire parcourue en raison des cibles loupées, exprimée en mètre.

2) La vitesse moyenne se calcule en divisant la distance totale parcoure (donnée par la colonne `H` et exprimée en mètre) par le temps de course (donné par la colonne `I` et exprimé en seconde).
Pour obtenir la vitesse moyenne en m/min, il faut convertir la durée en minute, donc la diviser par 60.
Une formule introduite en `J3` peut alors être : `=H3/(I3/60)`.

3) La durée totale, en minute, est la somme du temps de course et du temps passé sur pour chacun des trois tirs. Ceux-ci étant exprimés en seconde, il faut diviser le tout par 60 pour obtenir des minutes.
On peut, par exemple, introduire la formule `=(B3+D3+F3+I3)/60` dans la case `K3` avant de l'étirer vers le bas.

4) Entre l'essai 2 et l'essai 3, l'élève a décidé de tirer plus vite.

5) En observant la durée total aux essais 2 et 3, on constate que l'élève a mis une minute de moins au total alors qu'il a passé plus de temps sur le pas de tirs (essai 2), puisqu'il a dû parcourir plus de distance. On peut donc dire que, dans ce cas, la stratégie à adopter serait de prendre son temps à bien viser et commettre moins de faute au lieu de se précipiter pour terminer son tir plus rapidement et devoir effectuer des tours de pénalité.

Groupement 1 - Exercice 5 - Questions 5 à 7 : fonction affine et tableur

Un ballon-sonde est un ballon à gaz utilisé pour faire des mesures locales dans l'atmosphère.
Dans le cadre du projet scientifique qu'elle anime pour sa classe de CM2, une professeure des écoles a reçu un petit ballon-sonde. Son enveloppe, composée de matières plastiques et de latex, a la forme, une fois gonflée, d'un cône de révolution surmonté d'une demi-sphère.
La pression atmosphérique diminuant avec l'altitude, le ballon se dilate en prenant de la hauteur et ses dimensions augmentent jusqu'à l'éclatement après une ascension de plus de vingt kilomètres.

1) On lâche le ballon à 0 mètre d'altitude. On relève alors une température de 15°C.
À 4 500 mètres d'altitude, la température transmise est de -12°C. Entre 0 et 12 000 m d'altitude, la température, en degré Celsius, en fonction de l'altitude x, en mètre, peut être modélisée par une fonction affine notée t.
Montrer que pour tout x entre 0 et 12 000, on a $t(x) = -0,006x + 15$.

2) À partir de quelle altitude la température devient-elle négative ?
Justifier le résultat en résolvant une inéquation.

3) La professeure des écoles a réalisé, à l'aide d'un tableur, le calcul des températures en fonction de l'altitude du ballon-sonde.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	altitude en mètre	0	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000	4500	5000	5500	6000
2	température en degré	15	12	9	6	3	0	-3	-6	-9	-12	-15	-18	-21
1	altitude en mètre	6500	7000	7500	8000	8500	9000	9500	10000	10500	11000	11500	12000	
2	température en degré	-24	-27	-30	-33	-36	-39	-42	-45	-48	-51	-54	-57	

En observant les données du tableau, sachant que le ballon part de 0 mètre d'altitude, à quelle altitude se trouve-t-il lorsque la température a baissé de 30°C ?

Exemple de corrigé.

1) On considère la fonction affine d'équation $t(x) = ax + b$.
À 0 mètre d'altitude, la température est de 15°C donc : $t(0) = a \times 0 + b = 15 \iff b = 15$.
À 4 500 mètres d'altitude, la température est de -12°C donc : $t(4\,500) = a \times (4\,500) + 15 = -12$
Soit, $4\,500\,a = -12 - 15 = -27$
$\iff a = -27 \div 4\,500 = -0,006$.
<u>Pour tout x entre 0 et 12 000, $t(x) = -0,006x + 15$.</u>

2) La température devient négative lorsque $t(x) < 0$, soit $-0,006x + 15 < 0$

$$\iff -0,006x < -15$$
$$\iff x > \frac{-15}{-0,006}$$
$$\iff x > 2\,500.$$

<u>La température devient négative à partir de 2 500 mètres d'altitude</u>.

3) La température aura baissé de 30°C lorsque celle-ci sera de -15°C.
Dans le tableau, on peu lire que <u>cette température est atteinte à 5 000 mètres d'altitude</u>.

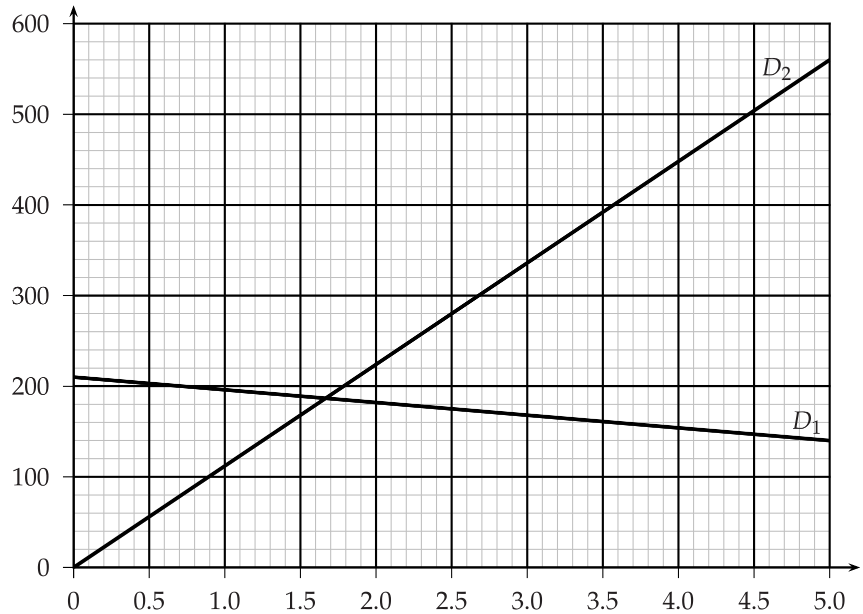
Vu au CRPE en 2022

Groupement 2 - Exercice 3 - Partie B - Question 5 : lecture, inéquation

On considère les fonctions f et g définies pour tout x compris entre 0 et 5 par :

$$f(x) = 210 - 14x \quad \text{et} \quad g(x) = 112x$$

f représente le volume d'un socle en bois d'un trophée, sur lequel on pose une pyramide en verre de volume g. On a représenté dans un repère orthogonal ces deux fonctions.



1) Déterminer quelle fonction (f ou g) est représentée par chacune des droites D_1 et D_2 ? Justifier.

2) Déterminer avec la précision permise par le graphique les valeurs de x pour lesquelles le volume du socle en bois est inférieur ou égal au volume de la pyramide en verre.

3) Retrouver le résultat précédent en posant puis en résolvant une inéquation.

Exemple de corrigé.

1) g est une fonction linéaire, elle passe par l'origine du repère, c'est donc la droite D_2.
f est donc représentées par la droite D_1.
f est représentée par la droite D_1 et g par D_2.

2) Graphiquement, il suffit de déterminer les abscisses pour lesquelles la droite D_1 est en dessous de la droite D_2.
Le volume du socle en bois est inférieur ou égal au volume de la pyramide en verre pour des valeurs x supérieures ou égales à 1,65 environ (et inférieures ou égales à 5).

3) On résout l'inéquation :

$$\begin{aligned} 210 - 14x \leqslant 112x &\iff 210 \leqslant 112x + 14x \\ &\iff 210 \leqslant 126x \\ &\iff \frac{210}{126} \leqslant x \\ &\iff \frac{5}{3} \leqslant x. \end{aligned}$$

Le volume du socle en bois est inférieur ou égal au volume de la pyramide en verre pour des valeurs x comprises entre $\frac{5}{3}$ et 5 inclus.

Groupement 2 - Exercice 4 - Question 5 : tableur

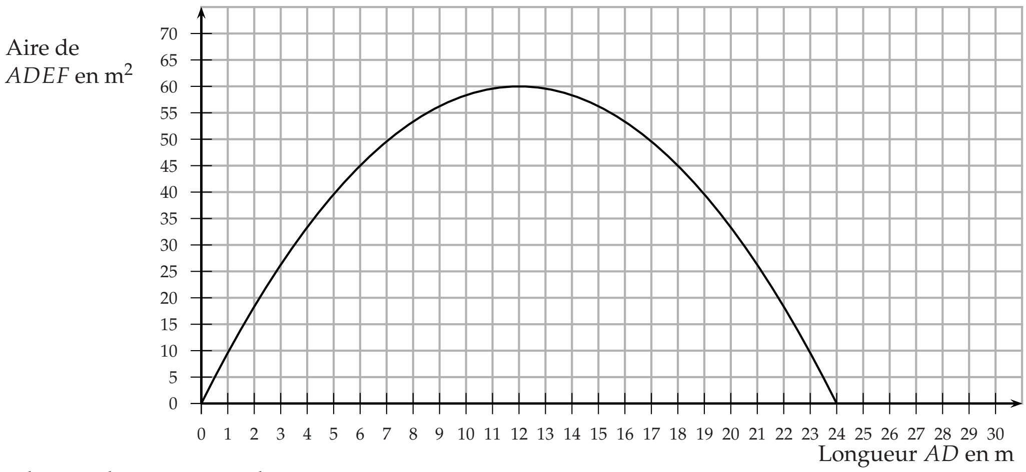
Adam a réalisé un programme à l'aide du logiciel Scratch : soit x le nombre de départ, son programme retourne le nombre $2x^2 - x - 6$.
Adam souhaite automatiser les calculs de son programme pour les entiers naturels. Il utilise un tableur dont la copie d'écran est donnée ci-dessous.
Quelle formule doit-il saisir dans la case B2 pour qu'il puisse l'étirer vers le bas sur l'ensemble de la colonne ?

	A	B
1	Nombre de départ	Résultat du programme
2	1	-5
3	2	0
4	3	9
5	4	22
6	5	39

Exemple de corrigé.
En B2, on peut entrer, par exemple, la formule `=2*A2*A2-A2-6`.

Groupement 3 - Exercice 3 - Partie A - Question 4 : lecture graphique

Le graphique ci-dessous représente l'aire, exprimée en mètre carré, d'un potager $ADEF$ de forme rectangulaire en fonction de la longueur AD en mètre.



À l'aide du graphique, répondre aux questions suivantes :
1) Quelle est l'aire du potager si la longueur AD vaut 5 m ?
2) Pour quelle(s) valeur(s) de la longueur AD l'aire du potager est-elle égale à 45 m^2 ?
3) Pour quelle(s) valeur(s) de la longueur AD l'aire du potager est-elle supérieure ou égale à 50 m^2 ?
4) Quelle est l'aire maximale du potager ? Donner la longueur et la largeur du rectangle $ADEF$ correspondant.

Exemple de corrigé.

1) Si $AD = 5$ m, alors l'aire du potager vaut environ 40 m^2.
2) L'aire du potager est égale à 45 m^2 lorsque $AD = 6$ m ou $AD = 18$ m.
3) L'aire du potager est supérieure ou égale à 50 m^2 lorsque AD est comprise en 7 m et 17 m environ.
4) L'aire maximale du potager est de 60 m^2, atteinte lorsque AD vaut 12 m, et DE vaut alors 5 m.

Entraînement

Maîtriser les bases avec MathenPoche

Classe	N°	Thème	Dans le cours
6e	U1	Utiliser un tableur	3.
4e	B3	Fonctions	1.
	U1	Utiliser un tableur	3.
3e	B3	Fonctions	1. et 2.
	U1	Utiliser un tableur	3.
2nde	F8	Généralités sur les fonctions	1. et 2.
	U1	Utiliser un tableur	3.

1 CRPE 2014 G1

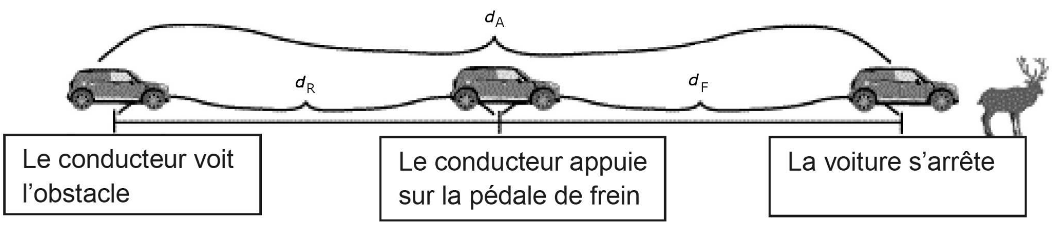
Pour s'entraîner, un cycliste effectue un parcours aller-retour entre deux villes A et B distantes de 45 km.

- Il part de la ville A à 9 h 30 et on considère qu'à l'aller, il roule à une vitesse constante de 30 km/h.
- Après un repos d'une heure, il repart de la ville B et cette fois-ci rejoint la ville A à la vitesse constante de 50 km/h.

1) À quelle heure arrive-t-il à la ville B ?
2) Représenter graphiquement la distance entre le cycliste et la ville A sur l'intégralité du parcours. On placera en abscisse l'heure de la journée et en ordonnée la distance entre le cycliste et la ville A exprimée en km.
3) À quelle heure est-il de retour à la ville A ? Donner le résultat en heures et minutes.

2 CRPE 2018 G1

La distance d'arrêt d_A correspond à la distance de réaction d_R additionnée à la distance de freinage d_F.



Si v est la vitesse de la voiture au moment où le conducteur voit l'obstacle (en m/s : mètre par seconde), la distance de freinage (en mètre) se calcule de la manière suivante : $d_F = v^2 \times k$ où k est une constante qui dépend de l'état de la route ($k = 0,14$ sur route mouillée, et $k = 0,073$ sur route sèche).

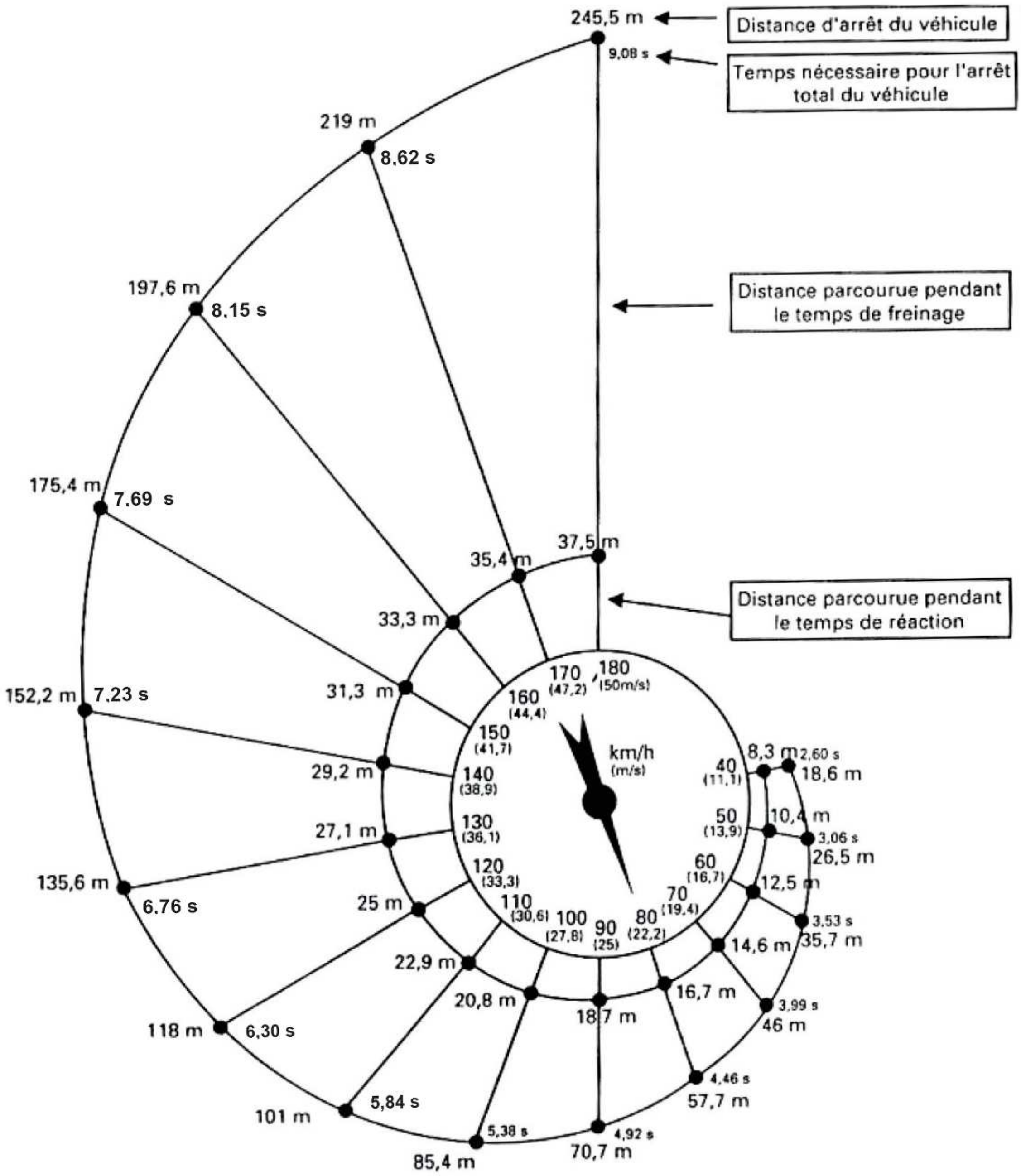
On admet alors que

$$d_A = v \times t_R + k \times v^2$$

où t_R est le temps de réaction, en seconde.

1) On estime qu'un conducteur vigilant a un temps de réaction de 0,75 seconde. Calculer la distance d'arrêt pour un véhicule roulant à 90 km/h sur route mouillée.
2) Pour un conducteur vigilant, la distance d'arrêt sur route sèche est-elle proportionnelle à la vitesse ?

3) Le diagramme ci-dessous représente la distance d'arrêt sur route sèche d'un véhicule en fonction de sa vitesse.



Par exemple, on peut lire que, pour une vitesse de 180 km/h (ou 50 m/s), un véhicule parcourt 37,5 m pendant le temps de réaction, que le temps nécessaire à son arrêt total sera de 9,08 s, et que sa distance d'arrêt sera alors de 245,5 m. En utilisant ce diagramme,

a) donner la distance d'arrêt d'un véhicule roulant à 110 km/h ;

b) donner la distance parcourue pendant le temps de freinage d'un véhicule roulant à 80 km/h ;

c) donner le temps que met un véhicule roulant à 130 km/h pour s'arrêter ;

d) donner la vitesse d'un véhicule sachant que la distance de réaction est de 25 m ;

e) dire si un conducteur roulant à 27,8 m/s et apercevant un obstacle à 100 m pourra s'arrêter à temps.

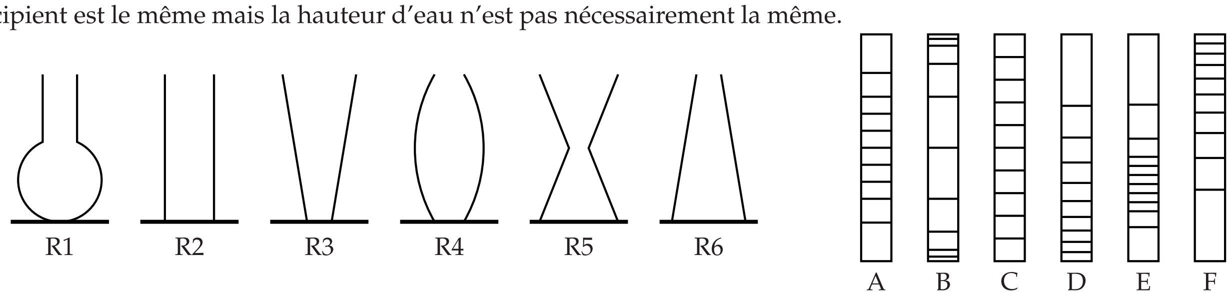
3 **CRPE 2006 G5**

Vu à la Cité des Sciences et de l'Industrie à Paris.

Six réservoirs de formes différentes, de même volume, de même hauteur se remplissent dans le même temps. Il s'agit d'associer à une forme de récipient une jauge et une courbe indiquant la hauteur du liquide en fonction du temps sachant que :

- les graduations des six jauges A, B, C... indiquent les hauteurs de liquide correspondant à 1 litre, 2 litres... pour les six réservoirs ;
- les courbes 1, 2, 3... indiquent la hauteur atteinte par le liquide en fonction du temps lorsque les six réservoirs se remplissent ;
- les récipients ont tous le même volume 10 litres et la même hauteur.

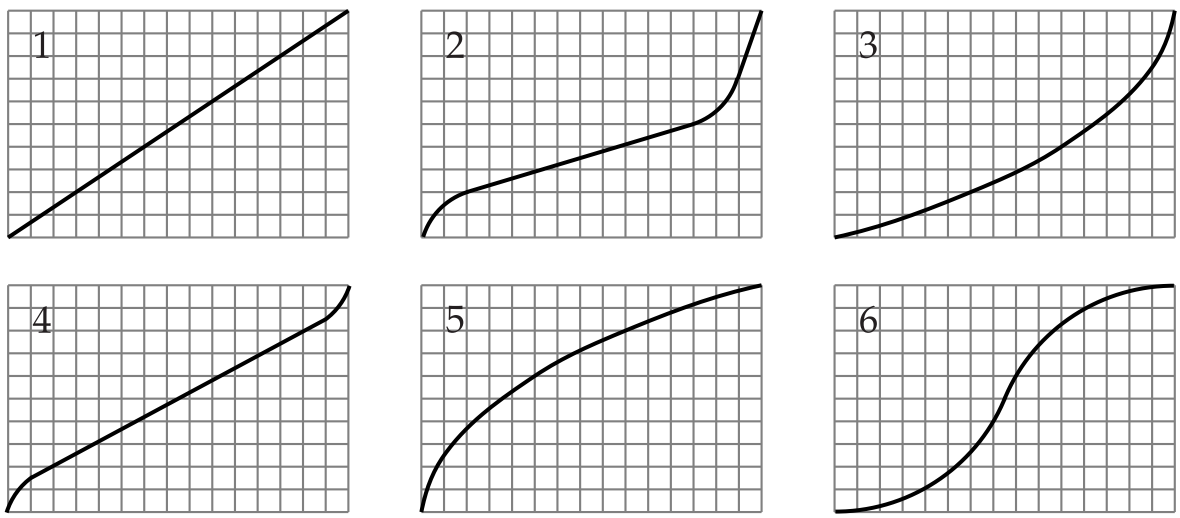
Leurs formes sont représentées grossièrement par les dessins ci-dessous. Pendant le remplissage, le débit de l'eau est constant et identique d'un récipient à l'autre. Ainsi, à un instant donné, le volume d'eau contenu dans chaque récipient est le même mais la hauteur d'eau n'est pas nécessairement la même.



1) Associer à chaque récipient R1, R2, R3, R4, R5, R6 :

a) la jauge qui lui correspond parmi les jauges A, B, C, D, E, F reproduites ci-dessus ;

b) la courbe qui lui correspond parmi les courbes 1, 2, 3, 4, 5, 6 reproduites ci-dessous. Présenter les résultats dans un tableau, sans justification.



2) Sachant que le diamètre du récipient cylindrique R2 est de 16 cm, calculer la hauteur de ce récipient (arrondie au centimètre).

3) À un instant t, le récipient cylindrique R2 est rempli aux 2/3 de sa hauteur. Calculer, au dixième de litre près, le volume d'eau $\mathcal{V}'$ contenu dans le cylindre à cet instant précis.

4) On observe la hauteur d'eau dans le récipient R6 au moment où le récipient cylindrique R2 est rempli aux 2/3 de sa hauteur. Est-elle plus ou moins haute que dans R2 ? Justifier la réponse en utilisant les courbes ci-dessus.

4 **CRPE 2021 G1**

L'entreprise AMP'OUL travaille avec deux sociétés de livraison, qui lui proposent des tarifs adaptés à ses besoins.

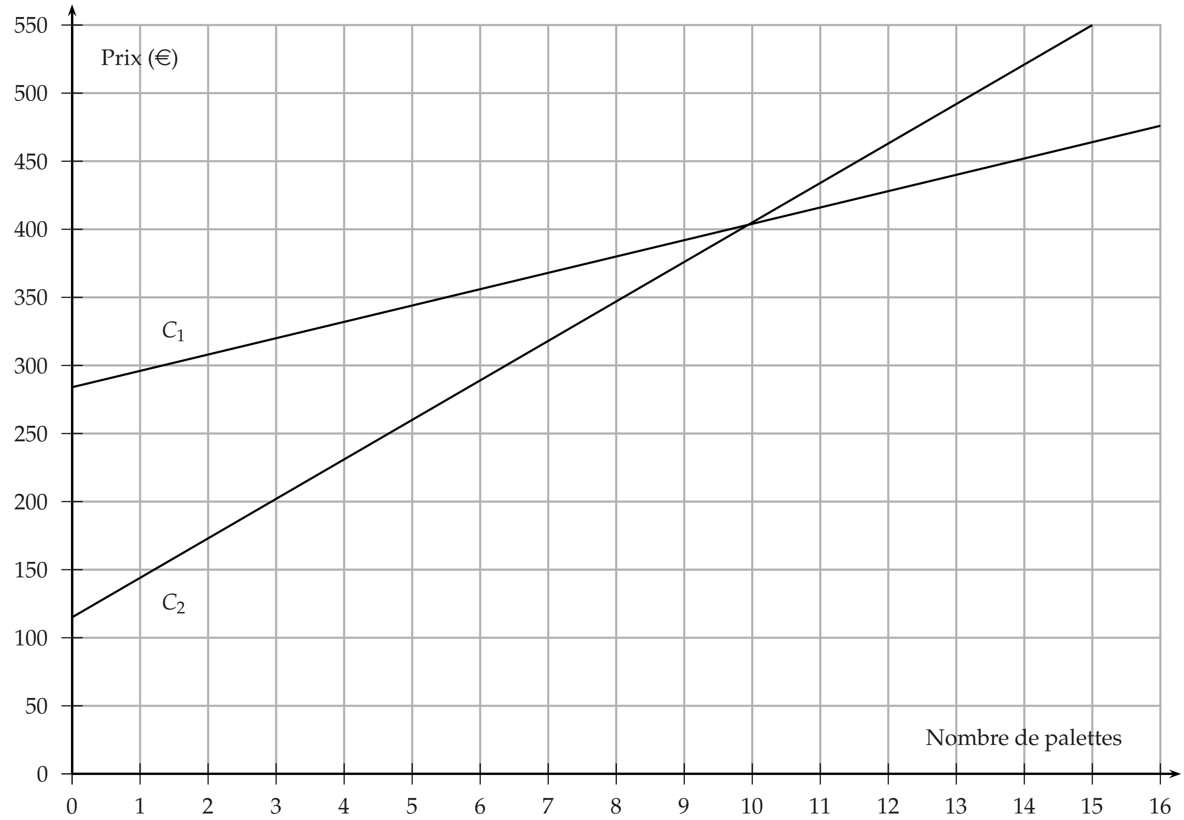
Société	Tarif par palette (€)	Frais de gestion (€)
Société A	12	284
Société B	29	115

On définit les fonctions f et g par les expressions algébriques suivantes :

- $f(x) = 12x + 284$
- $g(x) = 29x + 115$

Ainsi, si x désigne un nombre de palettes alors $f(x)$ et $g(x)$ désignent respectivement le prix à payer pour la livraison de ces x palettes par les sociétés A et B.

On a tracé les courbes correspondant à f et g dans le repère ci-dessous.



1) Répondre, en vous aidant du graphique, aux questions suivantes :

a) Identifier la courbe qui correspond à chaque fonction.

b) Quelle société de livraison sera la plus économique pour une commande de 6 palettes ?

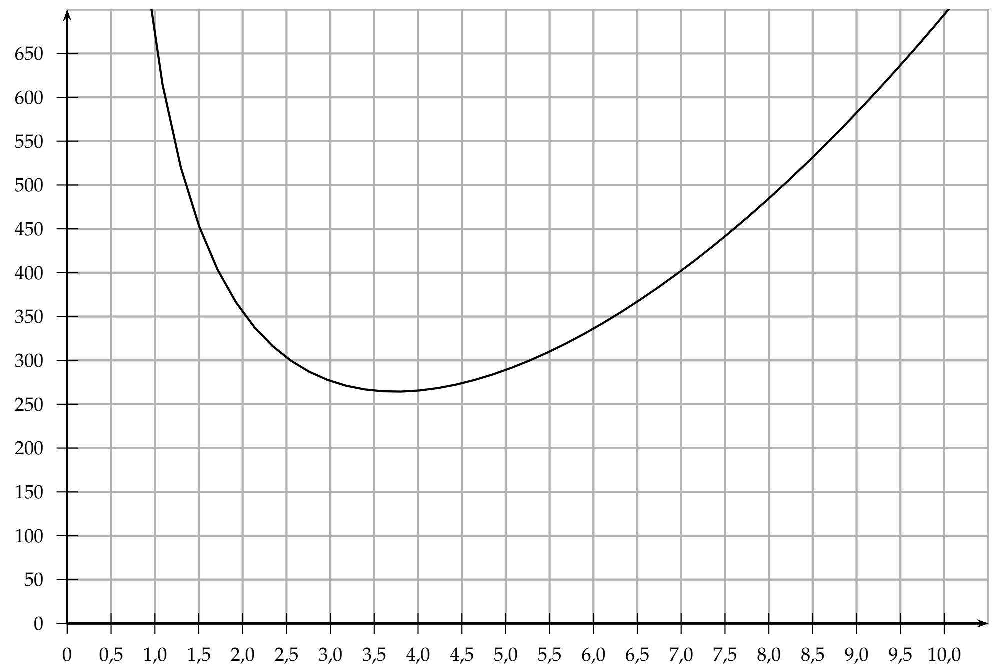
c) Pour une commande donnée, quelle société de livraison sera la plus économique en fonction du nombre de palettes ?

2) Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$. Utiliser cette résolution pour affiner la réponse à la question 1.c.

5 **CRPE 2018 G2**

On s'intéresse à la réalisation d'une canette en forme de cylindre de révolution de base de rayon r, exprimé en centimètre, et de contenance 33 cL. L'aire, exprimée en centimètre carré, de la surface de métal nécessaire est modélisée par la fonction f qui, à tout nombre r strictement positif, associe $f(r) = 2\pi r^2 + \dfrac{660}{r}$.

1) La fonction f est représentée ci-dessous :



Répondre par lecture graphique aux questions suivantes :

a) Quelle est l'aire de la surface de métal nécessaire pour un cylindre dont la base a pour rayon 1,5 cm ?

b) À quelle(s) valeur(s) du rayon du cylindre correspond une aire de 300 cm^2 ?

c) Une canette classique a un diamètre de 6,6 cm et une canette slim a un diamètre de 5,6 cm. Déterminer laquelle de la canette classique ou de la canette slim utilise le moins de surface de métal pour sa réalisation. Justifier la réponse en donnant les lectures graphiques effectuées.

d) À quelle valeur du rayon correspond la surface minimale de métal nécessaire à la fabrication d'une canette de 33 cL ?

2) Voici une copie d'écran de la feuille de calcul relative à f.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	r	3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4
2	$f(r)$	276,55	273,28	270,59	268,42	266,75	265,54	264,76	264,40	264,41	264,80	265,63

a) Écrire une formule qui, entrée dans la cellule B2 et étirée vers la droite, permet d'obtenir les valeurs de $f(r)$ sur la ligne 2. *Note : la fonction `PI()` du tableur renvoie la valeur de π avec une précision de 15 décimales.*

b) Utiliser cette feuille de calcul pour déterminer un encadrement, le plus précis possible, du rayon du cylindre permettant de minimaliser l'aire de la surface de métal nécessaire à la réalisation d'une canette de 33 cL.

6 Bon de commande

Un laboratoire d'analyses souhaite passer des commandes de bureautique auprès d'une centrale d'achat. Construire sur tableur le bon de commande ci-dessous.

	A	B	C	D
1	Bon de commande			
2				
3	Désignation de l'article	Quantité	Prix unitaire HT (en €)	Total
4	Fauteuil	5	295,90	
5	Bureau	5	139,50	
6	Caisson à tiroirs	4	139,00	
7	Ordinateur	4	389,80	
8	Armoire	2	269,00	
9	Bibliothèque	4	129,90	
10				
11			Prix HT	
12	Taux de remise		Remise	
13	Taux de TVA	19,60 %	Montant TVA	
14				
15			Prix total	

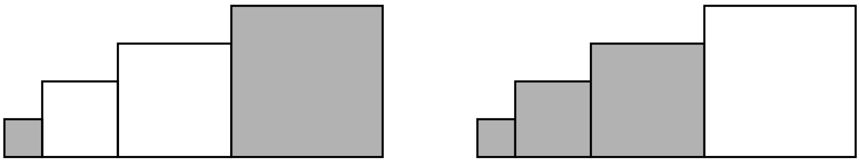
1) Entrer une formule en D4 puis la recopier jusqu'en D9 pour obtenir le total en euros de chaque article.
2) Proposer une formule à entrer en D11 permettant de calculer le prix total hors taxe.
3) Le taux de remise accordé par la centrale d'achat est de 5% ou 10% sur le prix hors taxe. Entrer en B12 la formule =SI(D11<5000 ;0,05 ;0,10). À quoi correspond cette formule ?
4) Donner une formule à entrer en D12 permettant de calculer le montant de la remise.
5) Peut-on recopier vers le bas en D13 le contenu de la cellule D12, pour obtenir la somme en euros correspondant à la TVA calculée sur le prix hors taxe avant remise ? Calculer cette somme en D13.
6) Entrer en D15 une formule donnant le prix total à payer.
7) Quelles modifications apparaissent sur le bon de commande si le laboratoire d'analyses modifie sa commande en ne commandant plus que trois ordinateurs ? Quel est alors le prix total à payer ?

Source : `http://mechain.lyc.ac-amiens.fr/spip_pead/IMG/pdf/module-tableur-pourcentages.pdf`

Entraînement

7 **CRPE 2019 G1**

Les figures ci-dessous – qui ne sont pas nécessairement à l'échelle – représentent quatre carrés dont les mesures des côtés, en centimètre, sont des nombres entiers consécutifs.



cas 1 *cas 2*

On cherche à savoir si, dans chacun de ces cas, ill est possible que l'aire de la surface grise soit égale à l'aire de la surface blanche.

On utilise pour cela un tableur. On donne ci-dessous les copies d'écran des feuilles de calcul obtenues lors de cette recherche.

	A	B	C	D	E	F	G
1	côté du petit carré	aire du 1er carré	aire du 2ème carré	aire du 3ème carré	aire du 4ème carré	aire partie grise	aire partie blanche
2	1	1	4	9	16	17	13
3	50	2500	2601	2704	2809	5309	5305
4	100	10000	10201	10404	10609	20609	20605
5	700	490000	491401	492804	494209	984209	984205
6	1000	1000000	1002001	1004004	1006009	2006009	2006005
7	2000	4000000	4004001	4008004	4012009	8012009	8012005
8	50000	2500000000	2500100001	2500200004	2500300009	5000300009	5000300005
9	100000	10000000000	10000200001	10000400004	10000600009	20000600009	20000600005

Feuille de calcul A

	A	B	C	D	E	F	G
1	côté du petit carré	aire du 1er carré	aire du 2ème carré	aire du 3ème carré	aire du 4ème carré	aire partie grise	aire partie blanche
2	1	1	4	9	16	14	16
3	2	4	9	16	25	29	25
4	3	9	16	26	36	50	36
5	4	16	25	36	49	77	49
6	5	25	36	49	64	110	64
7	6	36	49	64	81	149	81
8	7	49	64	81	100	194	100
9	8	64	81	100	121	245	121

Feuille de calcul B

1) Quelle feuille correspond à chacun des deux cas ? Justifier la réponse.

2) Pour la feuille de calcul A :

- **a)** Quelle formule étirable vers le bas a-t-on pu saisir dans la cellule E2 pour calculer l'aire du quatrième carré à partir de la valeur saisie dans la cellule A2 ?
- **b)** Quelle formule étirable vers le bas a-t-on pu saisir dans la cellule F2 pour calculer l'aire de la partie grise ?

3) Pour chaque cas, quelle conjecture, sur les solutions du problème, la copie d'écran de la feuille de calcul permet-elle d'émettre ? Justifier la réponse.

4) Démontrer que dans less deux cas, le problème n'admet pas de solution.

8 **CRPE 2016 G2**

Les télésièges sont équipés de véhicules fixés à un câble. Sur un télésiège donné, tous les véhicules ont le même nombre de sièges, généralement compris entre deux et six. Pour des raisons de sécurité, l'espacement minimal entre deux véhicules sur le câble dépend de la vitesse de déplacement des véhicules et du nombre de sièges par véhicule selon la formule ci-dessous, valable pour un nombre de sièges inférieur ou égal à six : $E = V\left(4+\frac{n}{2}\right)$ où E désigne l'espacement minimal en mètre ; V désigne la vitesse des véhicules en mètre par seconde et n désigne le nombre de sièges par véhicule. La feuille de tableur page suivante a été créée en vue de calculer l'espacement minimal entre deux véhicules d'un télésiège, dans la suite de l'exercice on considère que l'espacement entre les véhicules est l'espacement minimal ainsi calculé.

1) La cellule E13 contient la valeur 18. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

2) Choisir une formule parmi celles données ci-dessous qui peut être saisie en E3 puis étirée vers le bas pour calculer l'ensemble des valeurs de la colonne E.

=$B3*(4+E$2/2)	=2*(4+4/2)	=12
=B3*(4+E2/2)	=B3*(4+4/2)	=$B$3*(4+$E$2/2)

3) Le débit D en nombre de personnes par heure est fourni par la formule : $D = 3\,600\,n\frac{V}{E}$.
L'affirmation suivante est-elle cohérente avec les données de cet exercice ?
« Les télésièges fabriqués en 2010 sont généralement équipés de véhicules à quatre places, avec une vitesse de ligne de 2,3 m/s et peuvent, au maximum, atteindre un débit de 2 400 personnes par heure. »

4) Pour des véhicules à quatre sièges, une vitesse de 2 m/s fournira-t-elle un meilleur débit qu'une vitesse de 3 m/s ? (on se placera dans le cadre d'un espacement minimal dans chaque situation).

5) Montrer que, dans le cas où on choisit l'espacement minimal en fonction de la vitesse, le débit peut s'exprimer uniquement en fonction du nombre de sièges par véhicule. Cela confirme-t-il le résultat trouvé à la question 4 ?

	A	B	C	D	E	F	G	H
1			Nombre de sièges par véhicules					
2		Vitesse	2	3	4	5	6	
3		2	10	11	12	13	14	
4		2,1	10,5	11,55	12,6	13,65	14,7	
5		2,2	11	12,1	13,2	14,3	15,4	
6		2,3	11,5	12,65	13,8	14,95	16,1	
7		2,4	12	13,2	14,4	15,6	16,8	
8		2,5	12,5	13,75	15	16,25	17,5	
9		2,6	13	14,3	15,6	16,9	18,2	
10		2,7	13,5	14,85	16,2	17,55	18,9	
11		2,8	14	15,4	16,8	18,2	19,6	
12		2,9	14,5	15,95	17,4	18,85	20,3	
13		3	15	16,5	18	19,5	21	
14		3,1	15,5	17,05	18,6	20,15	21,7	
15		3,2	16	17,6	19,2	20,8	22,4	
16		3,3	16,5	18,15	19,8	21,45	23,1	
17		3,4	17	18,7	20,4	22,1	23,8	
18		3,5	17,5	19,25	21	22,75	24,5	

9 CRPE 2020 G1

Un fabricant de sauce tomate doit produire des boîtes de conserve cylindriques de volume fixé 908 cm^3. Il souhaite minimiser le coût du métal, pour cela il cherche à minimiser l'aire totale $\mathcal{A}$ de la boîte ; celle-ci correspond à la somme de l'aire des disques de base et de l'aire de la surface latérale du cylindre. Il étudie l'évolution de l'aire de métal totale $\mathcal{A}$, en centimètre carré, en fonction du rayon r, en centimètre, du disque de base.

1) Dessiner à main levée un patron d'une boîte de conserve cylindrique en repassant de la même couleur les éléments de même longueur.

2) Sachant que le volume de la boîte est de 908 cm^3, donner l'expression de la hauteur h, exprimée en centimètre, de la boîte en fonction du rayon r.

3) Pour calculer l'aire totale des cylindres de rayons différents, on a construit à l'aide d'un tableur la feuille de calcul suivante :

	A	B	C	D	E
1	Rayon r (cm)	Hauteur h (cm)	Aire d'un disque de base (cm^2)	Aire latérale (cm^2)	Aire totale du cylindre (cm^2)
2	1	289,0	3,1	1816,0	1822,3
3	2	72,3	12,6	908,0	933,1
4	3	32,1	28,3	605,3	661,9
5	4	18,1	50,3	454,0	554,5
6	5	11,6	78,5	363,2	520,3
7	6	8,0	113,1	302,7	528,9
8	7	5,9	153,9	259,4	567,3
9	8	4,5	201,1	227,0	629,1
10	9	3,6	254,5	201,8	710,7
11	10	2,9	314,2	181,6	809,9
12	11	2,4	380,1	165,1	925,4
13	12	2,0	452,4	151,3	1056,1
14	13	1,7	530,9	139,7	1201,6
15	14	1,5	615,8	129,7	1361,2
16	15	1,3	706,9	121,1	1534,8

a) Sans justifier, parmi les cinq propositions données ci-dessous, recopier celle qui a été saisie dans la cellule C2 et étirée vers le bas jusqu'à la cellule C16.

Proposition 1 : `=PI()*A1*A1` Proposition 2 : `=PI()*A2*A2` Proposition 3 : `=PI()*49,5*49,5`

Proposition 4 : `=PI()*1*1` Proposition 5 : `=PI()*B2*B2`

Rappel : « `PI()` » correspond à la valeur du nombre π.

b) On suppose que les colonnes A, B, C et D sont déjà remplies. Proposer une formule à saisir dans la cellule E2 et copiée par glissement vers le bas jusqu'à la cellule E16, donnant l'aire totale du cylindre.

c) En utilisant la feuille de calcul ci-dessus, conjecturer un encadrement d'amplitude minimale du rayon, correspondant au coût minimal de métal pour la fabrication de cette boîte de conserve.

10 **CRPE 2014c G1**

Une boisson A contient 10 % de jus d'orange ; une boisson B contient 5 % de jus d'orange.

1) On a acheté une bouteille de 0,5 L de boisson A et une bouteille de 1,25 L de boisson B.
Quelle est la bouteille qui contient la plus grande quantité de jus d'orange ? Justifier.

2) On mélange 20 cL de boisson A avec 30 cL de boisson B.
Calculer le pourcentage de jus d'orange dans le mélange obtenu.

3) On souhaite remplir un verre d'un mélange des boissons A et B contenant exactement 8 % de jus d'orange.
Sachant que la contenance de ce verre est de 40 cL, quels volumes de boissons A et B faut-il verser dans ce verre pour obtenir le mélange souhaité ?

4) On étudie à l'aide de la feuille de calcul représentée ci-dessous différents mélanges des boissons A et B d'un volume total de 40 cL.

	A	B	C
1	Volume de boisson A en cL	Volume de boisson B en cL	
2	0	40	
3	1	39	
4	2	38	
5	3	37	
6	4	36	
7	5	35	
8	6	34	
9	7	33	
10	8	32	
11	9	31	
12	10	30	
13	11	29	
14	12	28	

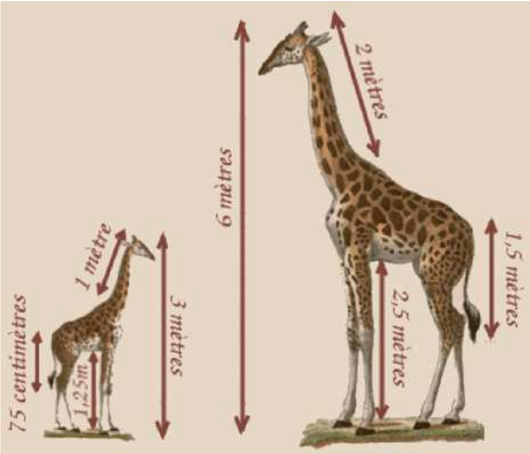
On saisit dans la cellule C2, puis on recopie vers le bas, la formule suivante : `=(0,1*A2+0,05*B2)/40`
Quel nombre est alors obtenu dans la cellule C14 ?
Que représente ce nombre ?

Entraînement

ORGANISATION ET GESTION DE DONNÉES

6

Proportionnalité



Un peu d'histoire

La notion de proportion est présente chez **Euclide** dans le *Livre V des Éléments* (compilation du savoirs géométriques qui resta le noyau de l'enseignement mathématique pendant près de 2 000 ans). Voilà la définition qu'il donne de nombres proportionnels :

« *On dit de quatre grandeurs, a, b, c, d, prises dans cet ordre, que la première est à la deuxième dans le même rapport que la troisième est à la quatrième, quand n'importe quel équimultiple de la première et de la troisième grandeur est en même temps et respectivement soit supérieur, soit égal, soit inférieur à n'importe quel équimultiple de la deuxième et de la quatrième grandeur.* »

Je laisse au lecteur le soin de traduire, en langage mathématique, cette définition ;-)

Plus tard, on trouve la méthode de la *fausse position* : les plus anciens documents retrouvés relatifs à cette méthode remontent à une date estimée à 100 av. J.-C. dans le texte chinois intitulé *Les Neuf Chapitres sur l'art mathématique*.

Cours

1. Suites proportionnelles

A. Propriétés

Dans toute cette section, on considère le problème suivant : *si 4 stylos coûtent 10 €, combien coûtent 12 stylos ?*
On considère que les stylos ont tous la même valeur afin de se trouver dans une situation de proportionnalité.

PROPRIÉTÉ : Linéarité additive

Si deux suites sont proportionnelles, alors $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$.

4	5	9	18	6
12	15	27	54	18

Dans la première ligne on peut lire que $4 + 5 = 9$.
Dans la ligne du dessous, on a également $12 + 15 = 27$.

Si 4 stylos coûtent 10 €, alors 12 stylos = 4 stylos + 4 stylos + 4 stylos coûtent 10 € + 10 € + 10 € = 30 €.

PROPRIÉTÉ : Linéarité multiplicative

Soit k un réel non nul, si deux suites sont proportionnelles, alors $f(k \times x) = k \times f(x)$.

4	5	9	18	6
12	15	27	54	18

Dans la première ligne on a $9 \times 2 = 18$ et $18 \div 3 = 6$.
Dans la ligne du dessous, $27 \times 2 = 54$ et $54 \div 3 = 18$.

Si 4 stylos coûtent 10 €, alors 12 stylos = 3×4 stylos coûtent 3×10 € = 30 €.

PROPRIÉTÉ : Coefficient de proportionnalité

Le coefficient de proportionnalité est le coefficient multiplicateur permettant de passer d'une grandeur à une autre (à ne pas confondre avec le coefficient de linéarité multiplicative).

$\times 2$: coefficient de linéarité multiplicative

masse	2 kg	4 kg
prix	3 €	6 €

$\times 1,5$: coefficient de proportionnalité

Si 4 stylos coûtent 10 €, le coefficient de proportionnalité est de 2,5 car $4 \times 2,5 = 10$. Alors, 12 stylos coûtent 30 € car $12 \times 2,5 = 30$.

PROPRIÉTÉ : Produit en croix

Dans un tableau de proportionnalité, les produits « en diagonale » (ou produits en croix) sont deux à deux égaux. Ceci permet de déterminer une quatrième proportionnelle.

Pour nos stylos, on a le tableau de proportionnalité suivant :

nombre de stylos	4	12
prix des stylos en €	10	x

D'où l'égalité : $4 \times x = 10 \times 12$.
On calcule la donnée manquante : $x = \dfrac{10 \times 12}{4} = 30$.
12 stylos coûtent 30 €.

B. Lien avec les fonctions linéaires

DÉFINITION : Suites proportionnelles et coefficient de proportionnalité

Deux suites de n nombres réels $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ sont **proportionnelles** si l'une est l'image de l'autre par une fonction linéaire f définie par $y = f(x) = a \times x$ où le nombre non nul a est le **coefficient de proportionnalité**.

Exemple

On considère les suites $(0\,;1\,;2\,;3\,;4)$ et $0\,;0{,}5\,;1\,;1{,}5\,;2)$:

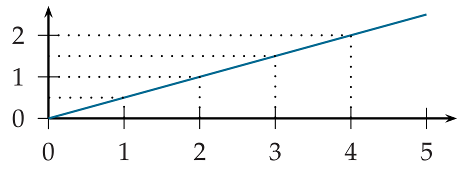
abscisse	0	1	2	3	4
ordonnée	0	0,5	1	1,5	2

$\downarrow \times 0{,}5$

Ce tableau est un tableau de proportionnalité.

Correction

Le coefficient de proportionnalité : $0{,}5$ est le coefficient directeur de la droite.



PROPRIÉTÉ : Reconnaissance graphique d'une situation proportionnelle

On reconnaît une situation de proportionnalité lorsque le support des points représentant la situation est une droite passant par l'origine du repère.

2. Exemples de de situations de proportionnalité classiques

A. Mouvement à vitesse constante

La vitesse moyenne est caractéristique d'une situation de proportionnalité.

Temps écoulé en s	5	8	15	100
Distance parcourue en m	15	24	45	300

$\downarrow \times 3$

Ce tableau est un tableau de proportionnalité de coefficient 3 : la vitesse est de 3 mètres par seconde.

PROPRIÉTÉ : Vitesse moyenne

La vitesse moyenne v d'un objet qui parcourt une distance d en un temps t est $v = \dfrac{d}{t}$.

La vitesse est une grandeur quotient, son unité dépend des unités de distance et de temps.

Exemple Une voiture parcourt 400 km en 5 heures, sa vitesse moyenne est de $\dfrac{400\,\text{km}}{5\,\text{h}} = 80\,\text{km/h} = 80\,\text{km}{\cdot}\text{h}^{-1}$.

B. Échelle sur une carte

DÉFINITION : Échelle

L'**échelle** d'une carte est le coefficient de proportionnalité entre une mesure réelle et sa mesure sur la carte, ces deux mesures étant exprimées dans la même unité.

Une carte au $1/200\,000$ signifie que 1 cm sur la carte représente 200 000 cm sur le terrain, soit 2 km.

Distance carte (cm)	1	x
Distance terrain (km)	2	5

$x = \dfrac{1 \times 5}{2} = 2{,}5$ donc, 5 km sur le terrain sont représentés par 2,5 cm sur la carte.

C. Calcul de pourcentages

DÉFINITION : Pourcentage

Le **pourcentage** d'un effectif est le nombre qui aurait été proportionnellement obtenu si l'effectif avait été de 100.

PROPRIÉTÉ : Pourcentage et coefficient multiplicateur

- Pour calculer le pourcentage $p\,\%$ d'une quantité n, on effectue le calcul $\dfrac{p}{100} \times n$.
- Augmenter [resp. diminuer] une valeur de $p\,\%$ revient à la multiplier par $c_m = 1 + \dfrac{p}{100}$ $\left[\text{resp. } c_m = 1 - \dfrac{p}{100}\right]$. c_m est appelé **coefficient multiplicateur**.

Exemple Dans un collège, il y a 125 filles et 180 garçons. 40 % des filles et 60 % des garçons mangent à la cantine. Quel est le pourcentage d'élèves qui mangent à la cantine parmi tous les élèves du collège ?

– Nombre de filles qui mangent à la cantine : 40 % de 125 = $\dfrac{40}{100} \times 125 = 50$.

– Nombre de garçons qui mangent à la cantine : 60% de 180 = $\dfrac{60}{100} \times 180 = 108$.

– Pourcentage d'élèves qui mangent à la cantine : 158 élèves sur 305 = $\dfrac{158}{305} \times 100 \approx 51{,}8$.

Donc, le pourcentage d'élèves du collège qui mangent à la cantine est d'environ 51,8 %.

On prévoit une augmentation de 18 % du nombre d'élèves à la rentrée prochaine.

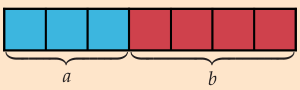
Le coefficient multiplicateur est de $1 + \dfrac{18}{100} = 1{,}18$ donc, il y aura $305 \times 1{,}18 \approx 360$ élèves.

3. Le ratio

DÉFINITION : Ratio

- On dit que **deux nombres** a et b sont, par exemple, dans le **ratio** 3 : 4 si $\dfrac{a}{3} = \dfrac{b}{4}$.
  On parle de ratio « trois pour quatre ».

  On peut modéliser ainsi :

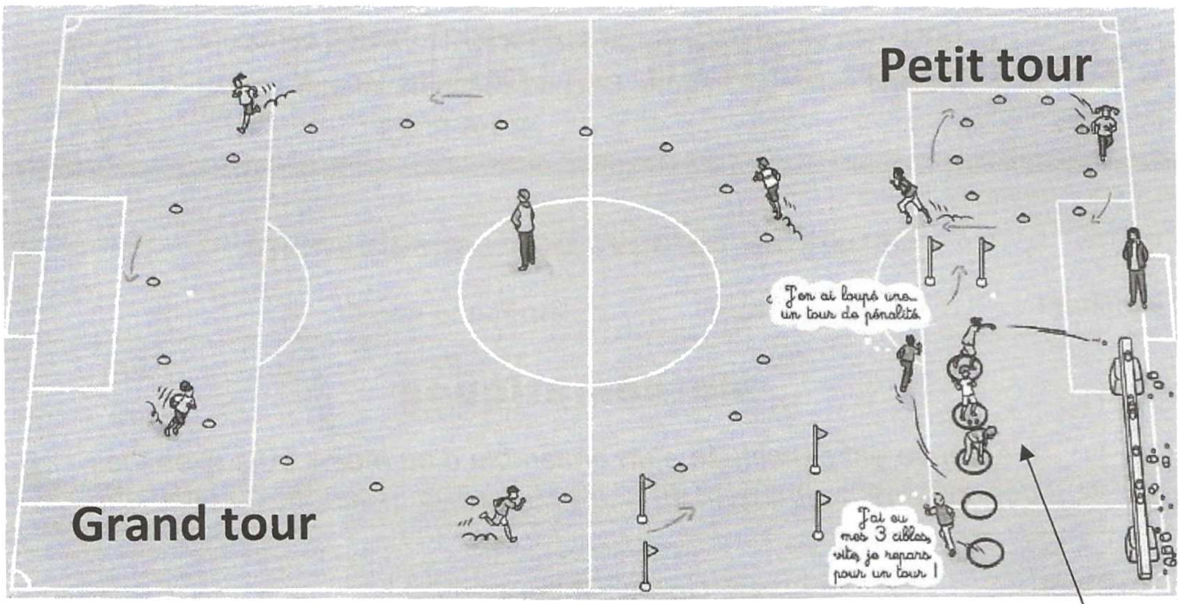
- On dit que **trois nombres** a, b et c sont, par exemple, dans le **ratio** 1 : 3 : 6 si $\dfrac{a}{1} = \dfrac{b}{3} = \dfrac{c}{6}$.
  On parle de ratio « un pour trois pour six ».

Exemple On souhaite partager 15 pièces d'or entre les pirates Seyon et Lloyd suivant le ratio 2 : 3. Cela veut dire que, à chaque fois que Seyon a 2 pièces, Lloyd en a 3.

- On calcule le nombre de parts à distribuer : 2 pour Seyon et 3 pour Lloyd, soit 5 parts.
- On divise la quantité de pièces à distribuer par le nombre de parts :
  15 pièces d'or $\div\, 5 = 3$ pièces d'or donc, une part vaut 3 pièces d'or.
- On distribue les parts : Seyon aura 2 parts soit 6 pièces d'or et Lloyd 3 parts soit 9 pièces d'or.

Groupement 1 - Exercice 1 - Partie 1 : vitesse

Dans cette version adaptée du biathlon, les élèves ont à parcourir, en courant, 4 grands tours tracés avec des plots sur un stade comme sur la figure ci-dessous.
À l'issue de chacun des 3 premiers tours, ils se présentent au pas de tir et lancent trois balles sur des cibles. S'ils atteignent 3 fois leur cible, ils n'ont pas de pénalité et repartent pour le grand tour suivant. En revanche, pour chaque lancer manqué, ils doivent effectuer un petit tour avant de repartir sur le grand tour.
Pour chaque élève on mesure la durée mise pour faire un parcours complet (grands tours + lancers + petits tours de pénalité le cas échéant). L'objectif est de mettre le moins de temps possible pour effectuer le parcours complet.



D'après www.revue-eps.com janvier-février-mars 2016

Dans cette partie, les élèves s'entraînent à la course sur le grand tour, sans effectuer de lancer de balles.

1) Pour un élève de CE1, la longueur du grand tour est de 250 m.

- **a)** On considère un élève, qui effectue les 4 tours en 10 minutes. Quelle est sa vitesse moyenne de course, en mètre par minute ?
- **b)** Un autre élève a couru les 4 tours à la vitesse moyenne de 150 m/min. Déterminer sa vitesse moyenne en kilomètre par heure.

2) Dans le tableau ci-dessous, les longueurs d'un grand tour pour des élèves de CM1 et de CM2 sont données, ainsi que les temps de course pour effectuer 4 grands tours, de deux élèves (un en CM1 et un en CM2).

Élève	Longueur de 1 grand tour	Temps de course pour 4 grands tours
Élève de CM1	400 m	9 minutes et 30 secondes
Élève de CM2	500 m	11 minutes et 8 secondes

Déterminer la vitesse moyenne (en mètre par minute, arrondie à l'unité) de chacun de ces deux élèves, lorsqu'ils ont réalisé les 4 grands tours.

Exemple de corrigé.

1) a) L'élève fait 4 tours de 250 m chacun en 10 minutes, c'est-à-dire 1 000 m en 10 minutes, ou encore 100 m en minute.
La vitesse moyenne de cet élève est de 100 m/min.

b) Cet élève parcourt 150 mètres en 1 minute, soit $\dfrac{150}{1\,000}$ kilomètre en $\dfrac{1}{60}$ d'heure.
Sa vitesse est de $v = \dfrac{\dfrac{150}{1\,000}\text{ km}}{\dfrac{1}{60}\text{ h}} = \underline{9\text{ km/h}}$.

2) L'élève de CM1 parcourt 4×400 m $= 1\,600$ m en 9 minutes et 30 secondes, soit 9,5 minutes.
Sa vitesse vaut $v_1 = \dfrac{1\,600\text{ m}}{9,5\text{ min}} \approx 168,42\text{ m/min}$.
L'élève de CM2 parcourt 4×500 m $= 2\,000$ m en 11 minutes et 8 secondes, soit $11 + \dfrac{8}{60}$ minutes.
Sa vitesse vaut $v_2 = \dfrac{2\,000\text{ m}}{11 + \dfrac{8}{60}\text{ min}} \approx 179,64\text{ m/min}$.
La vitesse moyenne est d'environ 168 m/min pour l'élève de CM1, et de 180 m/min pour celui de CM2.

Groupement 1 - Exercice 5 - Question 4 : pourcentage

Un ballon-sonde est un ballon à gaz utilisé pour faire des mesures locales dans l'atmosphère.
Dans le cadre du projet scientifique qu'elle anime pour sa classe de CM2, une professeure des écoles a reçu un petit ballon-sonde.
La pression atmosphérique diminuant avec l'altitude, le ballon se dilate en prenant de la hauteur et ses dimensions augmentent jusqu'à l'éclatement après une ascension de plus de vingt kilomètres.

1) Entre 0 mètre d'altitude et 4 500 mètres d'altitude, les longueurs du ballon-sonde augmentent de 25 %.
2) Par quel nombre les longueurs initiales sont-elles multipliées ?
3) Au niveau de la mer, a une aire d'environ 1,5 m^2 au dixième près. Montrer que, à 4 500 mètres d'altitude, l'enveloppe totale du ballon-sonde a une aire d'environ 2,3 m^2 arrondie au dixième près.
4) Donner un arrondi, au litre près, du volume du ballon-sonde à 4 500 mètres d'altitude.

Exemple de corrigé.

1) Une augmentation de 25 % correspond a un coefficient multiplicateur de $1 + \dfrac{25}{100} = 1,25$.
Les longueurs initiales sont multipliées par 1,25.

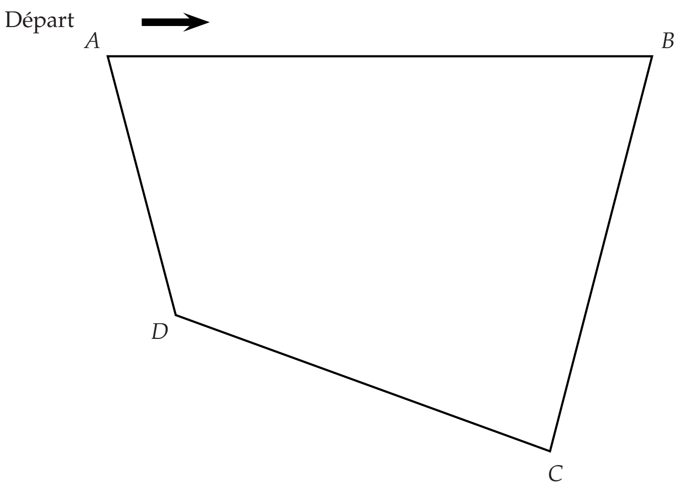
2) À cette altitude, les longueurs sont multipliées par 1,25, et les aires par $1,25^2 = 1,5625$.
On a alors $1,5625 \times 1,5\text{ m}^2 = 2,34375\text{ m}^2$.
À 4 500 mètres, l'aire de la sonde est d'environ 2,3 m^2.

3) À cette altitude, les longueurs sont multipliées par 1,25 et les volumes par $1,25^3 = 1,953125$.
On a alors $1,953125 \times 141\text{ L} = 275,39\text{ L}$.
À 4 500 mètres, le volume de la sonde est d'environ 275 L.

Groupement 2 - Exercice 2 : longueur, vitesse, échelle

Dans le cadre d'une liaison écoles-collège, une professeure d'EPS et une professeure des écoles organisent une course à vélo dont le parcours est composé de quatre tronçons en ligne droite.
La figure ci-dessous représente le parcours et n'est pas à l'échelle. Les élèves partent du point A et tournent dans le sens des aiguilles d'une montre. Les dimensions sont les suivantes :

$$AB = 960 \text{ m}, BC = 1,05 \text{ km}, CD = 780 \text{ m et } AD = 660 \text{ m}.$$



1) Montrer que le parcours a pour longueur 3 450 m.

2) Durant l'épreuve, Léo a réalisé, en 48 minutes, 2 tours complets et un tiers de tour du parcours.
- **a)** Déterminer la distance parcourue par Léo.
- **b)** Donner la vitesse moyenne de Léo en km/h.
- **c)** En gardant la même vitesse moyenne, Léo aura-t-il parcouru 15 km en moins d'une heure et demie ?

3) Une épreuve en relais est ensuite proposée. Tara parcourt les distances AB et BC à une vitesse moyenne de 10 km/h et Kevin parcourt les distances CD et DA à une vitesse moyenne de 6 km/h.
Quelle est la vitesse moyenne de ce binôme sur l'ensemble du parcours ? Justifier.

4)
- **a)** La diagonale $[BD]$ mesure 1,05 km. Représenter le parcours à l'échelle $\dfrac{1}{20\,000}$.
- **b)** Amina a roulé à vélo pendant 25 minutes à une vitesse moyenne de 11,5 km/h.
Placer sur la figure tracée à la question **4.(a)** le point S à l'endroit où se trouve Amina au bout de sa course. Justifier.

Exemple de corrigé.

1) $AB + BC + CD + AD = 960 \text{ m} + 1\,050 \text{ m} + 780 \text{ m} + 660 \text{ m} = 3\,450 \text{ m}.$
Le parcours a pour longueur 3 450 m.

2)
- **a)** 2 tours mesurent $2 \times 3\,450 \text{ m} = 6\,900 \text{ m}$ et un tiers de tour mesure $\dfrac{1}{3} \times 3\,450 \text{ m} = 1\,150 \text{ m}$.
Or, $6\,900 \text{ m} + 1\,150 \text{ m} = 8\,050 \text{ m} = 8,05 \text{ km}$.
Léo a parcouru une distance de 8,05 km.
- **b)** $v = \dfrac{d}{t} = \dfrac{8\,050 \text{ m}}{48 \text{ min}} = \dfrac{8,05 \text{ km}}{\frac{48}{60} \text{ h}} = 10,0625 \text{ km/h}.$
La vitesse moyenne de Léo est de 10,0625 km/h.

c) $v = \dfrac{d}{t} \iff t = \dfrac{d}{v} = \dfrac{15 \text{ km}}{10,0625 \text{ km/h}} \approx 1,49$ h.

Or, 1 heure et demi correspond à 1,5 heure (heure décimale) qui est bien supérieur à 1,49.

Léo aura donc parcouru les 15 km en (à peine) moins d'une heure et demie.

3) • Calcul du temps t_1 mis par Tara sur les deux premières portions $[AB]$ et $[CD]$:
la distance parcourue est de 960 m + 1,05 km = 0,96 km + 1,05 km = 2,01 km.

$t_1 = \dfrac{d}{v} = \dfrac{2,01 \text{ km}}{10 \text{ km/h}} = 0,201$ h.

• Calcul du temps t_2 mis par Kevin sur les deux dernières portions $[CD]$ et $[DA]$:
la distance parcourue est de 780 m + 660 m = 1 440 m = 1,44 km.

$t_2 = \dfrac{d}{v} = \dfrac{1,44 \text{ km}}{6 \text{ km/h}} = 0,24$ h.

• Calcul du temps total :
$t = t_1 + t_2 = 0,201 \text{ h} + 0,24 \text{ h} = 0,441$ h.

• Calcul de la vitesse moyenne :
$v = \dfrac{d}{t} = \dfrac{3,45 \text{ km}}{0,441 \text{ h}} \approx 7,82$ km/h.

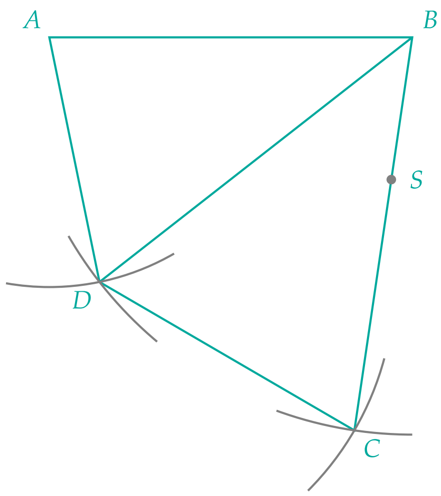
La vitesse moyenne du binôme est d'environ 7,82 km/h.

4) a) Une échelle de $\dfrac{1}{20\,000}$ signifie que 1 cm sur le dessin représente 20 000 cm, soit 200 m dans la réalité.

On peut récapituler les différentes distances dans un tableau de proportionnalité :

	échelle	AB	BC	CD	DA	BD	
Longueur réelle, en m	200	960	1 050	780	660	1 050	$\downarrow \div 200$
Longueur sur la figure, en cm	1	4,8	5,25	3,9	3,3	5,25	

On obtient alors la figure suivante, à l'échelle $\dfrac{1}{20\,000}$:



b) On calcule la distance parcourue par Amina :

$d = v \times t = 11,5 \text{ km/h} \times 25 \text{ min} = 11,5 \text{ km/h} \times \dfrac{25}{60} \text{ h} \approx 4,792 \text{ km} \approx 4\,792$ m.

Or, 4 792 m = 3 450 m + 1 342 m, elle a donc parcouru un tour entier, plus 1 342 m.

Elle se retrouvera alors sur la portion [BC], à 1 342 m − 960 m = 382 m de B.

Il nous reste à utiliser l'échelle : 382 ÷ 200 = 1,91 donc, on place donc le point S à 1,91 cm de B.

Groupement 3 - Exercice 1 - Question 3 : pourcentage

Une seule des quatre réponses proposées est exacte. Donner la bonne réponse en la justifiant.
Une réponse erronée n'enlève pas de point. Une réponse non justifiée ne rapporte pas de point.

Question :	A	B	C	D
Le prix d'un article subit une hausse de 10 % suivie d'une baisse de 10 % quelques semaines plus tard. Au final :	le prix de l'article a baissé de 1 %.	l'article a retrouvé son prix initial.	le prix de l'article a augmenté de 1 %.	le prix de l'article a augmenté de 5 %.

Exemple de corrigé.

Une hausse de 10 % correspond à un coefficient multiplicateur de $1 + \frac{10}{100} = 1,1$.

Une baisse de 10 % correspond à un coefficient multiplicateur de $1 - \frac{10}{100} = 0,9$.

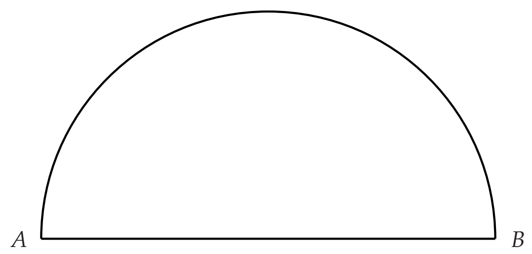
Si on a une hausse de 10 %, suivie d'une baisse de 10 %, cela fait un coefficient de $1,1 \times 0,9 = 0,99$.

Or, $0,99 = 1 - \frac{1}{100}$, ce qui correspond à une baisse de 1 %.

La bonne réponse est A.

Groupement 3 - Exercice 2 - Question 2 : échelle, longueur, vitesse, angle

Célia s'entraîne à courir tous les jours de la semaine sur le même parcours.
Son parcours d'entraînement est représenté ci-dessous.
Le diamètre $[AB]$ du demi-cercle reliant le point A au point B a pour longueur 2 300 m.



1) Représenter le parcours à l'échelle $\frac{1}{20\,000}$. Justifier les mesures retenues pour réaliser la construction à l'échelle.

2) Montrer que la distance du parcours, arrondie à l'unité, est d'environ 5 913 m.

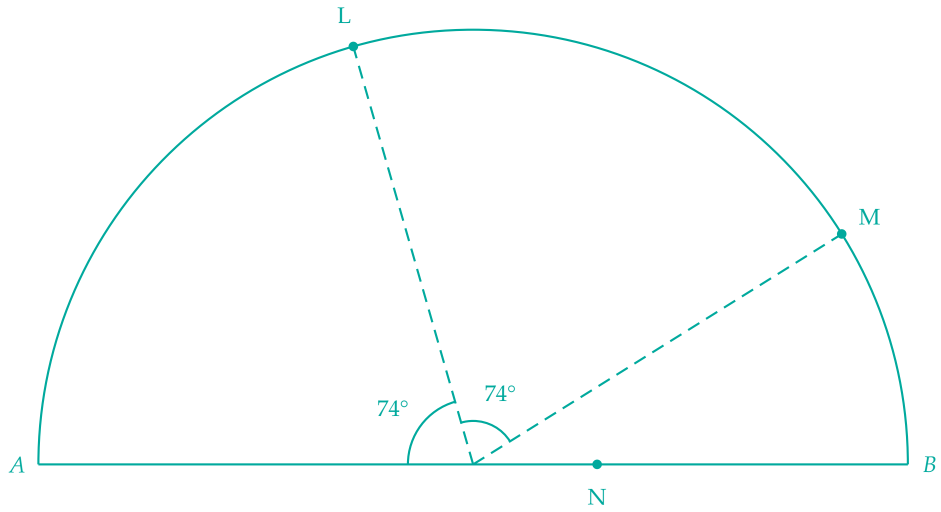
3) Aujourd'hui, Célia a bouclé le parcours sur une durée de 33 minutes et 36 secondes.
Quelle a été sa vitesse moyenne en km/h, arrondie au dixième près ?

4) Célia a l'habitude d'effectuer le parcours dans le sens des aiguilles d'une montre en partant du point A. Sur la représentation de la question **2.(a)**, placer les points L, M et N correspondants respectivement au quart, à la moitié et aux trois quarts du parcours.

Vu au CRPE en 2022

Exemple de corrigé.

1) À l'échelle $\frac{1}{20\,000}$, 1 cm sur la figure représente 20 000 cm dans la réalité, c'est-à-dire 200 m.
Or, 2 300 m $= 11,5 \times 200$ m donc, le diamètre du demi-cercle mesure 11,5 cm sur la figure.



2) Le parcours est composé d'un demi-cercle de rayon 1 150 m et d'une ligne droite de 2 300 m.

La longueur du demi-cercle vaut $\dfrac{2 \times \pi \times 1\,150\,\text{m}}{2} \approx 3\,612{,}83\,\text{m}$.

$3\,612{,}83\,\text{m} + 2\,300\,\text{m} = 5\,912{,}83\,\text{m}$.

Le parcours mesure environ 5 913 m.

3) $$v = \frac{d}{t} = \frac{5\,913\,\text{m}}{33\,\text{min}\ 36\,\text{s}} = \frac{5\,913\,\text{m}}{2\,016\,\text{s}} = \frac{5{,}913\,\text{km}}{\frac{2\,016}{3\,600}\,\text{h}} \approx 10,56\ \text{km/h}.$$

La vitesse de Célia a été d'environ 10,6 km/h.

4) Le parcourt mesure 5 913 m.

– Le quart de 5 913 m est égal à 1 478,25 m.

Or, les 3 613 m du demi-cercle correspondent à un angle de 180°.

Pour 1 478,25 m, l'angle correspond à $\dfrac{1\,478{,}25\,\text{m} \times 180°}{3\,613\,\text{m}} \approx 74°$.

– La moitié de 5 913 m est égale à 2 956,5 m, qui reste sur le demi-cercle, et dont l'angle est le double que pour le quart du parcours, soit 148°.

– Comme un quart du parcours est égal à 1 478,25 m, les trois quarts correspondent au moment où Célia est à 1 478,25 m de la fin du parcours, ce qui correspond à une distance de $\dfrac{1\,478,25}{200} = 7,39$ cm du point A sur le segment $[AB]$.

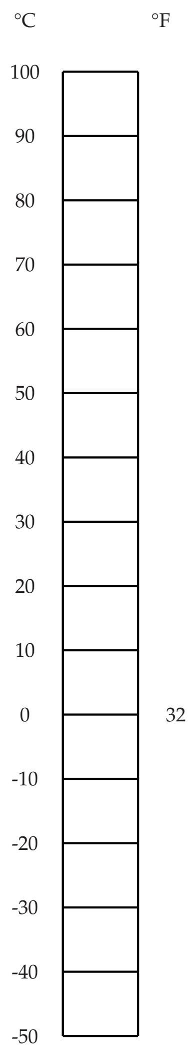
Entraînement

Maîtriser les bases avec Mathenpoche

Classe	N°	Thème	Dans le cours
6e	N6	Proportionnalité	1. et 2.
	O1	Proportionnalité	1. et 2.
5e	B1	Proportionnalité	1. et 2.
4e	B1	Proportionnalité	1. et 2.
	G4	Grandeurs composées	2.
3e	B1	Proportionnalité	1. et 2.
	G2	Grandeurs composées	2.

1 CRPE 2006 G2

Deux échelles de repérage de la température sont principalement utilisées : l'échelle Celsius et l'échelle Fahrenheit.



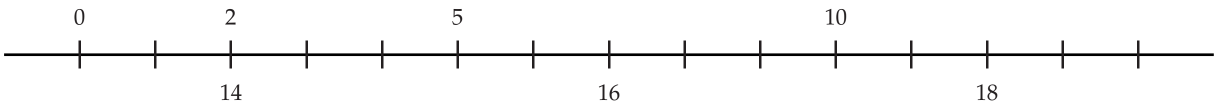
La température de la glace fondante correspond à 0 degré Celsius (°C) et à 32 degrés Fahrenheit (°F).
La température d'ébullition de l'eau correspond à 100 °C et à 212 °F.
Les deux échelles sont régulières.

1) Reproduire sur la copie sous forme d'un schéma le tube de thermomètre figurant ci-contre. Sur la partie gauche sont indiquées les graduations de l'échelle Celsius de 10 en 10, entre -50 °C et 100 °C.
   a) Indiquer, à droite du tube, les valeurs correspondantes de l'échelle Fahrenheit. Expliciter la démarche.
   b) Existe-t-il une relation de proportionnalité entre les deux suites de nombres figurant sur le dessin (échelle Fahrenheit et échelle Celsius) ? Justifier.
2) Soit t la valeur en °C d'une température, et T la valeur en °F de la même température. On admet qu'il existe entre T et t une relation de la forme $T = at + b$.
   Montrer que : $T = 1,8t + 32$.
3) Le thermomètre indique 25 °C.
   a) Calculer la valeur correspondante en °F.
   b) Expliquer comment il est possible de vérifier ce résultat sur le dessin.
4) Calculer la température à laquelle les deux échelles donnent la même valeur.
   Vérifier ce résultat sur le dessin.

Entraînement

2 **2007-G1**

Dans la figure ci-dessous se trouvent deux graduations régulières d'une même droite, l'une au dessus (appelée ici graduation supérieure), l'autre en dessous (appelée ici graduation inférieure).
Par exemple, le nombre 2 de la graduation supérieure correspond au nombre 14 de la graduation inférieure.



1) Quel est le nombre de la graduation inférieure correspondant au nombre 12 sur la graduation supérieure ? Pour les questions suivantes, les réponses seront justifiées.

2) Quel est le nombre de la graduation inférieure correspondant au nombre 2 007 sur la graduation supérieure ?

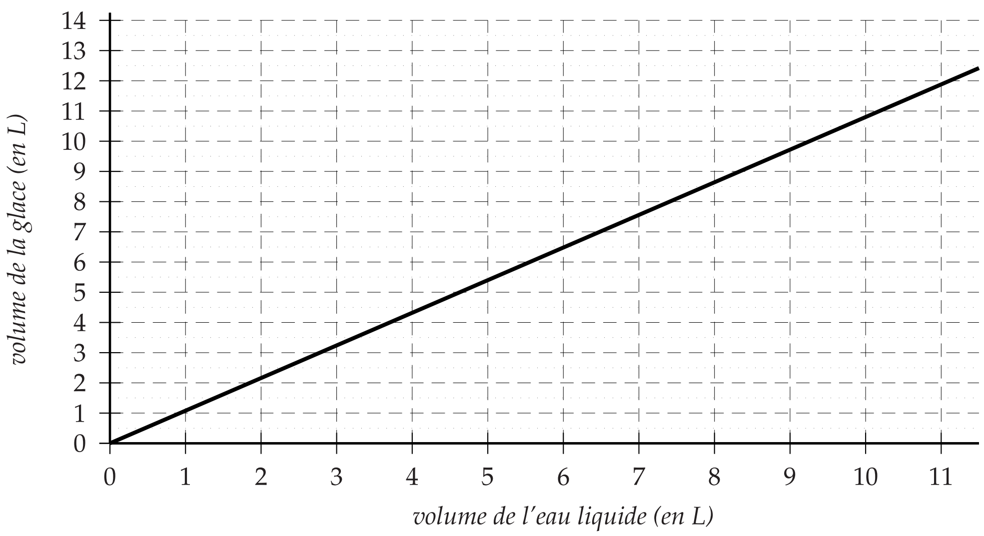
3) Quel est le nombre de la graduation supérieure correspondant au nombre 0 sur la graduation inférieure ?

4) On appelle x un nombre de la graduation supérieure et y le nombre correspondant sur la graduation inférieure.
La correspondance entre x et y est donnée par l'égalité $x = ay + b$.
Déterminer a et b.

3 **CRPE 2015 G1**

L'eau en gelant augmente de volume. Le segment de droite ci-dessous représente le volume de glace (en litre), en fonction du volume d'eau liquide (en litre).

Volume de la glace en fonction du volume d'eau liquide en litres



On répondra aux questions 1), 2) et 3) en utilisant le graphique ci-dessus.

1) Quel est le volume de glace obtenu avec 7 litres de liquide ?

2) Quel volume d'eau liquide faut-il mettre à geler pour obtenir 9 litres de glace ?

3) Le volume de glace est-il proportionnel au volume d'eau liquide ? Justifier votre réponse.

4) On admet que 10 litres d'eau liquide donnent 10,8 litres de glace. De quel pourcentage ce volume d'eau augmente-t-il en gelant ?

5) Dans un souci de préservation de la ressource en eau, la ville de Lyon a imaginé un dispositif de recyclage. Cette ville fournit un volume de 20 m^3 d'eau par jour aux engins de nettoiement grâce à l'eau récupérée de la fonte de la glace de la patinoire de Baraban.
À combien de litres de glace correspond le volume d'eau fourni par la ville de Lyon pour 30 jours de nettoyage ?

4 **CRPE 2015 G3**

Pour colorer l'émail des objets qu'il fabrique, un artisan utilise des oxydes métalliques. Pour peser certains de ces oxydes métalliques, il utilise un peson à ressort constitué d'un ressort, d'une réglette et d'un crochet pour accrocher les masses à mesurer.

Le peson est suspendu par l'une de ses extrémités. Lorsqu'on y accroche une masse, son ressort s'allonge.

Au repos, le ressort du peson a pour longueur 14 cm. Avec une masse de 10 g, le ressort a pour longueur 14,5 cm.

Chaque fois que l'on ajoute 10 g à une masse déjà suspendue, le ressort s'allonge de 0,5 cm.

1) Quelle longueur mesurera le ressort si on suspend une masse de 70 g ?

2) L'artisan constate que le ressort mesure 28 cm. Quelle masse a-t-elle été suspendue au ressort ?

3) La longueur du ressort est-elle proportionnelle à la masse suspendue ? Justifier votre réponse.

5 **CRPE 2018 G1**

Une voiture est filmée lors d'une prise de vue cinématographique. Elle est équipée de roues à cinq rayons ayant un diamètre total de 54 cm. L'une de ces roues est représentée ci-dessous.

1) Calculer la circonférence de cette roue en cm (arrondie au millimètre).

2) La voiture roule à 110 km/h.

   a) Calculer le nombre de tours par seconde que fait la roue (au tour près).

   b) La caméra utilisée a une vitesse de défilement de 24 images par seconde.
   Combien de tours aura fait le pneu de la voiture entre deux images ?

3) À quelle vitesse, en km/h, devrait rouler la voiture pour que, en regardant le film, on ait l'impression que ses roues ne tournent pas ?

6 **CRPE 2008 G2**

Deux robots, Arthur et Boz, sont placés aux deux extrémités d'une piste rectiligne de 300 mètres de long qui relie un point A à un point B. Arthur est placé au point A et Boz au point B.

On les fait partir l'un vers l'autre à 9 heures précises. Arthur se déplace à la vitesse constante de 6 km/h et Boz à la vitesse constante de 24 km/h.

1) Exprimer ces deux vitesses en mètre par minute.

2) On veut déterminer l'heure de rencontre des deux robots.

   a) Représenter dans un même repère les déplacements des deux robots.

   b) Par lecture graphique, estimer l'heure de la rencontre.

3) Déterminer par le calcul, l'heure de rencontre des deux robots.

Entraînement

7 **CRPE 2019 G2**

Répondre aux quatre questions suivantes en utilisant les trois documents ci-après.

1) Un véhicule a parcouru le tronçon du tunnel de Noailles et la vitesse moyenne calculée est de 123 km/h.
Quelle seras la vitesse retenue ?

2) Un autre véhicule a parcouru la distance entre les deux points d'enregistrement en 4 minutes.
Quelle sera la vitesse retenue ?

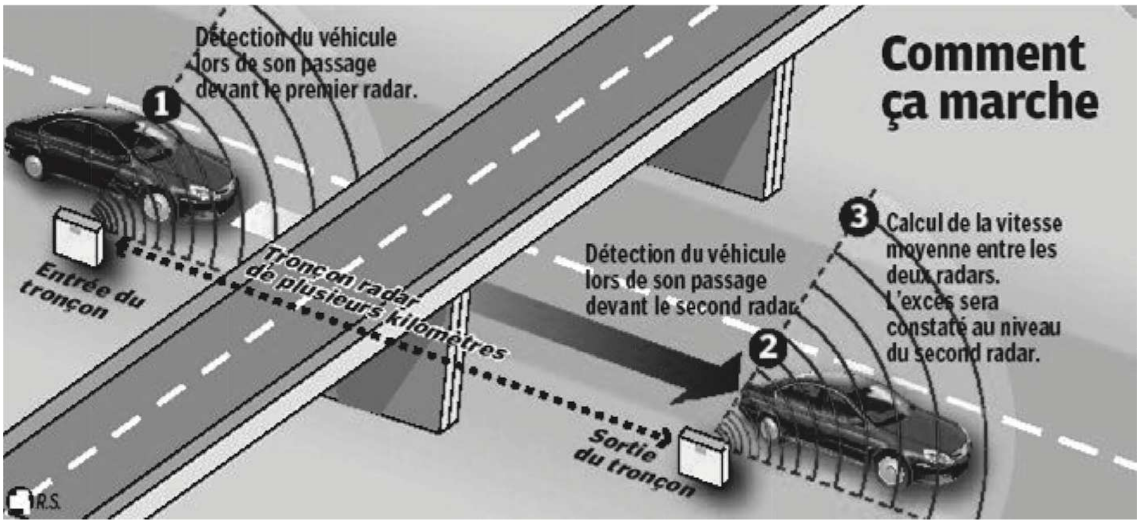
3) Sur une contravention reçue suite à un excès de vitesse sur ce tronçon, la vitesse retenue est 114 km/h.
Quelle était la vitesse moyenne calculée par l'ordinateur pour ce véhicule ?

4) La plaque d'immatriculation d'un véhicule est enregistrée à 9 h 17 min 56 s devant le premier radar, puis à 9 h 22 min 07 s devant le second radar.
Le conducteur de ce véhicule sera-t-il sanctionné par une contravention ?

Document 1 : Le radar tronçon du tunnel de Noailles

La portion de l'autoroute A20 entre Toulouse et Paris est équipée d'un radar-tronçon sur une distance de 5,1 km à proximité du tunnel de Noaillles.
La vitesse est limitée à 70 km/h lors de travaux de réfection du tunnel.

Document 2 : Principe de fonctionnement d'un radar-tronçon



Document 3 : Calcul de la vitesse retenue pour la contravention

Un ordinateur calcule la vitesse moyenne de la voiture sur le tronçon puis détermine la vitesse retenue afin de prendre en compte les erreurs de précision du radar. Si la vitesse retenue est au-dessus de la vitesse limite, l'automobiliste reçoit une contravention.

Vitesse moyenne calculée par l'ordinateur	inférieure ou égale à 100 km/h	supérieure à 100 km/h
Vitesse retenue	On enlève 5 km/h à la vitesse moyenne calculée	On diminue la vitesse moyenne calculée de 5 %

8 CRPE 2018 G3

Au 1er janvier 2018, le Jamaïcain Usain Bolt détient le record du monde du 200 mètres en 19,19 secondes.

1) Déterminer sa vitesse moyenne en km/h. Arrondir au dixième.
2) À cette vitesse-là, combien mettrait-il de temps pour effectuer un marathon dont la longueur est de 42,195 km ? On donnera la réponse en heures, minutes et secondes, arrondie à la seconde près.
3) Le précédent record du monde du 200 mètres était détenu par l'américain Michael Johnson, « La locomotive de Wako »», avec un temps de 19,32 secondes aux Jeux Olympiques d'Atlanta en 1996.
De quel pourcentage Usain Bolt a-t-il réduit le temps du record du monde du 200 mètres ?

9 CRPE 2017 G1-G3 et 2018 G1-G3

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant la réponse. Une réponse exacte, mais non justifiée, ne rapporte aucun point. Une réponse fausse n'enlève pas de point.

1) On réduit respectivement la largeur et la longueur d'un rectangle de 20 % et 10 %.
Affirmation : « L'aire du rectangle ainsi obtenu a diminué de 28 %. »
2) Un rectangle a une largeur et une longueur qui mesurent respectivement 6 cm et 9 cm. On réduit la largeur de 20 % et la longueur de 10 %.
Affirmation : « Le périmètre du rectangle ainsi obtenu a diminué de 15 %. »
3) **Affirmation :** durant les soldes si on baisse le prix d'un article de 30 % puis de 20 %, alors le prix de l'article a baissé de 50 %.
4) Un prix subit une baisse de 30 % puis le nouveau prix subit une hausse de 50 %.
Affirmation : le prix final est 5 % plus élevé que le prix initial.
5) **Affirmation :** si des prix augmentent de 5 % par an, ils auront plus que doublé en 15 ans.
6) Arthur a acheté un article bénéficiant d'une réduction de 30 % et a ainsi économisé 48 €.
Affirmation : Au final, il a payé 112 € pour cet article.

10 Histoires de ratios

Les trois questions suivantes sont indépendantes.

1) On considère le tableau suivant représentant le nombre de matchs gagnés et perdu en rugby, judo et handball durant une rencontre inter-clubs.

Sport	matchs gagnés	matchs perdus
Rugby	9	6
Judo	12	8
Handball	10	5

   a) Quels sports ont un ratio équivalent gains-pertes ?
   b) Pour le handball, quel est le ratio gains-matchs joués ? Quelle est la fraction de matchs gagnés ? Quel est le pourcentage de matchs gagnés ?
2) Deux amis ont joué au loto et leur mise s'est faite selon le ratio 3 : 5. Ils gagnent 64 €.
Quelle est la somme d'argent qui revient à chacun d'eux ?
3) Adam va fêter ses 10 ans. Avant son anniversaire, il essaie une nouvelle recette de cocktail sans alcool, pour laquelle il faut 2 verres de jus d'orange pour 3 verres de jus d'ananas et 4 verres de jus de pomme.
Cette recette lui plaît. Pour tous ses amis, il veut préparer 45 L de cocktail.
Combien de litres de chaque ingrédient doit-il acheter ?

Entraînement

ORGANISATION ET GESTION DE DONNÉES

7

Probabilités

Portait de Luca Pacioli © Musée Capodimonte de Naples

Un peu d'histoire

C'est en cherchant à résoudre des problèmes posés par les jeux de hasard que les mathématiciens donnent naissance aux probabilités. Lors de fouilles archéologiques, on a trouvé des indices montrant que les jeux de hasard se pratiquaient déjà 5 000 ans av. J.-C. (on utilisait des osselets). L'un des jeux de la Grèce antique consistait d'ailleurs à lancer quatre osselets ; pour les joueurs, il s'agissait d'obtenir que les quatre faces supérieures soient distinctes. Les premiers dés connus ont été mis à jour à Tepe Gawra, au nord de l'Irak, et datent du troisième millénaire av. J.-C. Le jeu de cartes était également pratiqué dans divers pays depuis des époques reculées. Les cartes actuelles apparurent en France au 14e siècle et leur utilisation donna très vite lieu à des jeux d'argent.

Le premier écrit que l'on connait sur les probabilités est celui du mathématicien italien Luca **Pacioli** : *Summa de Arithmetica, Geometrica, Proportio et Proportionalita*, publié en 1494. Par la suite, on attribue souvent la réelle naissance des probabilités à la correspondance entre **Fermat** et **Pascal** concernant une querelle de joueurs : le physicien et mathématicien hollandais **Huygens** en prend connaissance et publie un traité sur le sujet en 1657, *Tractatus de ratiociniis in aleae ludo* (Traité sur les raisonnements dans le jeu de dés). **Bernoulli**, **Laplace**… mettent peu à peu un cadre à cette nouvelle branche des mathématiques.

Cours

1. Dénombrement

Dénombrer consiste à utiliser un moyen approprié pour déterminer le nombre d'éléments d'un ensemble.

Méthodes de dénombrement

Pour dénombrer, outre la méthode de dénombrement sans support, on peut utiliser :
- un diagramme de Venn ;
- un tableau ;
- un arbre.

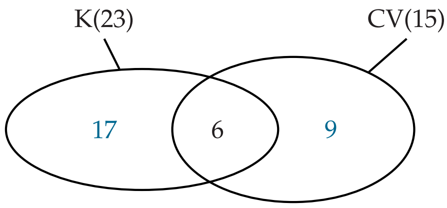
Exemple

Dans un centre aéré, deux ateliers sportifs sont proposés et tous les enfants doivent s'inscrire à au moins un atelier.
À la fin de la journée, le directeur du centre fait le constat suivant :
- 23 ont participé à l'atelier kayak ;
- 15 ont participé à l'atelier cerf-volant.

D'autre part, il constate que 6 enfants ont participé aux deux ateliers. Combien y-avait-il d'enfants présents ce jour là ?

Correction

On peut utilise un diagramme de Venn (de son inventeur *John Venn* 1834-1923) : un ensemble est constitué des enfants ayant pratiqué le kayak, l'autre le cerf-volant.



$17 + 6 + 9 = 32$ donc, il y a 32 enfants présents ce jour là.

Exemple

On jette deux dés à quatre faces (tétraèdre régulier) numérotées de 1 à 4 et on calcule la produit obtenu. Combien de résultats sont supérieurs strictement à 4 ?

Correction

Dans ce cas, on peut faire un tableau : il y a 8 résultats supérieurs strictement à 4.

	1	**2**	**3**	**4**
1	1	2	3	4
2	2	4	6	8
3	3	6	9	12
4	4	8	12	16

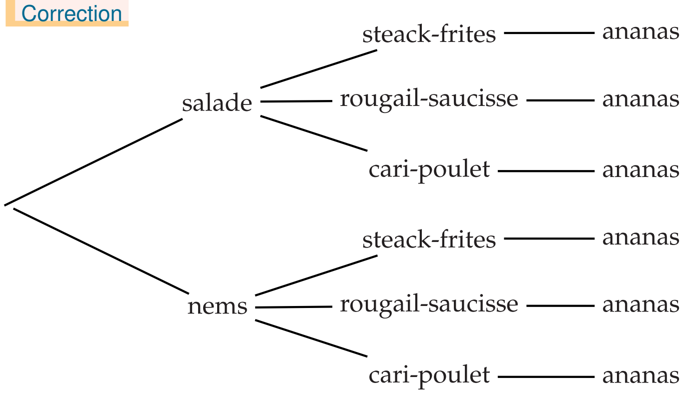
Lorsque le nombre de variables dépasse 2, on ne peut plus utiliser un tableau.

Exemple

Un restaurant propose la carte suivante :
- entrée : salade ou nems ;
- plat : steack-frites ou rougail-saucisse ou cari-poulet ;
- dessert : ananas.

Déterminer tous les menus composés d'une entrée, d'un plat et d'un dessert que l'on peut commander.

Correction



On a donc $2 \times 3 \times 1 = 6$ menus différents, chacun étant donné par une succession de trois branches consécutives de l'arbre.

REMARQUE : la dernière branche de l'arbre « ananas » n'apporte rien numériquement, mais elle permet d'avoir une vision globale des menus.

2. Vocabulaire des événements

DÉFINITION : Expérience aléatoire

On appelle **expérience aléatoire** une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat de façon certaine.
Chaque résultat possible et prévisible d'une expérience aléatoire est appelé **éventualité**.

Exemple

- Tirage des six numéros du loto : « obtenir 2 – 5 – 17 – 23 – 36 – 4 » est une éventualité de cette expérience aléatoire.
- Lancer d'une pièce de monnaie : « obtenir pile » et « obtenir face » sont les deux seules éventualités de l'expérience.

DÉFINITION : Univers

L'ensemble formé par les éventualités est appelé **univers**, souvent noté Ω.

Exemple

- Lancer d'une pièce de monnaie : $\Omega = \{\text{ pile} ; \text{face }\}$.
- Lancer d'un dé à six faces : $\Omega = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 \}$.

DÉFINITION : Événement

Un **événement** de l'expérience aléatoire est une partie quelconque de l'univers.

Exemple Lancer d'un dé à six faces : « obtenir un numéro pair » est un événement que l'on peut noter $B = \{ 2 ; 4 ; 6 \}$.

DÉFINITION : Événement impossible, certain

L'événement qui ne contient aucune éventualité est l'**événement impossible**, noté $\varnothing$.
L'événement composé de toutes les éventualités est appelé l'**événement certain**.

Exemple

- « Obtenir un 15 » à la bataille (jeu de cartes) est un événement impossible.
- Lancer d'un dé à six faces : « obtenir un nombre positif » est un événement certain.

DÉFINITION : Événement contraire

Pour tout événement A il existe un événement noté $\overline{A}$ et appelé **événement contraire** de A, qui est composé des éléments de Ω qui ne sont pas dans A.

Exemple

- Lancer d'une pièce de monnaie : si $A = \{\text{ pile }\}$, son événement contraire est $\overline{A} = \{\text{ face }\}$.
- Lancer d'un dé à six faces : si A est l'événement « obtenir un nombre inférieur ou égal à 4 », alors événement contraire $\overline{A}$ est l'événement « obtenir 5 ou 6 ».

3. Calcul de probabilités

DÉFINITION : Équiprobabilité

On dit qu'il y a **équiprobabilité** lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité ; dans ce cas, on a :

$$\mathcal{P}(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega} = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

REMARQUE : dans un exercice, pour signifier que l'on est dans une situation d'équiprobabilité on a généralement dans l'énoncé un expression du type :

- on lance un dé **non pipé** ;
- dans une urne, les boules sont **indiscernables** au toucher ;
- on rencontre **au hasard** une personne parmi...

Exemple

On lance un dé équilibré à six faces. On considère les événements A : « obtenir un nombre pair » et B : « obtenir un diviseur de six ». Déterminer la probabilité de chacun des événements A et B.

Correction

Le dé est équilibré, on est donc dans une situation d'équiprobabilité.

- $A = \{ 2 ; 4 ; 6 \}$ donc, $\mathcal{P}(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$;
- $B = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 6 \}$ donc, $\mathcal{P}(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

PROPRIÉTÉ : Valeurs d'une probabilité

$\mathcal{P}(\varnothing) = 0$; $\quad 0 \leqslant \mathcal{P}(A) \leqslant 1$; $\quad \mathcal{P}(\Omega) = 1$; $\quad \mathcal{P}(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Exemple

On tire une carte dans un jeu de 52 cartes. On considère les événements A : « obtenir un cavalier » et B : « obtenir un roi ». Déterminer la probabilité des événements A, B et $\overline{B}$.

Correction

Nous sommes dans une situation d'équiprobabilité.

- $A = \varnothing$ donc, $\mathcal{P}(A) = 0$;
- B ={roi de pique, coeur, carreau, trèfle}. $\mathcal{P}(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$;
- $\overline{B}$: « ne pas obtenir de roi ». $\mathcal{P}(\overline{B}) = 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$.

4. Arbres : du dénombrement aux probabilités

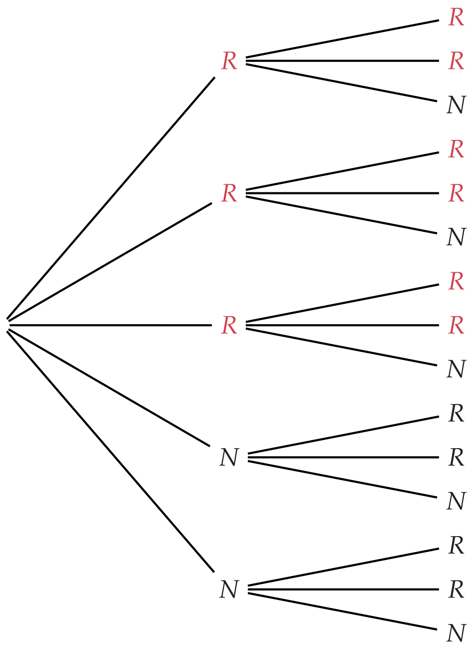
DÉFINITION : Arbre de probabilité

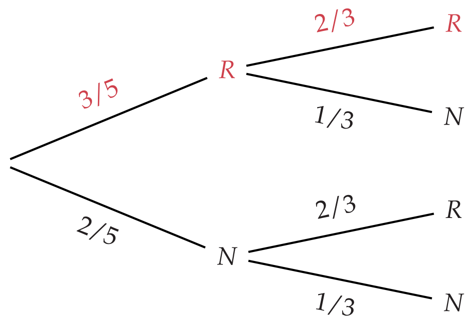
Pour dénombrer ou représenter les différentes issues d'une expérience aléatoire, on peut utiliser un **arbre de probabilités**. Chacune de ses branches représente un événement possible et peut comporter la probabilité de cet événement : il s'agit alors d'un **arbre pondéré**.

Arbre pondéré ou non ?

On considère l'expérience aléatoire suivante : *on dispose de deux urnes A et B. L'urne A contient trois boules rouges et deux boules noires. L'urne B contient deux boules rouges et une boule noire. L'expérience consiste à piocher une boule au hasard dans l'urne A, puis dans l'urne B. On note R l'événement « on tire une boule rouge » et N l'événement « on tire une boule noire ».*

Cette situation peut-être modélisée par les arbres de probabilité suivants :





L'arbre de gauche est un arbre simple, il a l'avantage de représenter toutes les situations, qui sont alors équiprobables. L'arbre ci-dessus est un arbre pondéré, il a l'avantage de condenser la situation, chaque branche possédant un « poids ».

PROPRIÉTÉ : Probabilité le long d'un arbre

Dans un arbre pondéré, une succession de plusieurs branches est appelée un **chemin**. La probabilité de l'issue auquel conduit un chemin est égal au produit des probabilités le long de ce chemin.

Exemple

On reprend l'exemple précédent et on souhaite déterminer la probabilité de l'événement : « À l'issue du tirage, on a obtenu deux boules rouges ».

Correction

Le calcul est différent suivant l'arbre utilisé.

- Avec l'arbre simple, on compte le nombre de chemins comportant deux fois l'événement R. Il y a en a 6.
  Or, le nombre de résultats possibles est de 15 (5 fois 3). Les situations étant équiprobables, on peut appliquer la formule de probabilité :
  $\mathcal{P} = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \dfrac{6}{15} = \dfrac{2}{5}$.
- Avec l'arbre pondéré, il suffit de multiplier le poids des branches de l'unique chemin comportant deux événements R. On trouve
  $\mathcal{P} = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{5}$.

Exemple

Avec le même exemple, on souhaite déterminer la probabilité d'obtenir deux boules de couleurs différentes.

Correction

Cette condition est réalisée lorsqu'on obtient une boule rouge dans l'urne A puis une boule noire dans l'urne B, ou lorsqu'on obtient une boule noire dans l'urne A puis une boule rouge dans l'urne B.

Or, $\mathcal{P}(R_1 \cap N_2) = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{3}{15}$ et $\mathcal{P}(N_1 \cap R_2) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{15}$,

donc : $\mathcal{P} = \mathcal{P}(R_1 \cap N_2) + \mathcal{P}(N_1 \cap R_2) = \dfrac{3}{15} + \dfrac{4}{15} = \dfrac{7}{15}$.

Vu au CRPE en 2022

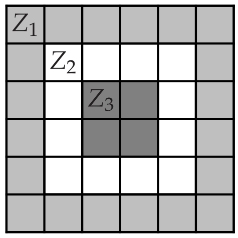
Groupement 1 - Exercice 2 : probabilités

On dispose d'un dé cubique non truqué dont les faces opposées sont identiques :
deux faces numérotées 0, deux faces numérotées 1 et deux faces numérotées 2.

1) On effectue deux lancers et on lit, à chaque lancer, le chiffre inscrit sur la face supérieure.
Les deux lancers permettent d'obtenir un nombre décimal : le résultat du premier lancer donne le chiffre des unités et celui du second lancer le chiffre des dixièmes.

a) Donner la liste de tous les nombres que l'on peut obtenir.
b) Justifier que la probabilité d'obtenir 1,2 est égale à 1/9.
c) Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre strictement inférieur à 1 ?
d) Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre entier ?
e) Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre décimal ?

2) Le tapis représenté ci-contre est constitué de 36 carrés de côté 10 cm. Ces carrés définissent trois zones Z_1 ,Z_2 et Z_3 repérées par des couleurs différentes.
Avec le même dé que précédemment, on effectue un lancer sur ce tapis et on regarde la face supérieure. Si le dé tombe à cheval sur deux zones, on le relance.
On admet que la probabilité que le dé tombe dans une zone est proportionnelle à l'aire de la zone.



a) Quelle est la probabilité que le dé tombe dans la zone Z_2 ?
b) Quelle est la probabilité que le dé tombe en zone Z_2 et donne le nombre 1 ?
c) Quelle est la probabilité que le dé tombe en zone Z_2 et donne un nombre pair ?

Exemple de corrigé.

1) a) On peut, par exemple, recenser toutes les possibilités grâce à un tableau.

dé 1\dé 2	0	1	2
0	0,0	0,1	0,2
1	1,0	1,1	1,2
2	2,0	2,1	2,2

On peut obtenir les nombres
0 ; 0,1 ; 0,2 ; 1 ; 1,1 ; 1,2 ; 2 ; 2,1 et 2,2.

b) On obtient 1,2 en tirant un « 1 » au premier lancer et un « 2 » au deuxième lancer.
La probabilité d'obtenir 1,2 est donc de $p = \dfrac{2}{6} \times \dfrac{2}{6} = \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$.
Remarque : notons également que le nombre de faces numérotées 1, 2 et 3 sont égales, on a donc la même probabilité d'obtenir chaque issue du tableau, à savoir $\dfrac{1}{9}$.

c) On obtient un nombre strictement inférieur à 1 en tirant un « 0 » au premier lancer quel que soit le deuxième lancer. La probabilité est donc de $p = \dfrac{1}{3}$.

d) On a 3 issues possibles (0 ; 1 et 2) donc, la probabilité d'obtenir un nombre entier est de $3 \times \dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{3}$.

e) Tous les nombres obtenus sont des nombres décimaux car ils peuvent s'écrire sous forme de fractions décimales : $0,1 = \dfrac{1}{10}$; $0,2 = \dfrac{2}{10}\ldots$. Donc, la probabilité d'obtenir un nombre décimal est égal à 1.

2) a) La zone Z_2 a une aire de $12 \times (10\text{ cm})^2 = 1\,200\text{ cm}^2$ et l'aire total vaut $36 \times (10\text{ cm})^2 = 3\,600\text{ cm}^2$.
Donc, la probabilité de tomber sur cette zone vaut $\dfrac{1\,200\text{ cm}^2}{3\,600\text{ cm}^2} = \dfrac{1}{3}$.

b) La probabilité d'obtenir le nombre 1 est de $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ et celle de tomber sur la zone 2 vaut $\frac{1}{3}$.

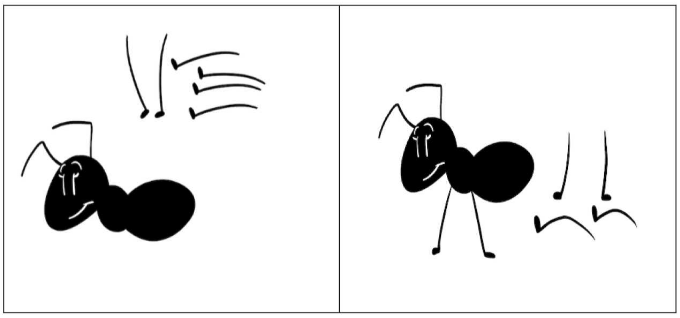
Donc, la probabilité que ces deux issues soient réalisées en même temps est de $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

c) La probabilité d'obtenir un nombre pair est de $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ et celle de tomber sur la zone 2 vaut $\frac{1}{3}$.

Donc, la probabilité que ces deux issues soient réalisées en même temps est de $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$.

Groupement 2 - Exercice 1 : probabilités

Un enseignant de grande section propose à ses élèves un jeu pour travailler la décomposition et la recomposition de nombres. Le jeu se compose de deux dés cubiques équilibrés et de corps de fourmis à compléter avec des pattes comme sur le dessin ci-dessous.



Sur les six faces du premier dé sont inscrits les nombres suivants : 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 et 5.
Sur les six faces du deuxième dé sont inscrits les nombres suivants : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 et 5.
On donne à chaque élève un corps de fourmi et 6 pattes à fixer sur le corps.
Au début de la partie, chaque élève choisit un nombre compris entre 2 et 10. Ce nombre reste le même durant toute la partie. À tour de rôle, chaque élève joue. Il lance les deux dés :
– si la somme des nombres inscrits sur les faces supérieures des deux dés est égale au nombre choisi par cet élève, alors celui-ci fixe une patte à sa fourmi et relance les dés.
– sinon, c'est au joueur suivant de lancer les dés.
Il donne ensuite les dés au joueur suivant.
La partie se termine lorsqu'un élève a gagné, en fixant les six pattes de sa fourmi.

1) Un élève choisit un nombre et lance les dés.
- **a)** Quelles sont les différentes sommes qu'il peut obtenir ?
- **b)** Montrer que la probabilité qu'il obtienne 8 est égale à $\frac{4}{36}$.

2) Un autre élève choisit le nombre 6 et lance les dés.
- **a)** Quelle est la probabilité qu'il gagne une patte pour sa fourmi dès son premier lancer ?
- **b)** Quelle est la probabilité qu'il gagne deux pattes pour sa fourmi en 2 lancers ?

3) Eden et Axelle commencent une partie. Eden choisit le nombre 6 et Axelle choisit un autre nombre.
- **a)** Qui a le plus de chance de gagner la partie ? Justifier.
- **b)** Eden est-il sûr de gagner la partie ? Justifier.

Vu au CRPE en 2022

Exemple de corrigé.

1) a) On peut, par exemple, recenser toutes les possibilités grâce à un tableau.

dé 2 / dé 1	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**5**
1	2	3	4	5	6	6
1	2	3	4	5	6	6
2	3	4	5	6	7	7
3	4	5	6	7	8	8
4	5	6	7	8	9	9
5	6	7	8	9	10	10

On peut obtenir les sommes 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 et 10.

b) Les dés sont équilibrés, les issues du tableaux sont donc équiprobables.

On a 4 issues dans le tableau égales à 8 sur un total de 36, donc,

la probabilité d'obtenir une somme de 8 est égale à $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

2) a) L'élève peut placer sa patte au premier lancer s'il obtient une somme de 6.

D'après le tableau, on a 8 issues possibles.

La probabilité que l'élève gagne une patte au premier lancer est de $\frac{8}{36} = \frac{2}{9}$.

b) L'élève peut placer deux pattes en deux lancers s'il obtient une somme de 6 au premier lancer (probabilité égale à $\frac{2}{9}$), et une somme de 6 au deuxième lancer (probabilité égale à $\frac{2}{9}$) d'après la question précédente.

On a alors $p = \frac{2}{9} \times \frac{2}{9} = \frac{4}{81}$.

La probabilité que l'élève gagne deux pattes en deux lancers est de $\frac{4}{81}$.

3) a) D'après la question **2.(a)**, Eden a une probabilité de $\frac{8}{36}$ de gagner une patte à chaque lancer.

Axelle, quant à elle, choisit un autre nombre que 6. Soit p_i la probabilité d'obtenir la somme « i » à un lancer, on a les résultats suivants :

$p_2 = \frac{2}{36}$; $p_3 = \frac{3}{36}$; $p_4 = \frac{4}{36}$; $p_5 = \frac{5}{36}$; $p_7 = \frac{5}{36}$; $p_8 = \frac{4}{36}$; $p_9 = \frac{3}{36}$; $p_{10} = \frac{2}{36}$.

Chacune des probabilités p_i est inférieure à p_6 donc, Eden a plus de chance de gagner la partie.

b) Eden a, certes, une probabilité supérieure de gagner, mais cela ne veut pas dire qu'il gagnera de manière certaine.

Pour compléter sa fourmi, il doit obtenir une somme de 8 à 6 lancers, qu'ils soient consécutifs ou non. De la même manière, Axelle doit obtenir la somme choisie à 6 lancers.

Imaginons, par exemple, qu'Axelle choisisse la somme de 2 et qu'elle obtienne cette somme 6 fois de suite dès le premier lancer alors qu'Eden n'a pas obtenu la somme de 8, Axelle gagne. Ce contre-exemple montre qu'Eden n'est pas sûr de gagner la partie.

Maîtriser les bases avec MathenPoche

Classe	N°	Thème	Dans le cours
5e	B2	Statistiques et probabilités	2., 3. et 4.
4e	B2	Statistiques et probabilités	3.
3e	B2	Statistiques et probabilités	2. et 3.

1 CRPE 2021 G2

Pour chacune des affirmations suivantes indiquer, en le justifiant, si elle est vraie ou fausse. Une réponse correcte sans justification ne rapporte aucun point.

1) On lance trois fois une pièce non truquée. On obtient trois fois pile.
   Affirmation 1 : « La probabilité d'obtenir face au quatrième lancer est 0,5. »
2) On dispose de deux urnes. Dans chacune d'entre elles, il y a trois boules rouges et une boule verte ; ces boules sont indiscernables au toucher. On tire une boule dans une urne et une boule dans une autre.
   Affirmation 2 : « La probabilité d'obtenir deux boules vertes est $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ soit $\frac{1}{2}$. »
3) On lance deux dés équilibrés à six faces numérotées de 1 à 6 et on fait la somme des nombres obtenus sur les faces supérieures.
   Affirmation 3 : « La probabilité d'obtenir 3 est égale à celle d'obtenir 2. »

2 CRPE 2017 G1

Au mois de février 2017, on a interrogé 12 527 personnes de plus de 15 ans à la sortie du métro, à propos du nombre de fois où elles sont allées au restaurant pendant le mois de janvier 2017. Chaque personne sondée est enregistrée par un numéro, de 1 à 12 527.

Le tableau ci-dessous présente des résultats, selon la classe d'âge des personnes interrogées.

	De 15 à 25 ans	De 26 à 44 ans	De 45 à 60 ans	Plus de 60 ans	Total
Pas du tout		82	415	147	666
Une fois	682		1243	589	
Deux fois		634	552	138	1737
Trois fois	174	95			1907
Quatre fois ou plus	251	418	923	317	
Total	1542		3517	2445	

1) Reproduire et compléter le tableau ci-dessus.
2) On tire au hasard un des numéros correspondant aux personnes interrogées, en supposant que chacun a la même probabilité d'être choisi.
   a) Déterminer la probabilité que ce numéro corresponde à une personne qui est allée exactement deux fois au restaurant pendant le mois de janvier 2017.
   b) Déterminer la probabilité que ce numéro corresponde à une personne qui a moins de 45 ans.
   c) Déterminer la probabilité que ce numéro corresponde à une personne qui a plus de 60 ans et qui est allée au moins trois fois au restaurant pendant le mois de janvier 2017.

Entraînement

3 **CRPE 2017 G3**

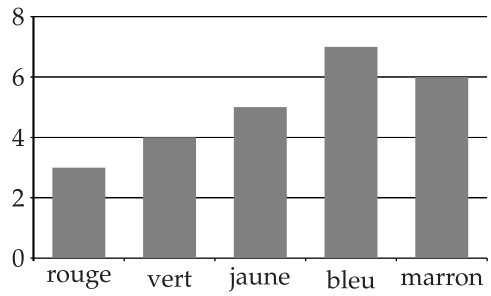
Dans cet exercice, les réponses seront données sous la forme d'une fraction irréductible.
On dispose d'un dé cubique à six faces numérotées de 1 à 6 et d'un dé tétraédrique à quatre faces avec des sommets numérotés de 1 à 4, parfaitement équilibrés. On lance les deux dés et on note le nombre lisible sur la face supérieure du dé à six faces et le nombre lisible sur le sommet supérieur du dé à quatre faces.

1) **a)** Avec quel dé la probabilité d'obtenir un 3 est-elle la plus grande ?
b) Avec quel dé la probabilité d'obtenir un multiple de 3 est-elle la plus grande ?
c) Quelle est la probabilité d'obtenir avec le dé à 4 faces un nombre supérieur ou égal au nombre obtenu avec le dé à 6 faces ?

2) On calcule la somme des nombres obtenus avec chacun des deux dés.
a) Quelle est la probabilité d'obtenir une somme paire ?
b) Quelle est la probabilité d'obtenir une somme strictement supérieure à 3 ?

4 **CRPE 2016 G1**

Une urne contient des boules de couleurs différentes indiscernables au toucher.
Le nombre de boules de chaque couleur dans cette urne est indiqué sur le diagramme ci-dessous :



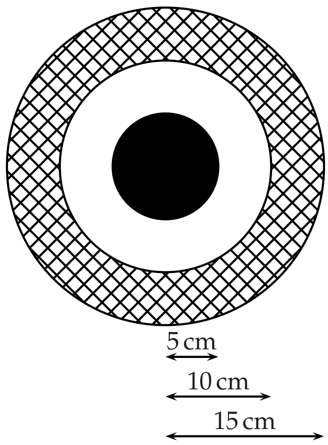
1) On tire au hasard une boule dans l'urne. On regarde sa couleur et on la remet dans l'urne.
Quelle est la probabilité que la boule tirée soit bleue ?

2) On souhaite que la probabilité de tirer une boule bleue soit supérieure ou égale à 0,4.
Combien de boules bleues doit-on ajouter au minimum dans l'urne avant le tirage pour qu'il en soit ainsi ?

3) On considère à nouveau l'urne dont la composition est donnée par le diagramme ci-dessus.
Combien de boules rouges doit-on ajouter au minimum dans l'urne avant le tirage pour que la probabilité d'obtenir une boule bleue à l'issue d'un tirage au hasard d'une boule soit inférieure ou égale à 0,2 ?

5 **CRPE 2014 G2**

Albert observe un entraînement au tir à la carabine sur une cible. La cible est constituée de trois disques concentriques de rayons respectifs 5 cm, 10 cm et 15 cm, comme schématisé ci-contre.
Un débutant touche la cible une fois sur deux. Lorsqu'il atteint la cible, la probabilité qu'il atteigne une zone donnée est proportionnelle à l'aire de cette zone.



1) Un tireur débutant touche la cible. Quelle probabilité a-t-il d'atteindre la couronne extérieure (partie quadrillée) ?

2) Un tireur débutant va appuyer sur la détente. Quelle probabilité a-t-il de toucher la cible et d'atteindre son cœur (partie noire) ?

6 CRPE 2020 G6

Dans une urne, on place les boules suivantes : sur chaque boule sont écrits une lettre et un nombre.

I 14	V 25	E 6	L 8	E 6	S 16	M 10
T 11	H 20	E 6	M 10	A 12	T 11	I 14
U 17	E 6	S 16	V 25	A 12	Q 30	

1) On considère la série statistique composée des nombres écrits sur les boules placées dans l'urne. Calculer l'étendue, la médiane et la moyenne de cette série.
2) On suppose que les boules sont indiscernables au toucher. On tire au hasard une boule dans l'urne.
   a) La probabilité de « tirer un nombre pair » est de $\frac{3}{4}$.
   b) Calculer la probabilité de « tirer une voyelle ou un nombre pair ».
   c) Calculer la probabilité de « tirer une voyelle et un nombre pair ».
3) On tire successivement et sans remise 5 boules. On obtient après les quatre premiers tirages les lettres M, A, T, H. Quelle est la probabilité d'obtenir grâce au cinquième tirage le mot « M A T H S » ?

7 CRPE 2018 G1

Dans une loterie, 300 billets sont vendus et il y a 37 billets gagnants. Les autres billets sont des billets perdants.

Parmi les 37 billets gagnants :

- 2 de ces billets permettent de gagner une télévision ;
- 5 permettent de gagner un bon de réduction de 100 € ;
- 10 permettent de gagner un bon de réduction de 50 € ;
- 20 permettent de gagner un porte-clés.

1) Quelle est la probabilité de gagner une télévision si l'on achète un billet ?
2) Quelle est la probabilité de gagner un bon de réduction (peu importe la somme) si l'on achète un billet ?
3) En plus de l'achat des bons de réduction dans plusieurs magasins, l'organisateur de la loterie dépense 500 € pour chaque télévision et 0,50 € pour chaque porte-clés.
   a) À quel prix doit-il vendre les billets de loterie, pour être sûr que ce jeu ne lui fera pas perdre d'argent ?
   b) S'il souhaite vendre chaque billet 2 €, combien doit-il rajouter de billets perdants (en ne modifiant pas le nombre de billets gagnants et les lots correspondants) pour être assuré que ce jeu ne lui fera pas perdre d'argent ?

Entraînement

8 CRPE 2014c G1

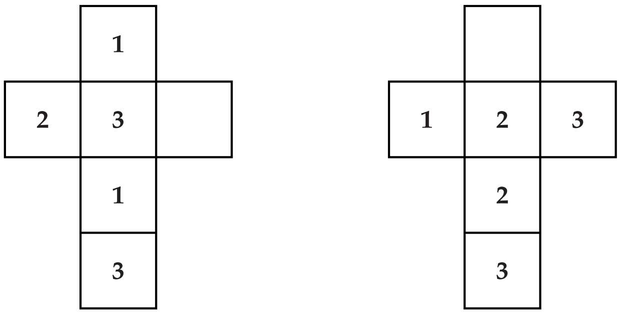
Dans une certaine région du monde, on utilise le modèle ci-dessous pour prévoir le temps, en se limitant aux deux cas possibles « le temps est sec » et « le temps est humide » :

- si le temps est sec un jour alors il sera sec le lendemain avec une probabilité de $\frac{5}{6}$;
- si le temps est humide un jour alors il sera humide le lendemain avec une probabilité de $\frac{2}{3}$.

Aujourd'hui, le temps est sec. Vrai ou faux : la probabilité que le temps soit humide après-demain est de 0,25.

9 CRPE 2022 Sujet 0

Un enseignant de moyenne section de maternelle souhaite créer un jeu sur le modèle du jeu de l'oie pour travailler avec ses élèves la construction du nombre et en particulier des décompositions et recompositions de nombres de 1 à 6. Il fabrique deux dés équilibrés selon les patrons suivants :

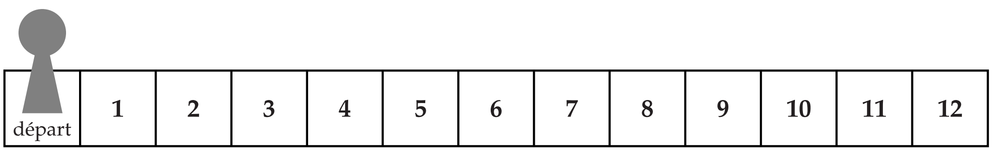


dé vert **dé bleu**

Il crée un parcours sur lequel les élèves déplacent un pion selon le protocole suivant :

- l'élève lance les deux dés ;
- il avance son pion d'autant de cases que la somme des nombres inscrits sur les faces supérieures des deux dés ; s'il n'obtient aucun nombre sur les deux dés (deux faces vierges), il passe son tour.

Le plateau de jeu est matérialisé par une bande numérique comme ci-dessous.



1) On lance le dé vert seul. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 ?

Dans la suite de l'exercice, afin de simplifier les réponses, on pourra considérer que les faces vierges correspondent au nombre 0.

2) Un élève lance les deux dés, il calcule la somme des nombres obtenus.

- **a)** Quelles sommes peuvent être obtenues ?
- **b)** Quelle est la probabilité qu'il doive passer son tour ?
- **c)** Quelle est la probabilité qu'il doive avancer de 3 cases ?
- **d)** Déterminer la probabilité de chacun des résultats possibles.
- **e)** Quelle est la probabilité que le résultat du dé vert soit strictement supérieur à celui du dé bleu ?

3) Après deux tours de jeu, un élève est arrivé sur la case $\boxed{10}$. Quelle est la probabilité qu'il se soit arrêté sur la case $\boxed{4}$ au premier tour ?

10 CRPE 2018 G2

Les informations présentées dans cet exercice sont extraites du site de l'Établissement Français du Sang qui gère le don du sang en France (https://www.dondusang.net/).

Tableau 1 : Répartition de la population française selon le groupe sanguin et le rhésus

	O	A	B	AB
Rhésus +	36 %	37 %	9 %	3 %
Rhésus -	6 %	7 %	1 %	1 %

Quel que soit le groupe ABO du donneur, son sang sera toujours très utile pour un malade.

Tableau 2 : Compatibilité sanguine des donneurs et des receveurs

DONNEURS \ RECEVEURS	O+	O-	A+	A-	B+	B-	AB+	AB-
O+	💧		💧		💧		💧	
O-	💧	💧	💧	💧	💧	💧	💧	💧
A+			💧				💧	
A-			💧	💧			💧	💧
B+					💧		💧	
B-					💧	💧	💧	💧
AB+							💧	
AB-							💧	💧

DONNEUR UNIVERSEL (O-)

RECEVEUR UNIVERSEL (AB+)

Lecture : une personne de groupe A rhésus négatif (A−) peut recevoir du sang d'un donneur du groupe O rhésus négatif ou du groupe A rhésus négatif. Il peut donner son sang à des personnes des groupes et rhésus A+ ; A− ; AB+ et AB−.

1) Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population française soit donneur universel ?

2) Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population française soit receveur universel ?

3) Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population française puisse donner son sang à une personne du groupe B, rhésus + ?

4) On choisit au hasard une personne parmi les personnes du groupe O dans la population française. Quelle est la probabilité que cette personne soit donneur universel ? Arrondir le résultat au centième.

Au 1er janvier 2016, d'après l'INSEE, la population française était de 66 627 602 personnes. Parmi ces personnes, 43 217 325 personnes avaient entre 18 et 70 ans, critère requis pour pouvoir donner son sang.

5) Estimer le nombre de donneurs universels en France au 1er janvier 2016.

6) Quel pourcentage de la population française représentait, au 1er janvier 2016, la population susceptible de donner son sang ?

Entraînement

ORGANISATION ET GESTION DE DONNÉES

8

Statistiques

Un peu d'histoire

La science statistique semble exister dès la naissance des premières structures sociales. D'ailleurs, les premiers textes écrits retrouvés étaient des recensements du bétail, des informations sur son cours et des contrats divers.
On attribue souvent l'introduction du terme « statistique » au professeur **Achenwall**, qui aurait, en 1746, créé le mot Statistik, dérivé de la notion Staatskunde.
En revanche, l'étymologie du mot nous donne la définition suivante : « étude méthodique par des procédés numériques des faits sociaux qui définissent un état. ». Le nom désigne ensuite (1862) l'objet des statistiques : « ensemble de données numériques concernant une même catégorie de faits ».
Aujourd'hui, les plus gros consommateurs de statistiques sont les assureurs (risques d'accidents, de maladie des assurés), les médecins (épidémiologie), les démographes (populations et leur dynamique), les économistes (emploi, conjoncture économique), les météorologues...

Cours

1. Définitions et vocabulaire des statistiques

Vocabulaire : la **population** est l'ensemble des individus sur lesquels porte l'étude statistique. Par exemple : une classe de CE2, les hommes, les habitants d'Occitanie...
Le **caractère** ou **variable** d'une série statistique est une propriété étudiée sur chaque individu :

- lorsque le caractère ne prend que des valeurs ou **modalités** numériques, il est **quantitatif** :
  - **discret** s'il ne peut prendre que des valeurs isolées (notes, âge...) ;
  - **continu** dans le cas contraire (poids, taille...). Dans ce cas on effectue un regroupement des valeurs par **classes** ;
- sinon, on dit qu'il est **qualitatif** (couleur des yeux, sport pratiqué...) : les modalités ne sont pas des nombres.

À chaque valeur (classe) est associée un **effectif** n : c'est le nombre d'individus associés à cette valeur.
Faire des **statistiques**, c'est recueillir, organiser, synthétiser, représenter et exploiter des données dans un but de comparer, de prévoir, de constater...

DÉFINITION : Fréquence

On considère une série statistique à caractère quantitatif, dont les p valeurs sont données par : $x_1, x_2, \ldots, x_p$ d'effectifs associés $n_1, n_2, \ldots, n_p$ avec $n_1 + n_2 + ... + n_p = N$.
Pour chaque valeur on peut calculer une **fréquence** f_i grâce à la formule $\dfrac{n_i}{N}$.

L'ensemble des fréquences de toutes les valeurs du caractère s'appelle la distribution des fréquences.

Exemple Voici les notes sur 20 obtenues à une évaluation dans une classe de 30 élèves :
Série A - 2 – 3 – 3 – 4 – 5 – 6 – 6 – 7 – 7 – 7 – 8 – 8 – 8 – 8 – 8 – 9 – 9 – 9 – 9 – 9 – 9 – 10 – 10 – 11 – 11 – 11 – 13 – 13 – 15 – 16.
On obtient le tableau suivant avec des fréquences en pourcentages :

Notes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Eff.	0	1	2	1	1	2	3	5	6	2	3	0	2	0	1	1	0	0	0
Fréq.	0	3	7	3	3	7	10	17	20	7	10	0	7	0	3	3	0	0	0

Remarque : une fréquence est un nombres compris entre 0 et 1, ou entre 0 % et 100 % lorsqu'il est exprimé en pourcentage.
On peut vérifier que la somme des fréquences est égale à 1 ou à 100 %.

On peut également faire un regroupement par classes, ce qui rend l'étude moins précise, mais ce qui permet d'avoir une vision plus globale.

Exemple Pour la **série A**, on peut regrouper les données par classes d'amplitude 5 points :

Notes	[0 ; 5 [	[5 ; 10 [	[10 ; 15 [	[15 ; 20 [
Effectif	4	17	7	2
Fréquence	0,13	0,57	0,23	0,07

2. Indicateurs de position

A. Moyenne arithmétique

DÉFINITION : Moyenne

Soit la série statistique à caractère quantitatif dont les p valeurs sont données par $x_1, x_2, \ldots, x_p$ d'effectifs $n_1, n_2, \ldots, n_p$ avec $n_1 + n_2 + ... + n_p = N$.
La **moyenne arithmétique pondérée** de cette série est le nombre :

$$\overline{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + ... + n_p x_p}{n_1 + n_2 + ... + n_p} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{p} n_i x_i.$$

Par la suite, on utilisera le terme **moyenne** pour désigner la moyenne arithmétique.

Remarque :

- Dans le cas où tous les n_i valent 1, la moyenne de la série statistique est le quotient de la somme de toutes les valeurs par l'effectif total : $\overline{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$.
- Lorsque la série est regroupée en classes, on calcule la moyenne en prenant pour valeur x_i le centre de chaque classe obtenu en faisant la moyenne des deux extrémités de la classe.

Exemple Pour la **série A**, on obtient :

- une moyenne $\overline{m} = \dfrac{1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + 1 \times 16}{30} = \dfrac{254}{30} \approx 8,47$;
- si on regroupe par classes d'amplitude 5 points, une estimation de la moyenne est :
$\overline{m} = \dfrac{4 \times 2,5 + 17 \times 7,5 + 7 \times 12,5 + 2 \times 17,5}{30} = \dfrac{260}{30} \approx 8,67$.

La calculatrice permet de déterminer les éléments statistiques en allant dans le mode statistiques.

PROPRIÉTÉ : Somme et multiplication

- Si on ajoute (respectivement soustrait) un même nombre k à toutes les valeurs d'une série, alors la moyenne de cette série se trouve augmentée (respectivement diminuée) de k.
- Si on multiplie (respectivement divise) par un même nombre (non nul pour la division) k toutes les valeurs d'une série, alors la moyenne de cette série se trouve multipliée (respectivement divisée) par k.

Exemple On considère la **série A** :

- si on ajoute $1,5$ points à chaque note de l'évaluation, la moyenne de classe devient :
$\overline{m} = 8,47 + 1,5 = 9,97$.
- si on augmente chaque note de 10 %, cela revient à multiplier chaque note par $1,1$:
$\overline{m} = 8,47 \times 1,1 = 9,32$.

B. Médiane

DÉFINITION : Médiane

On considère la série statistique ordonnée dont les n valeurs sont $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$.
La **médiane** est un nombre M qui permet de diviser cette série en deux sous-groupes de même effectif.

- Si n est **impair**, M est la valeur de cette série dont le rang est $\dfrac{n+1}{2}$, notée $x_{\frac{n+1}{2}}$.
- Si n est **pair**, M appartient à l'intervalle fermé formé par les deux nombres situés « au milieu » de la série, à savoir $x_{\frac{n}{2}}$ et $x_{\frac{n}{2}+1}$.

Exemple

- La médiane de la série « 2 – 5 – 6 – 8 – 9 – 9 – 10 » est 8.
- La médiane de la série « 2 – 5 – 6 – 8 – 9 – 9 » est n'importe quel nombre situé entre 6 et 8 inclus. On chosit souvent le centre de l'intervalle, à savoir 7, mais il est tout à fait possible de choisir 6 ou 6,5...

REMARQUE : lorsque l'on a une grande série statistique et que l'on souhaite déterminer la médiane, on peut faire le tableau des effectifs cumulés croissants (ECC).

Exemple Pour la **série A**, d'effectif 30, la médiane est un nombre situé entre la 15ième et la 16ième valeur qui sont 8 et 9, on peut prendre par exemple $M = 8,5$.

Notes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Eff.	0	1	2	1	1	2	3	5	6	2	3	0	2	0	1	1	0	0	0
ECC	0	1	3	4	5	7	10	15	21	23	26	26	28	28	29	30	30	30	30

la 15e valeur est 8

la 16e valeur est 9

3. Indicateur de dispersion

DÉFINITION : Étendue

On appelle **étendue** d'une série discrète le réel égal à la différence entre la plus grande valeur et la plus petite valeur de la série.

Son principal mérite est d'exister, et de fournir une information sur la dispersion.

Exemple L'étendue de la **série A** est de $E = 16 - 2 = 14$.

Groupement 3 - Exercice 2 - Question 1 : statistiques

Célia s'entraîne à courir tous les jours de la semaine sur le même parcours.
Elle aimerait comparer ses résultats d'entraînement sur une semaine à ceux de sa sœur qui s'entraîne également sur le même parcours.

Résultats obtenus par Célia cette semaine :	Résultats obtenus par sa sœur cette semaine :
Lundi : 33 min et 12 secondes	Moyenne : 31 min et 13 secondes
Mardi : 32 min et 4 secondes	Médiane : 30 min
Mercredi : 40 min et 25 secondes	Étendue : 3 min
Jeudi : 27 min et 11 secondes	
Vendredi : 30 min	
Samedi : 26 min et 38 secondes	
Dimanche : 29 min et 1 seconde	

1) Comparer les durées moyennes de course.
2) Comparer les durées médianes de course.
3) Avec les informations ci-dessus, Célia affirme « Je suis la seule de nous deux à avoir réussi à effectuer ce parcours en moins de 28 minutes cette semaine ». Cette affirmation est-elle vraie ?
4) Avec les informations ci-dessus, sa sœur lui répond « Moi, j'ai été la plus régulière de nous deux sur la semaine ». Expliquer ce commentaire.

Exemple de corrigé.

1) Pour Célia, on additionne tous les résultats, puis on divise par 7.
On peut commencer par additionner les minutes : $33 + 32 + 40 + 27 + 30 + 26 + 29 = 217$;
puis, on fait de même avec les secondes : $12 + 4 + 25 + 11 + 38 + 1 = 91$.
Au total, cela fait 217×60 s $+ 91$ s $= 13\,111$ s.
$\overline{m}_{\text{Célia}} = \dfrac{13\,111 \text{ s}}{7} = 1\,873 \text{ s} = 31 \times 60 \text{ s} + 13 \text{ s} = 31 \text{ min et } 13 \text{ s}.$
Célia et sa soeur ont eu la même durée moyenne de course cette semaine.

2) Pour déterminer la durée médiane de Célia, il suffit de classer les durées dans l'ordre croissant (par exemple), puis de prendre la valeur centrale, c'est-à-dire la 4^{e}.
On obtient 30 min.
Célia et sa soeur ont eu la même durée médiane de course cette semaine.

3) La moyenne de la sœur est de 31 min 13 s. L'étendue étant de 3 min, la valeur minimal est nécessairement supérieure à 28 min 13 s.
Célia a raison, c'est la seule à avoir fait le parcours en moins de 28 minutes.

4) L'étendue des résultats de Célia est égale à 40 min 25 s − 26 min 38 s = 13 min 47 s, alors que celle de sa sœur est de 3 min.
C'est certainement pour cette raison que la sœur de Célia dit avoir été plus régulière.

Entraînement

Maîtriser les bases avec MathenPoche

Classe	N°	Thème	Dans le cours
6e	02	Tableaux, diagrammes, graphiques	
5e	B2	Statistiques et probabilités	1. et 2
4e	B2	Statistiques et proportionnalité	1., 2. et 3.
3e	B2	Statistiques et probabilités	2. et 3.

1 CRPE 2017 G2

On considère une série statistique de moyenne égale à 5. On complète la série en ajoutant 5 comme valeur supplémentaire. **Affirmation :** la moyenne de la série ne change pas.

2 CRPE 2015 G2

Une petite entreprise emploie 7 personnes, dont 3 femmes.
Voici quelques informations sur le salaire mensuel des personnels :

- Salaires des hommes : 1 250 € ; 1 400 € ; 1 600 € ; 3 200 €.
- Salaires des femmes : salaire médian : 1 875 € ; salaire moyen : 1 700 € ; étendue des salaires : 1 000 €.

Le patron de l'entreprise veut embaucher une femme supplémentaire pour respecter la parité.
Calculer le salaire qu'il doit verser à cette nouvelle recrue pour que les salaires moyens des hommes et des femmes soient égaux.

3 CRPE 2021 G1

L'entreprise AMP'OUL emploie treize personnes : 8 pour la chaîne de fabrication, 3 pour l'emballage et l'organisation des livraisons (dont les salaires sont identiques), 2 pour la comptabilité et la gestion (dont les salaires sont identiques). Les salaires nets suivants, en euros, ont été reçus par les salariés en février 2020 :

Chaîne de fabrication			
1 938,36	1 488,11	1 994,38	2 048,37
2 192,48	1 998,93	1 539,45	1 948,37
Emballage et organisation des livraisons	1 864,37	Comptabilité et gestion	1 593,38

1) Quelle est l'étendue de cette série ?
2) Déterminer le salaire médian de cette entreprise.
3) Calculer le salaire moyen dans cette entreprise.
4) Le coût global d'un salarié en février 2020 est donné par la formule suivante pour cette entreprise :

$$\boxed{\text{Coût global d'un salarié} = \frac{\text{salaire net}}{0,78} \times 1,45}$$

Quel est le coût global en euros, pour un salarié de l'emballage et de l'organisation des livraisons ?

5) On souhaite augmenter de 3 % le salaire net de l'employé gagnant 1 488,11 €.
   a) Quel est le salaire net de cet employé après augmentation ?
   b) Calculer le coût global de ce salaire après augmentation.
   c) De quel pourcentage le coût global a-t-il augmenté ?

4 D'après CRPE blanc 2017

Le tableau ci-dessous donne la répartition des 800 chefs d'exploitations agricoles d'une région selon leur âge.

Tranche d'âge	[15 ; 25 [	[25 ; 35 [	[35 ; 45 [	[45 ; 55 [	[55 ; 65 [	total
Effectif	11	84	148	260	297	800

1) Expliquer pourquoi l'âge médian des chefs d'exploitation agricole est nécessairement entre 45 et 55 ans.

2) Déterminer l'âge médian, la répartition des âges dans la classe [45 ; 55 [étant donnée par le tableau suivant :

âge	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
effectif	18	21	24	31	30	31	30	27	28	20

5 CRPE 2020 G4

Un professeur a donné un contrôle commun à trois de ses classes. Avant de rendre les copies à ses élèves, il a fait quelques calculs statistiques à partir de leurs notes.

1) Pour la classe A qui compte 24 élèves, il a relevé les informations suivantes :

Note minimale	Médiane	Moyenne	Étendue
5	11	12	14

Dire si chacune des affirmations ci-dessous est vraie ou fausse, en justifiant les réponses.

a) « La note maximale est 20. »

b) « Si on enlève une copie avec la note maximale et une copie avec la note minimale, la moyenne des notes restantes augmente. »

c) « Au moins la moitié des élèves ont une note de 12 ou plus. »

2) La classe B compte 16 filles et 11 garçons. À ce contrôle, la moyenne des filles est de 11,7 et celle des garçons de 10,3. Quelle est la moyenne des notes des élèves de la classe B à ce contrôle ? Arrondir le résultat au dixième.

3) La classe C compte 32 élèves. Le professeur a calculé la moyenne des notes des élèves des deux classes A et C. Cette moyenne est de 11,2. Quelle est la moyenne des notes des élèves de la classe C à ce contrôle ?

6 CRPE 2005 Grenoble

Voici la liste partielle des notes sur 20 obtenues par Luc et Julie aux six devoirs de mathématiques du premier trimestre :

Devoirs	1	2	3	4	5	6	Moy.
Notes de Luc	12	5	18	11	19		
Notes de Julie	20	15	4	9	x	y	12,5

1) a) Calculer la moyenne de Luc, si la note obtenue au sixième devoir est égale à la moyenne des cinq premiers.

b) Une meilleure note au devoir 6 aurait-elle permis à Luc d'obtenir une moyenne de 15 ?

2) La note y obtenue par Julie au devoir 6 a augmenté de 25 % par rapport à la note x qu'elle a obtenue au devoir 5.

a) Exprimer y en fonction de x.

b) Calculer x et y.

Entraînement

7 **CRPE 2017 G2**

Ce tableau présente la hauteur, en millimètre, des précipitations journalières au cours du mois d'avril 2016, sur l'aéroport Roland Garros de l'île de La Réunion.

Hauteur des précipitations (mm)	0	0,3	1,3	1,7	2,5	7	13	21	28	42
Nombre de jours	4	6	4	4	3	3	2	1	2	1

1) Calculer la valeur moyenne des précipitations journalières au cours du mois d'avril 2016, arrondie au dixième de millimètre.

2) Déterminer la valeur médiane de ces précipitations journalières. Interpréter ce résultat par une phrase.

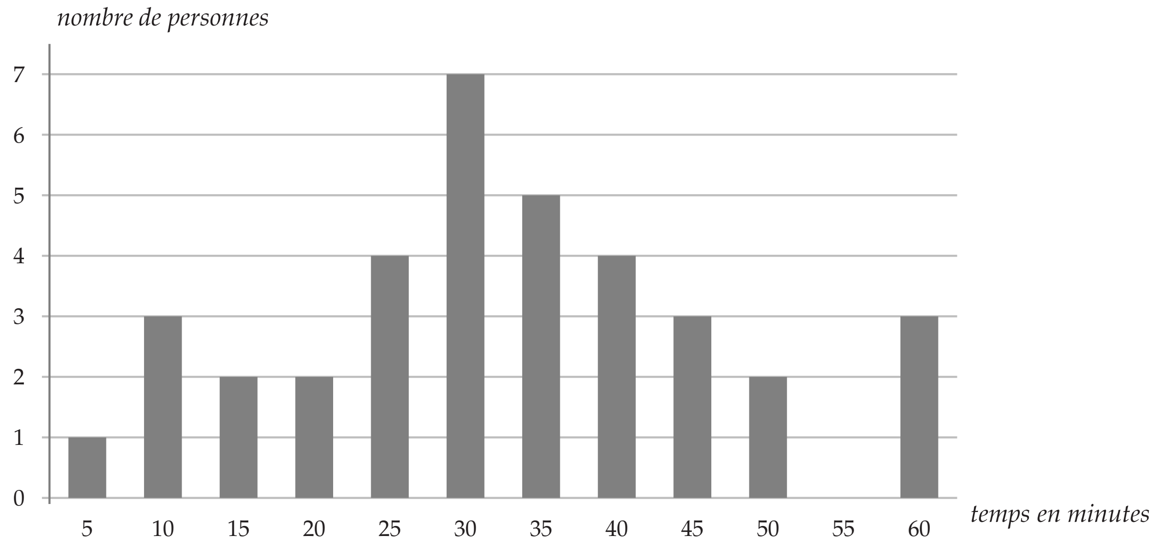
3) Quelle est l'étendue de cette série ?

4) Déterminer le nombre de jours où la hauteur des précipitations est supérieure ou égale à 13 mm, puis exprimer ce nombre en pourcentage par rapport au nombre de jours dans le mois.

5) Sachant qu'une des pistes de décollage de l'aéroport Roland Garros est rectangulaire et mesure 3 200 m de long et 50 m de large, calculer, en mètre cube, puis en litre, le volume de pluie tombé sur cette piste au cours du mois d'avril 2016.

8 **Quelle chance !**

Le digramme en bâtons ci-dessous représente le temps de trajet journalier en minutes de 36 personnes travaillant dans l'entreprise kadubol.



On donnera les résultats numériques à 10^{-1} près sauf indication contraire.

1) a) Construire le tableau d'effectifs et de fréquences récapitulant toutes ces valeurs.

b) Calculer l'étendue de cette série.

c) Déterminer la moyenne et la médiane.

2) a) Construire un deuxième tableau en regroupant les effectifs par classes d'amplitude 15 minutes.

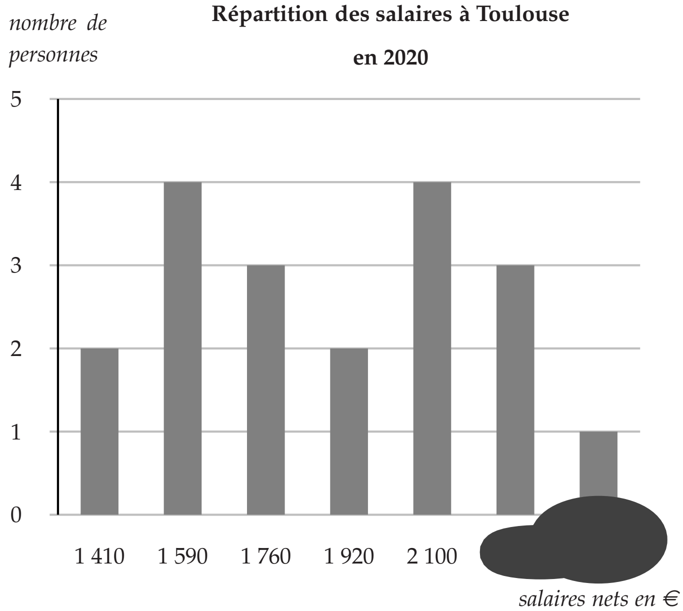
b) Calculer à nouveau la moyenne en utilisant la répartition par classes. Le résultat obtenu est-il le même que lors du calcul précédent ? Pourquoi ? Est-il plus fiable ?

9 **CRPE 2021 G2**

La cheffe d'une entreprise a commandé à son gestionnaire une étude sur les salaires de ses employés pour l'année 2020.
L'entreprise est installée sur deux sites :

- le site de Toulouse où travaillent 19 employés ;
- le site de Montauban où travaillent 12 employés.

La répartition des salaires nets des employés du site de Toulouse est représentée par le diagramme en barres ci-dessous, les salaires étant rangés dans l'ordre croissant.
Une tasse de café est renversée sur le document réalisé par le gestionnaire et une tache vient masquer certaines informations concernant le site de Toulouse.



Informations sur les salaires à Montauban en 2020 :

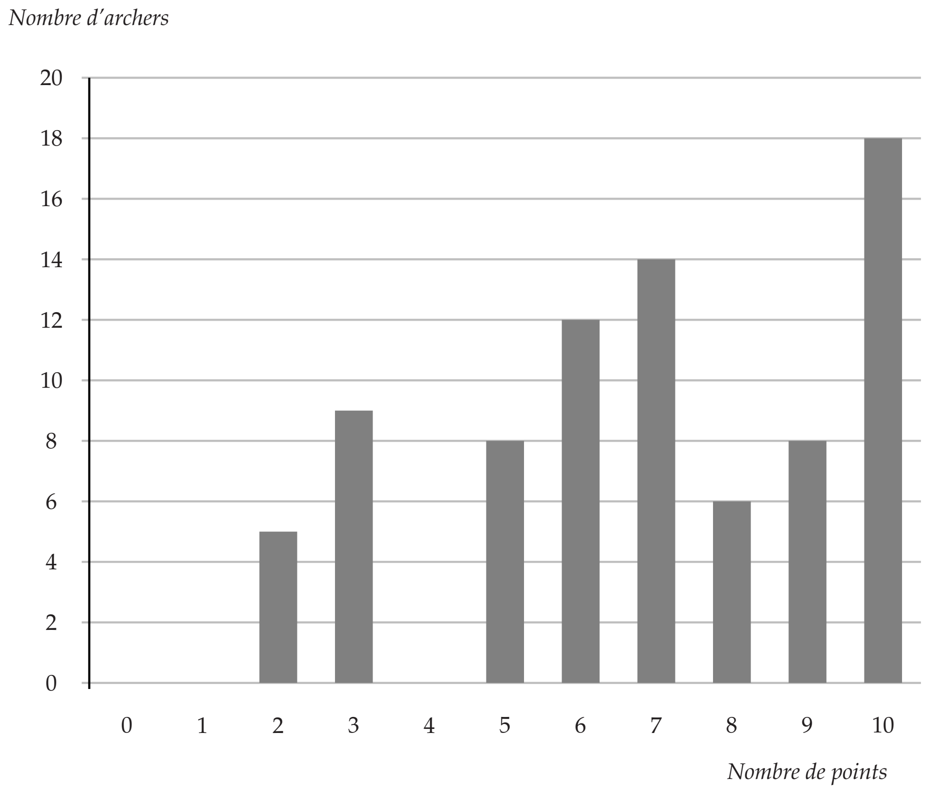
Salaire moyen : 1 520 €
12 employés
Salaire maximum : 2 300 €
Salaire minimum : 1 410 €

1) La cheffe d'entreprise affirme que plus de 40 % des personnes travaillant à Toulouse gagnent plus de 2 000 €. Est-ce vrai ? Justifier la réponse.
2) Sur le site de Toulouse, l'étendue des salaires est égale à 1 890 € et le salaire moyen est de 1 935 €.
   a) Déterminer la valeur du plus haut salaire de Toulouse.
   b) Déterminer la valeur des salaires correspondant à l'avant-dernière barre du graphique présentant la répartition des salaires à Toulouse en 2020.
3) Déterminer le salaire médian des employés de Toulouse.
4) Calculer le salaire moyen en 2020 de l'ensemble du personnel de cette entreprise. Arrondir à l'unité.
5) En 2021, la cheffe d'entreprise souhaiterait octroyer une augmentation de 10 % à tous les employés travaillant à Montauban.
   a) Quel sera alors le montant du salaire minimum à Montauban en 2021 ?
   b) De quel pourcentage aurait-il fallu augmenter les salaires de Montauban pour que le salaire moyen soit le même sur les deux sites ? Justifier. On donnera le résultat arrondi au dixième d'unité de pourcentage.

Entraînement

10 **CRPE 2016 G2**

Quatre-vingts archers d'un club de tir à l'arc A ont participé à un championnat. Le nombre de points obtenus par chaque archer du club est donné par le diagramme ci-dessous.



1) Répondre à l'aide du diagramme précédent aux questions suivantes.

a) Combien d'archers ont gagné exactement six points lors de ce championnat ?

b) Combien d'archers ont gagné trois points ou plus lors de ce championnat ?

c) Quel est le score médian des archers du club A ?

2) Le club de tir à l'arc voisin B a aussi participé à ce championnat. Voici quelques données relatives aux résultats des archers de ce club :

- Le score moyen des archers lors du championnat est 7 points.
- Le score moyen des dix meilleurs archers lors du championnat est 9,9 points.

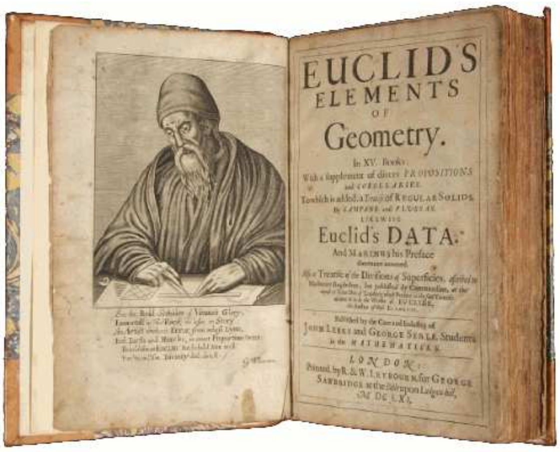
a) Comparer les résultats des deux clubs selon leurs scores moyens.

b) Comparer les résultats des deux clubs selon les scores de leurs dix meilleurs archers.

GÉOMÉTRIE

9

Géométrie plane



Euclid's elements of Geometry, 1661, John Leeke, Georges Searle

Un peu d'histoire

L'objet de la géométrie (du grec *géo* : terre ; *metria* : mesure) concerne la connaissance des relations spatiales. Avec l'arithmétique, elle constitue, dans l'antiquité, l'un des deux domaines des mathématiques les plus recherchés. Si les grecs peuvent être considérés comme les fondateurs de la géométrie en tant que science et discipline mathématique, de nombreuses connaissances en géométrie, nécessaires à la topographie, l'architecture, l'astronomie et l'agriculture, ont précédé la civilisation grecque. Les premières notions de géométrie reconnues remontent à 3 000 ans av. J.-C., du temps de l'Égypte ancienne, de l'ancienne civilisation hindoue et des babyloniens.

Pour les mathématiciens de la Grèce antique, la géométrie est au cœur des sciences. La tradition attribue à **Thalès** l'introduction en Grèce de la géométrie égyptienne. Par rapport à leurs prédécesseurs, les Grecs étudient de nouvelles figures, dont des courbes, surfaces et solides. Mais surtout, ils innovent au niveau de la méthode, en généralisant des lois à partir des nombreuses règles empiriques connues depuis longtemps. La géométrie grecque est marquée par deux écoles : celle de **Pythagore** à l'école de Crotone, et celle d'**Euclide** à l'école d'Alexandrie. Les travaux de cette dernière, qui connut trois représentant exceptionnels que sont Euclide, **Archimède** et **Appolonius** débouchent sur une œuvre qui pendant plus de 20 siècles servit de base à toute étude géométrique : *les éléments*. La géométrie classique, issue de celle d'Euclide, est basée sur des constructions obtenues à l'aide de droites et de cercles, c'est à dire élaborées « à la règle et au compas ».

Cours

Dans ses livres, *Les éléments*, Euclide définit les objets géométriques au 3ième siècle av. J.-C. Le livre 1 comprend 35 définitions fondamentales de la géométrie euclidienne, comme par exemple :

Les définitions d'Euclide

- *Le* **point** *est ce dont la partie est nulle ;*
- *une* **ligne** *est une longueur sans largeur ;*
- *la* **ligne droite** *est celle qui est également placée entre ses points ;*
- *un* **angle** *plan est l'inclinaison mutuelle de deux lignes qui se touchent dans un plan, et qui ne sont pas placées dans la même direction ;*
- *un* **cercle** *est une figure plane comprise par une seule ligne qu'on nomme circonférence, toutes les droites menées à la circonférence d'un des points placé dans cette figure étant égales entre elles.*

Attardons nous sur le vocabulaire « moderne » de ces objets géométriques ainsi qu'aux constructions géométriques dans le plan euclidien.

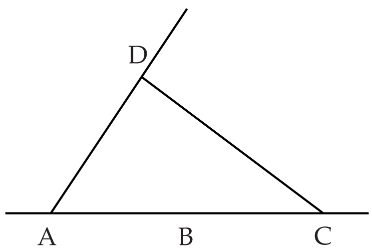
1. Les droites

A. Définition

DÉFINITION : Droite - segment

Une **droite** est une ligne rectiligne, infinie et sans épaisseur. Une **demi-droite** est une portion de droite limitée d'un seul côté par un point appelé origine.
Un **segment** est une portion de droite limitée par deux points appelés extrémités.

Exemple



- (AC), (AB) et (BC) sont des droites ;
- [AD) est la demi-droite d'origine A ;
- [CD] est un segment ;
- $B \in (AC)$ mais $B \notin (DC)$.

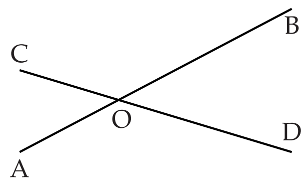
NOTATION : le symbole $\in$ signifie « appartient à » et $\notin$ signifie « n'appartient pas à ».

B. Position relative de deux droites

DÉFINITION : Droites sécantes

Lorsque deux droites ont un point en commun, on dit qu'elles sont **sécantes**.

Exemple

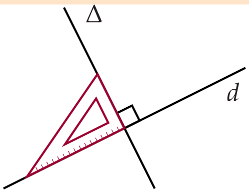


Les droites (AB) et (CD) sont sécantes en O.

DÉFINITION : Droites perpendiculaires

Lorsque deux droites forment un angle droit, on dit qu'elles sont **perpendiculaires**.

Exemple

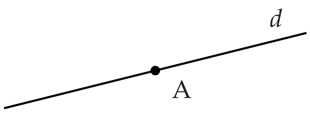


Les deux droites d et Δ sont perpendiculaires.
On peut le constater grâce à une équerre.

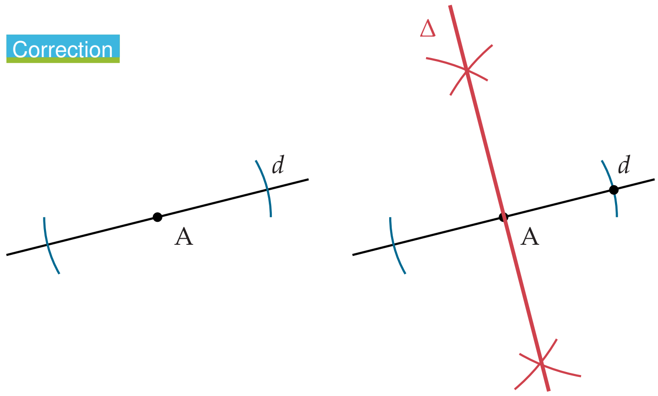
MÉTHODE 1 Construction d'une perpendiculaire avec un compas

Pour tracer la droite Δ perpendiculaire à la droite d en A, on effectue deux arcs de cercle sur la droite d en plaçant la pointe du compas en A. Ces arcs définissent deux points sur d. À partir de ces points, on effectue deux fois deux arcs de cercle de part et d'autre de d en gardant le même écartement, puis on trace la droite Δ passant par les deux intersections formées par les arcs de cercle.

Exercice d'application



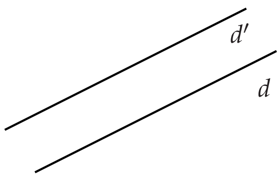
Correction



DÉFINITION : Droites parallèles

Lorsque deux droites ne se coupent pas, on dit qu'elles sont **parallèles**.

Exemple

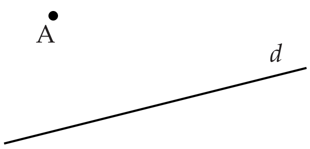


Les deux droites d et d' sont parallèles.

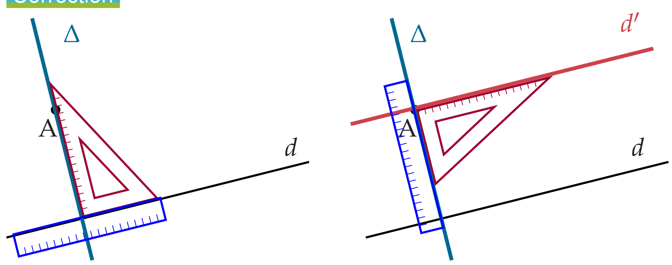
MÉTHODE 2 Construction d'une parallèle à la règle et à l'équerre

Pour tracer la parallèle d' à d passant par A, on trace la perpendiculaire Δ à d passant par A, puis on trace la perpendiculaire d' à Δ passant par A.

Exercice d'application



Correction



C. Médiatrice

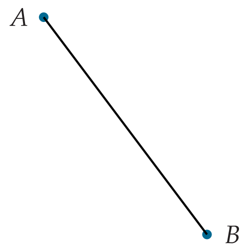
DÉFINITION : Médiatrice d'un segment

La **médiatrice** d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment et qui passe par son milieu.

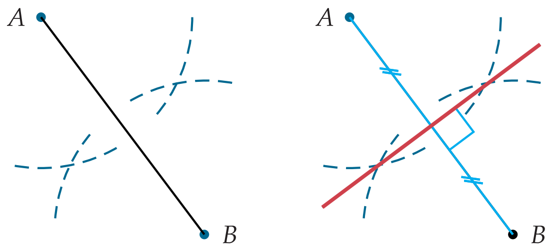
MÉTHODE 3 Construction de la médiatrice d'un segment à la règle et au compas

Pour tracer la médiatrice du segment [AB], on choisit un écartement au compas et on trace deux arcs de cercle à partir de A et de B de part et d'autre du segment [AB]. On trace la droite passant par les deux points formés par l'intersection des arcs de cercle.

Exercice d'application



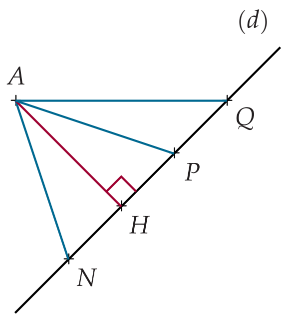
Correction



D. Hauteur

DÉFINITION : Distance d'un point à une droite

La distance d'un point A à la droite (d) est la plus courte distance séparant le point A d'un point de (d).

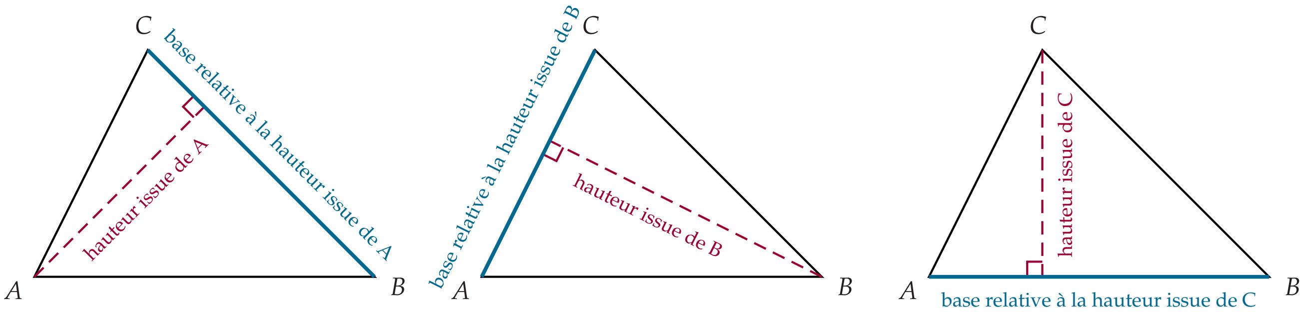


PROPRIÉTÉ

La distance d'un point A à la droite (d) est égale à la longueur du segment $[AH]$ où H est le pied de la perpendiculaire à (d) passant par A.

DÉFINITION : Hauteurs d'un triangle

Les **hauteurs** d'un triangle sont les hauteurs relatives aux sommets du triangle, c'est-à-dire les trois droites perpendiculaires aux côtés qui passent par le sommet opposé.



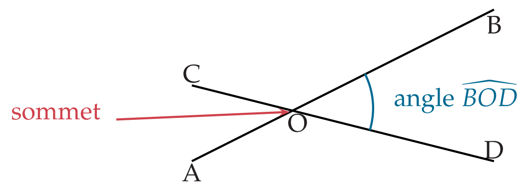
Pour tracer la hauteur dans un triangle issue d'un sommet, on trace la droite passant par ce sommet et perpendiculaire au côté opposé.

2. Les angles

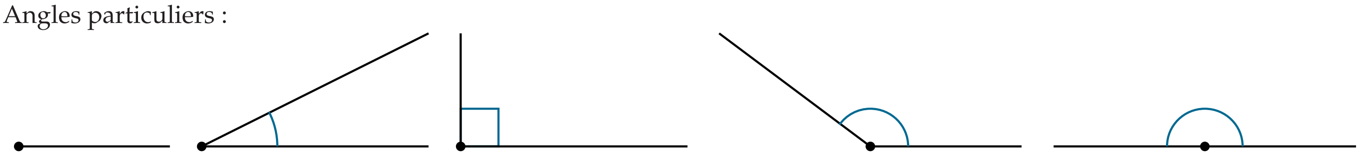
A. Mesurer un angle

DÉFINITION : Angle

Un **angle** est une portion du plan délimitée par deux droites.



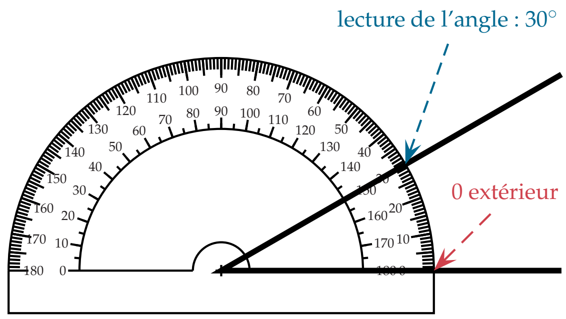
Angles particuliers :



angle nul — angle aigu — angle droit — angle obtus — angle plat

DÉFINITION : Rapporteur - degré

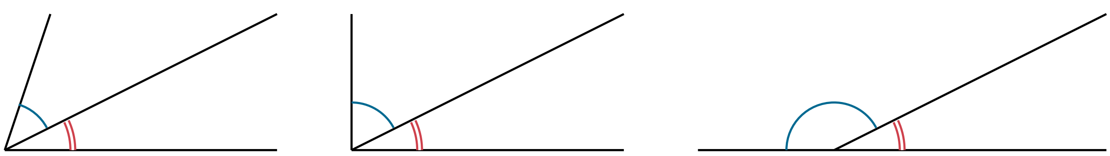
Un **rapporteur** est un instrument de mesure permettant de mesurer des angles.
L'unité de mesure utilisée au collège est le **degré**.



B. Angles particuliers

DÉFINITION : Angles adjacents, complémentaires et supplémentaires

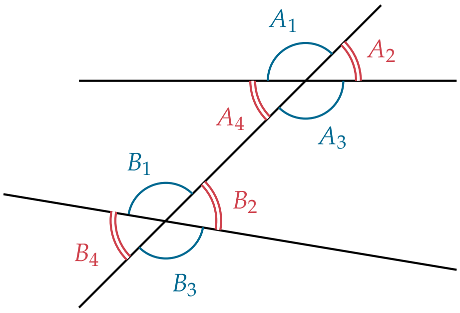
- Deux angles sont **adjacents** s'ils ont même sommet, un côté commun et s'ils sont situés de part et d'autre de ce côté commun.
- Deux angles sont **complémentaires** si la somme de leurs mesures est de 90°.
- Deux angles sont **supplémentaires** si la somme de leurs mesures est de 180°.



angles adjacents — angles complémentaires — angles supplémentaires

Cours

On considère la configuration suivante :



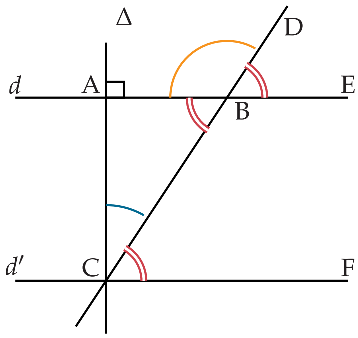
DÉFINITION : Angles opposés, correspondants, alternes-internes et externes

- Les angles A_2 et A_4, A_1 et A_3, B_2 et B_4, B_1 et B_3 sont des angles **opposés par le sommet**.
- Les angles A_1 et B_1 ; A_2 et B_2 ; A_3 et B_3 ; A_4 et B_4 sont des angles **correspondants**.
- Les angles A_4 et B_2 ; A_3 et B_1 sont des angles **alternes-internes**.
- Les angles A_1 et B_3 ; A_2 et B_4 sont des angles **alternes-externes**.

Exemple

On considère la figure ci-contre pour laquelle les droites d et d' sont parallèles et la droite Δ est perpendiculaire à d.

- les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{DBE}$ sont opposés par le sommet ;
- les angles $\widehat{BCF}$ et $\widehat{DBE}$ sont des angles correspondants ;
- les angles $\widehat{BCA}$ et $\widehat{BCF}$ sont complémentaires ;
- les angles $\widehat{DBA}$ et $\widehat{DBE}$ sont supplémentaires.

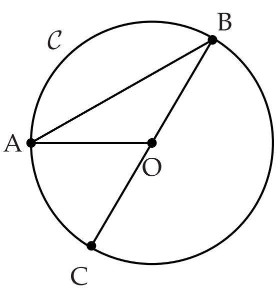


3. Les cercles

DÉFINITION : Cercle, rayon, corde, arc

- Soit O, un point. Le **cercle** $\mathcal{C}$ de centre O et de **rayon** r est l'ensemble des points situés à une distance r du point O.
- Dans un cercle, une **corde** est un segment reliant deux points du cercle.
- Lorsqu'une corde passe par le centre du cercle, on l'appelle un **diamètre** du cercle.
- Une partie du cercle comprise entre deux points est appelé **arc** de cercle.

Exemple



- [BC] est un diamètre du cercle $\mathcal{C}$.
- OA est un rayon du cercle $\mathcal{C}$.
- $\overset{\frown}{AC}$ est un arc de cercle de $\mathcal{C}$.
- [AB] est une corde du cercle $\mathcal{C}$.

4. Les polygones

A. Definitions

DÉFINITION : Polygone

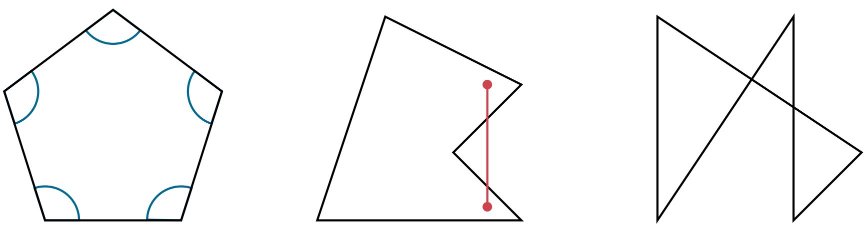
Un **polygone** (du grec *polus*, nombreux, et *gônia*, angle) est une figure géométrique plane formée d'une ligne brisée fermée.

Les polygones reçoivent des noms différents suivant leur nombre de faces. Le tableau suivant donne le nom des huit premiers polygones.

n	3	4	5	6	7	8	9	10
nom	triangle	quadrilatère	pentagone	hexagone	heptagone	octogone	ennéagone	décagone

DÉFINITION : Polygone régulier, convexe, croisé

- Un polygone **régulier** est un polygone ayant tous ses côtés de même longueur et tous ses angles de même mesure.
- Un polygone est **convexe** si tout segment joignant deux points situés à l'intérieur du polygone est inclus dans le polygone.
- Un polygone est **croisé** si au moins deux segments non consécutifs sont sécants.

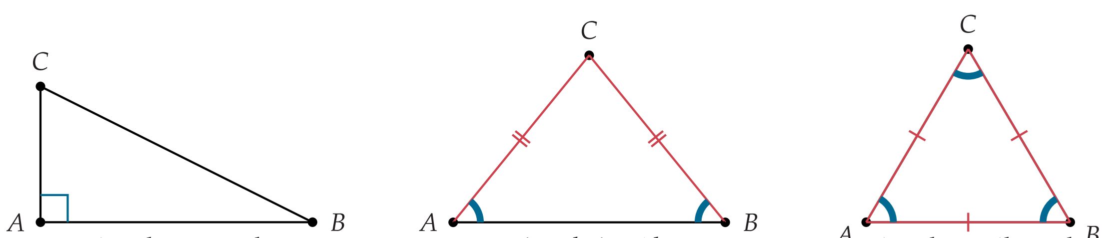


Pentagone régulier   Pentagone non convexe   Pentagone croisé

B. Le cas particulier des triangles

DÉFINITION : Triangle rectangle, isocèle, équilatéral

- Un **triangle rectangle** est un triangle ayant un angle droit.
- Un **triangle isocèle** est un triangle ayant deux côtés de même longueur.
- Un triangle **équilatéral** est un triangle dont tous les côtés sont de même longueur.

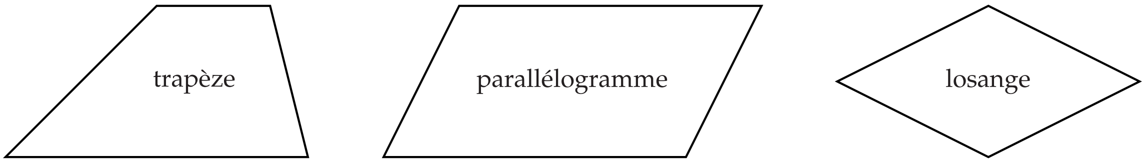


triangle rectangle   triangle isocèle   triangle équilatéral

C. Le cas particulier des quadrilatères

DÉFINITION : Trapèze, parallélogramme, losange

- Un **trapèze** est un quadrilatère ayant deux côtés opposés parallèles.
- Un **parallélogramme** est un quadrilatère ayant ses côtés deux à deux parallèles.
- Un **losange** est un quadrilatère ayant ses quatre côtés de même longueur.

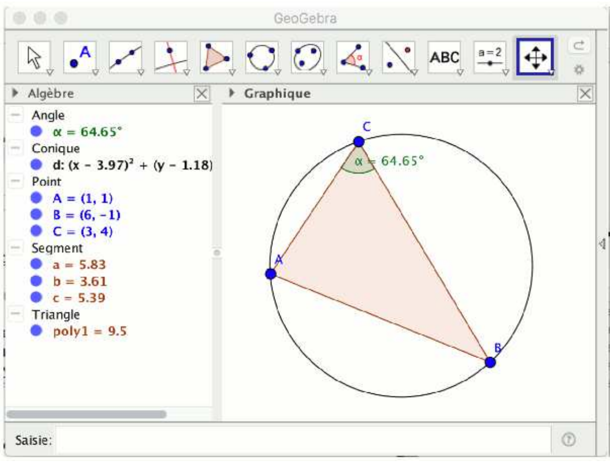


5. Logiciels de géométrie dynamique

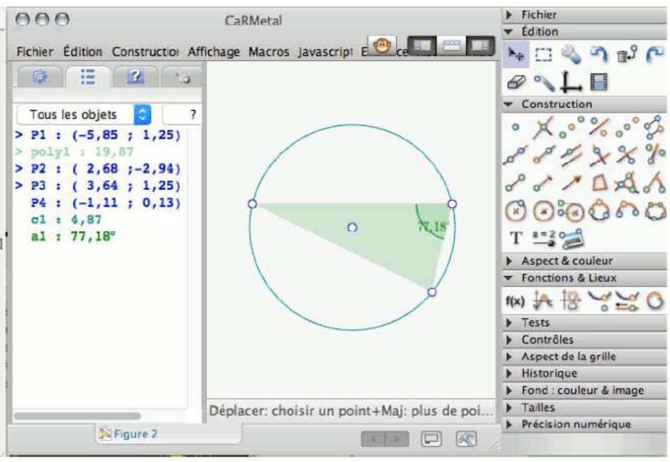
Un logiciel de géométrie dynamique permet de construire des figures en déchargeant l'utilisateur des tâches de tracé. En contrepartie, les instructions doivent être précises et s'appuyer sur les propriétés caractéristiques de la figure. Ce type de logiciel permet aussi de déplacer la figure obtenue en « tirant » sur un point (d'où le dynamisme) et ainsi de contrôler la procédure mise en place pour construire cette figure. En effet, en se déplaçant, la figure doit garder les propriétés qui ont été utilisées pour la construire.

Il existe actuellement de nombreux logiciels de géométrie dynamique. Citons quelques-uns de ces logiciels gratuits et multi-plateformes : GeoGebra, certainement l'un des plus utilisé (ordinateur et tablette), CarMetal (ordinateur), créé par un réunionnais et DGPad, sa version tablette.

Les outils disponibles sont les objets (point, droite, segment, triangle, polygone. . .), les outils de construction (perpendiculaire, parallèle, milieu, bissectrice. . .), de transformation (symétrie, rotation. . .), de mesure (longueur, aire. . .).



GeoGebra



CaRMetal

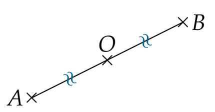
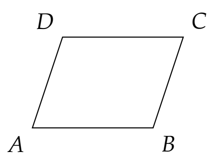
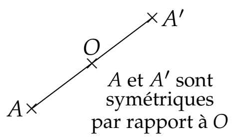
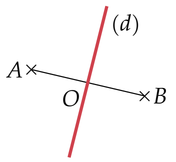
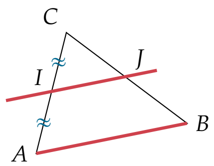
6. Propriétés

Ci-dessous une série de propriétés géométriques issues du manuel Sesamath de seconde.

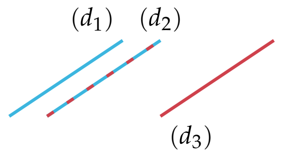
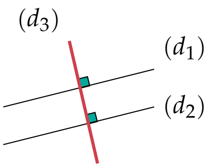
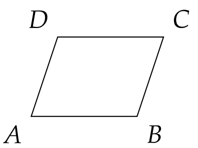
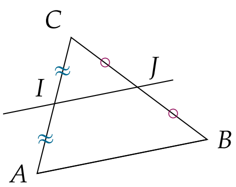
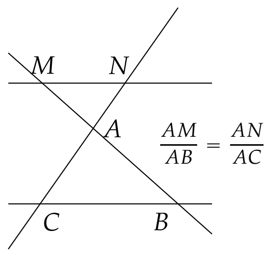
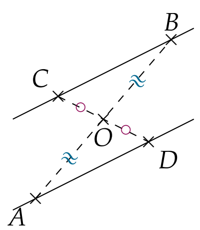
Une trame pour démontrer en géométrie

- Commencer par réaliser un **schéma** représentant la situation de l'énoncé ;
- penser à **coder** les milieux, les angles droits et à repasser en couleurs les droites ou segments parallèles donnés par l'énoncé ;
- parmi les propriétés qui correspondent à la question posée, **choisir** celle dont la figure de la première colonne s'apparente le mieux à celle du schéma réalisé.

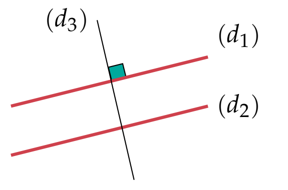
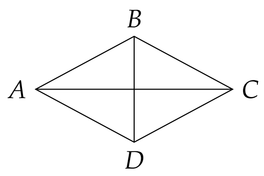
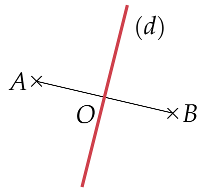
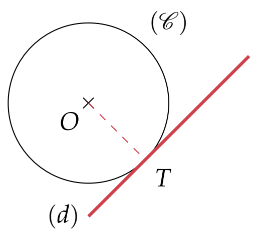
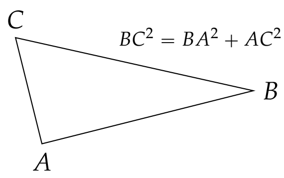
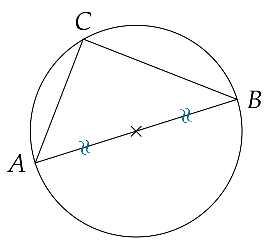
A. Démontrer qu'un point est le milieu d'un segment

	PROPRIÉTÉ 1 Si un point, sur un segment, est à égale distance des deux extrémités, alors ce point est le milieu du segment.	Ici, $O \in [AB]$ et $OA = OB$. Donc O est le milieu de $[AB]$.
 $ABCD$ est un parallélogramme	PROPRIÉTÉ 2 Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses diagonales se coupent en leur milieu (c'est aussi vrai pour les losanges, rectangles et carrés qui sont des parallélogrammes particuliers).	Ici, $ABCD$ est un parallélogramme. Donc ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu.
	PROPRIÉTÉ 3 Si deux points sont symétriques par rapport à un point alors le centre de symétrie est le milieu du segment d'extrémités les deux symétriques.	Ici, A et A' sont symétriques par rapport au point O. Donc O est le milieu du segment $[AA']$.
 (d) est la médiatrice de $[AB]$	PROPRIÉTÉ 4 Si une droite est la médiatrice d'un segment alors elle coupe ce segment en son milieu.	Ici, la médiatrice de $[AB]$ coupe $[AB]$ en O. Donc O est le milieu de $[AB]$.
	PROPRIÉTÉ 5 Si, dans un triangle, une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un deuxième côté alors elle passe par le milieu du troisième côté.	Ici, dans le triangle ABC, I est le milieu de $[AC]$ et la parallèle à $[AB]$ passant par I coupe $[BC]$ en J. Donc J est le milieu du segment $[BC]$.

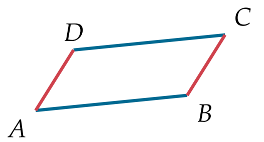
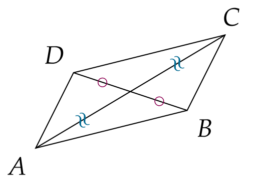
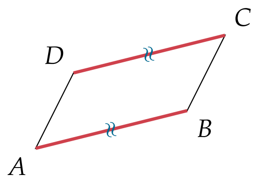
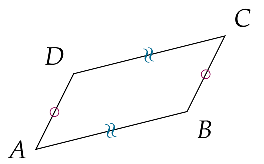
B. Démontrer que deux droites sont parallèles

	**PROPRIÉTÉ 6** Si deux droites sont parallèles alors toute droite parallèle à l'une est parallèle à l'autre.	Ici, $(d_1)//(d_2)$ et $(d_2)//(d_3)$. Donc $(d_1)//(d_3)$.
	**PROPRIÉTÉ 7** Si deux droites sont perpendiculaires à la même droite alors elles sont parallèles entre elles.	Ici, $(d_1) \perp (d_3)$ et $(d_2) \perp (d_3)$. Donc $(d_1)//(d_2)$.
 $ABCD$ est un parallélogramme	**PROPRIÉTÉ 8** Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses côtés opposés sont parallèles.	Ici, $ABCD$ est un parallélogramme. Donc $(AB)//(DC)$ et $(AD)//(BC)$.
	**PROPRIÉTÉ 9** Si, dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés alors elle est parallèle au troisième côté.	Ici, dans le triangle ABC, I est le milieu de $[AC]$ et J est le milieu de $[BC]$. Donc (IJ) est parallèle à (AB).
	**PROPRIÉTÉ 10** Si les points B, A, M d'une part et les points C, A, N d'autre part sont alignés dans le même ordre et si $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}$ alors les droites (CB) et (MN) sont parallèles.	M, A, B d'une part et N, A, C d'autre part sont alignés dans cet ordre. De plus, $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$. Donc $(MN)//(CB)$.
	**PROPRIÉTÉ 11** Si deux droites sont symétriques par rapport à un point alors elles sont parallèles.	Ici, (AD) et (BC) sont symétriques par rapport à O. Donc $(AD)//(CB)$.

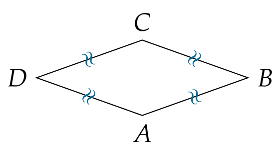
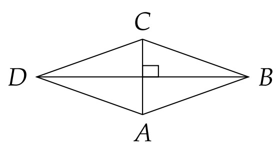
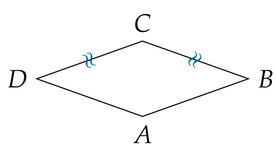
C. Démontrer que deux droites sont perpendiculaires

	**PROPRIÉTÉ 12** Si deux droites sont parallèles alors toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.	Ici, $(d_1)//(d_2)$ et $(d_1) \perp (d_3)$ Donc $(d_2) \perp (d_3)$.
 $ABCD$ est un losange	**PROPRIÉTÉ 13** Si un quadrilatère est un losange alors ses diagonales sont perpendiculaires (c'est aussi vrai pour le carré qui est un losange particulier).	Ici, $ABCD$ est un losange. Donc $(AC) \perp (BD)$.
 (d) est la médiatrice de $[AB]$	**PROPRIÉTÉ 14** Si une droite est la médiatrice d'un segment alors elle est perpendiculaire à ce segment.	Ici, (d) est la médiatrice du segment $[AB]$. Donc $(d) \perp (AB)$.
	**PROPRIÉTÉ 15** Si une droite est tangente à un cercle en un point alors elle est perpendiculaire au rayon de ce cercle qui a pour extrémité ce point.	Ici, la droite (d) est la tangente en T au cercle de centre O. Donc $(d) \perp (OT)$.
	**PROPRIÉTÉ 16** Si, dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés alors le triangle est rectangle.	Ici, $BC^2 = BA^2 + AC^2$. Donc, le triangle ABC est rectangle en A.
	**PROPRIÉTÉ 17** Si un triangle est inscrit dans un cercle de diamètre l'un de ses côtés alors il est rectangle et il admet ce diamètre pour hypoténuse.	Ici, C appartient au cercle de diamètre $[AB]$. Donc ABC est rectangle en C.

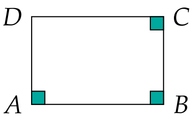
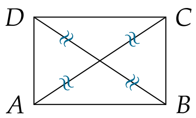
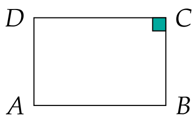
D. Démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme

	**PROPRIÉTÉ 18** Si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles deux à deux alors c'est un parallélogramme.	Ici, $(AB)//(DC)$ et $(AD)//(BC)$. Donc $ABCD$ est un parallélogramme.
	**PROPRIÉTÉ 19** Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu alors c'est un parallélogramme.	Ici, $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu. Donc, $ABCD$ est un parallélogramme.
	**PROPRIÉTÉ 20** Si un quadrilatère non croisé a deux côtés opposés parallèles de même longueur alors c'est un parallélogramme.	Ici, $ABCD$ est non croisé avec $AB = DC$ et $(AB)//(CD)$. Donc, $ABCD$ est un parallélogramme.
	**PROPRIÉTÉ 21** Si un quadrilatère a ses côtés opposés de la même longueur deux à deux alors c'est un parallélogramme.	Ici, $AB = DC$ et $AD = BC$. Donc, $ABCD$ est un parallélogramme.

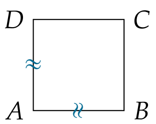
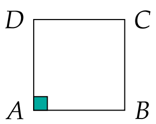
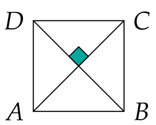
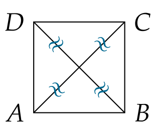
E. Démontrer qu'un quadrilatère est un losange

	**PROPRIÉTÉ 22** Si un quadrilatère a ses quatre côtés de même longueur alors c'est un losange.	Ici, $AB = BC = CD = DA$. Donc $ABCD$ est un losange.
 $ABCD$ est un parallélogramme	**PROPRIÉTÉ 23** Si un parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires alors c'est un losange.	Ici, $ABCD$ est un parallélogramme et $(AC) \perp (BD)$. Donc $ABCD$ est un losange.
 $ABCD$ est un parallélogramme	**PROPRIÉTÉ 24** Si un parallélogramme a deux côtés consécutifs de la même longueur alors c'est un losange.	Ici, $ABCD$ est un parallélogramme avec $CD = CB$. Donc $ABCD$ est un losange.

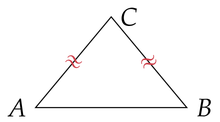
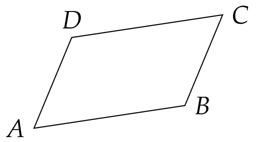
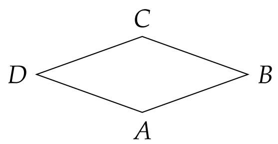
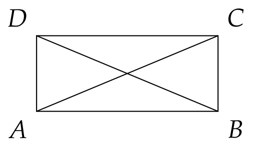
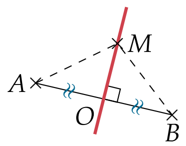
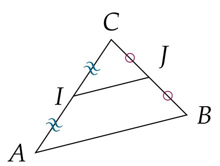
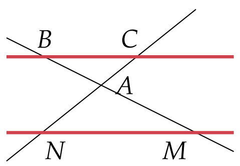
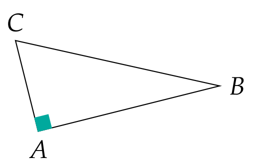
F. Démontrer qu'un quadrilatère est un rectangle

	**PROPRIÉTÉ 25** Si un quadrilatère possède trois angles droits alors c'est un rectangle.	Ici, $(AD) \perp (AB)$, $(AB) \perp (BC)$ et $(BC) \perp (DC)$. Donc $ABCD$ est un rectangle.
 $ABCD$ est un parallélogramme	**PROPRIÉTÉ 26** Si un parallélogramme a ses diagonales de la même longueur alors c'est un rectangle.	Ici, $ABCD$ est un parallélogramme avec $AC = BD$. Donc $ABCD$ est un rectangle.
 $ABCD$ est un parallélogramme	**PROPRIÉTÉ 27** Si un parallélogramme possède deux côtés consécutifs perpendiculaires alors c'est un rectangle.	Ici, $ABCD$ est un parallélogramme avec $(BC) \perp (CD)$. Donc $ABCD$ est un rectangle.

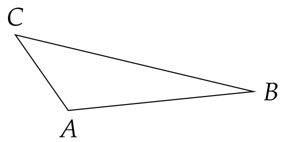
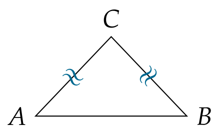
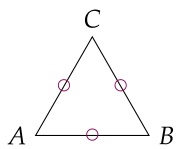
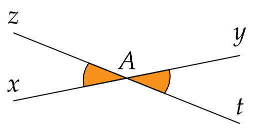
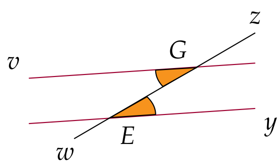
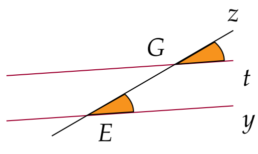
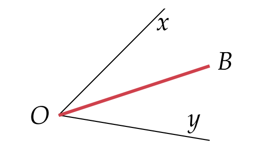
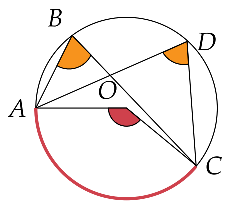
G. Démontrer qu'un quadrilatère est un carré

 $ABCD$ est un rectangle	**PROPRIÉTÉ 28** Si un rectangle possède deux côtés consécutifs de même longueur alors c'est un carré.	Ici, $ABCD$ est un rectangle avec $AB = AD$. Donc $ABCD$ est un carré.
 $ABCD$ est un losange	**PROPRIÉTÉ 29** Si un losange possède deux côtés consécutifs perpendiculaires alors c'est un carré.	Ici, $ABCD$ est un losange avec $(AB) \perp (AD)$. Donc $ABCD$ est un carré.
 $ABCD$ est un rectangle	**PROPRIÉTÉ 30** Si un rectangle a ses diagonales perpendiculaires alors c'est un carré.	Ici, $ABCD$ est un rectangle avec $(AC) \perp (BD)$. Donc $ABCD$ est un carré.
 $ABCD$ est un losange	**PROPRIÉTÉ 31** Si un losange a ses diagonales de même longueur alors c'est un carré.	Ici, $ABCD$ est un losange avec $AC = BD$. Donc $ABCD$ est un carré.

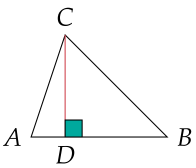
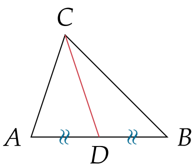
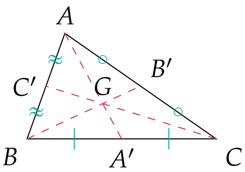
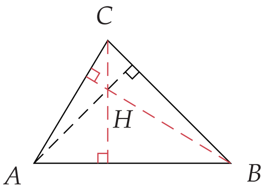
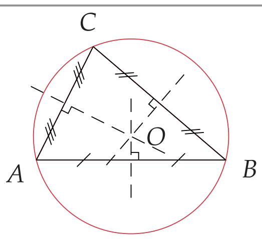
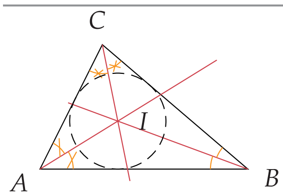
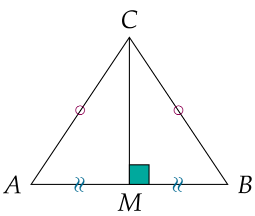
H. Déterminer la mesure d'un segment

	**PROPRIÉTÉ 32** Si un triangle est isocèle [resp. équilatéral] alors il a deux [resp. trois] côtés de même longueur.	Ici, ABC est isocèle en C. Donc $CA = CB$.
 $ABCD$ est un parallélogramme	**PROPRIÉTÉ 33** Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses côtés opposés ont la même longueur (c'est également vrai pour les rectangles, les losanges et les carrés qui sont des parallélogrammes particuliers).	Ici, $ABCD$ est un parallélogramme. Donc $AB = DC$ et $AD = BC$.
 $ABCD$ est un losange	**PROPRIÉTÉ 34** Si un quadrilatère est un losange alors tous ses côtés sont de la même longueur (c'est également vrai pour les carrés qui sont des losanges particuliers).	Ici, $ABCD$ est un losange. Donc $AB = BC = CD = DA$.
 $ABCD$ est un rectangle	**PROPRIÉTÉ 35** Si un quadrilatère est un rectangle alors ses diagonales ont la même longueur (c'est également vrai pour les carrés qui sont des rectangles particuliers).	Ici, $ABCD$ est un rectangle. Donc $AC = BD$.
	**PROPRIÉTÉ 36** Si un point appartient à la médiatrice d'un segment alors il est équidistant des extrémités de ce segment.	Ici, M appartient à la médiatrice de $[AB]$. Donc $MA = MB$.
	**PROPRIÉTÉ 37** Si, dans un triangle, un segment joint les milieux de deux côtés alors sa longueur est égale à la moitié de celle du troisième côté.	Ici, dans le triangle ABC, I est le milieu de $[AC]$ et J est le milieu de $[BC]$. Donc, $IJ = \frac{1}{2}AB$.
	**PROPRIÉTÉ 38** Si B, A, M et C, A, N sont alignés dans le même ordre, alors $\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AC}{AN} = \dfrac{BC}{MN}$.	Ici, $A \in [BM]$, $A \in [CN]$ et $(BC)//(NM)$. Donc $\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AC}{AN} = \dfrac{BC}{MN}$.
	**PROPRIÉTÉ 39** Si un triangle est rectangle alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.	Ici, ABC est rectangle en A. Donc, $BC^2 = BA^2 + AC^2$.

I. Déterminer la mesure d'un angle

	**PROPRIÉTÉ 40** Dans un triangle, la somme des mesures des angles est égale à 180°.	Ici, ABC est un triangle. Donc $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$.
	**PROPRIÉTÉ 41** Si un triangle est isocèle alors ses angles à la base ont la même mesure.	Ici, ABC est isocèle en C. Donc $\widehat{A} = \widehat{B}$.
	**PROPRIÉTÉ 42** Si un triangle est équilatéral alors ses angles mesurent 60°.	Ici, ABC est équilatéral. Donc $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60°$.
	**PROPRIÉTÉ 43** Si deux angles sont opposés par le sommet alors ils ont la même mesure.	Ici, $\widehat{xAz}$ et $\widehat{yAt}$ sont opposés par le sommet. Donc, $\widehat{xAz} = \widehat{yAt}$.
	**PROPRIÉTÉ 44** Si deux angles sont alternes-internes [resp. alternes-externes] compris entre des droites parallèles, alors ils ont même mesure.	Ici, $\widehat{vGw}$ et $\widehat{zEy}$ sont alternes-internes entre deux droites parallèles Donc, $\widehat{vGw} = \widehat{zEy}$.
	**PROPRIÉTÉ 45** Si deux angles sont correspondants et que les droites sont parallèles alors ils ont la même mesure.	Ici, $\widehat{zGt}$ et $\widehat{zEy}$ sont correspondants et les droites sont parallèles. Donc, $\widehat{zGt} = \widehat{zEy}$.
 [OB) est la bissectrice de $\widehat{xOy}$	**PROPRIÉTÉ 46** Si une droite est la bissectrice d'un angle alors elle partage l'angle en deux angles adjacents de même mesure.	Ici, [OB) est la bissectrice de l'angle $\widehat{xOy}$. Donc $\widehat{xOB} = \widehat{BOy} = \frac{1}{2}\widehat{xOy}$.
	**PROPRIÉTÉ 47** Si deux angles sont inscrits dans un même cercle et s'ils interceptent le même arc de cercle alors ils ont la même mesure et l'angle au centre qui intercepte le même arc de cercle mesure le double de l'angle inscrit.	Ici, les angles inscrits $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$ ainsi que l'angle au centre $\widehat{AOC}$ interceptent le même arc $\widehat{AC}$. Donc, $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = \frac{1}{2}\widehat{AOC}$.

J. Démontrer avec les droites remarquables du triangle

	**PROPRIÉTÉ 48** Si, dans un triangle, une droite passe par un sommet et est perpendiculaire au côté opposé alors c'est une hauteur du triangle.	Ici, $(CD) \perp (AB)$. Donc (CD) est la hauteur issue de C du triangle ABC
	**PROPRIÉTÉ 49** Si, dans un triangle, une droite passe par un sommet et par le milieu du côté opposé alors c'est une médiane du triangle.	Ici, D est le milieu de $[AB]$. Donc, $[CD]$ est la médiane issue de C du triangle ABC.
	**PROPRIÉTÉ 50** Dans un triangle, les trois médianes sont concourantes en un point qui est le centre de gravité du triangle et qui se situe aux deux tiers des médianes en partant du sommet.	Ici, G est le centre de gravité du triangle ABC et $[AA']$ en est une médiane. Donc $AG = \frac{2}{3}AA'$.
	**PROPRIÉTÉ 51** Dans un triangle, les trois hauteurs sont concourantes en un point appelé orthocentre du triangle.	Ici, H est le point de concours de la hauteur issue de C et de celle issue de B. Donc, $[AH]$ est la hauteur issue de A.
	**PROPRIÉTÉ 52** Dans un triangle, les trois médiatrices sont concourantes en un point qui est le centre du cercle circonscrit au triangle.	Ici, le cercle est circonscrit au triangle ABC. Donc, son centre O est le point de concours des médiatrices du triangle ABC.
	**PROPRIÉTÉ 53** Dans un triangle, les trois bissectrices sont concourantes en un point qui est le centre du cercle inscrit au triangle.	Ici, le cercle est inscrit dans le triangle ABC. Donc, son centre I est le point de concours des bissectrices du triangle ABC.
	**PROPRIÉTÉ 54** Si un triangle est isocèle, alors la médiane, la hauteur, la bissectrice issues du sommet principal et la médiatrice de la base sont confondues.	Ici, ABC est isocèle en C, M est le milieu de $[AB]$ et $(CM) \perp (AB)$. Donc, (CM) est la médiane, la hauteur, la bissectrice issue de C, la médiatrice de $[AB]$.

Maîtriser les bases avec Mathenpoche

Classe	N°	Thème	Dans le cours
6e	E1	Bases de la géométrie plane	1., 3. et 6.
	E2	Parallèles et perpendiculaires	1. et 6.
	E3	Triangles	4.
	E4	Quadrilatères	4. et 6.
	E6	Médiatrice, bissectrice	1. et 6.
	G2	Angles	2. et 6.
5e	D1	Angles et triangles	1., 2. et 6.
	D2	Transformation et parallélogramme	4. et 6.
4e	D1	Angles et triangles	4. et 6.

1 Figures dynamisantes, ou pas !

On considère les quadrilatère suivants :

- Un carré de 3 cm de côté.
- Un losange dont les diagonales mesurent 4 cm et 6 cm.
- Un parallélogramme dont un côté mesure 3 cm et l'autre 2 cm.

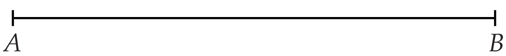
1) Tracer ces quadrilatères à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
2) Tracer ces quadrilatères à la règle graduée et au compas. Y-a-t-il plusieurs configurations possibles ?

2 Construction d'un ove

Voici un programme de construction d'un ove (motif ornemental en forme d'œuf qui orne une corniche ou une moulure).

> – *Soit $[AB]$ un segment et I son milieu.*
> – *Soit C un point de la médiatrice de $[AB]$ tel que $IC = AB/2$.*
> – *Tracer le triangle ABC.*
> – *Tracer le petit arc de cercle de centre B de rayon AB délimité par les demi-droites $[BA)$ et $[BC)$.*
> – *Appeler E le point d'intersection de cet arc avec la droite (BC).*
> – *De même, tracer le petit arc de cercle de centre A de rayon AB par les demi-droites $[AB)$ et $[AC)$.*
> – *Appeler F le point d'intersection de cet arc avec la droite (AC).*
> – *Tracer le demi-cercle de diamètre $[AB]$ ne contenant pas C.*
> – *Tracer l'arc de cercle $\widehat{EF}$ de centre C de rayon EC entièrement situé à l'extérieur du triangle ABC.*

Tracer l'ove sur votre feuille en utilisant uniquement le compas et la règle non graduée. Laisser les traits de construction apparents et prendre pour longueur du segment $[AB]$ la longueur ci-dessous.

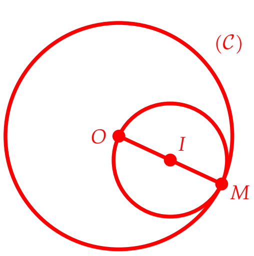


Entraînement

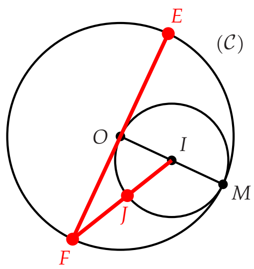
3 Reproduire une figure - vers l'écriture d'un programme

On propose ci-dessous un programme de construction en six étapes principales. Les éléments en rouge sont les « nouveautés » de chaque étape.

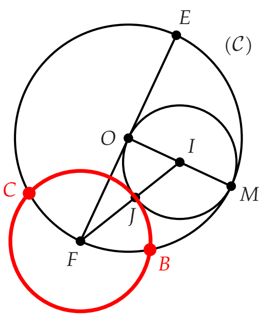
1.



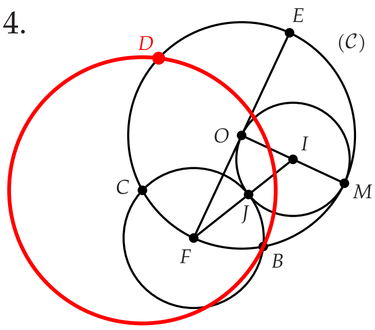
2.



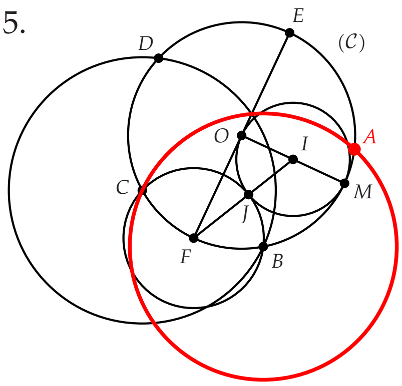
3.



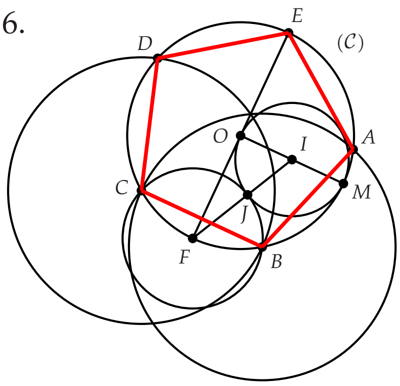
4.



5.



6.



1) Reproduire cette figure sur votre feuille.
2) Quelle figure construit-on grâce à ce programme (aucune justification n'est demandée).
3) Écrire un programme de construction correspondant à ces six étapes.

4 **CRPE 2008 G1**

Le syndicat d'initiative de la ville de Bellerive organise une chasse au trésor. Voici ci-dessous les indices recueillis par les concurrents. Sur le schéma page suivante figure le plan des lieux de la chasse au trésor.

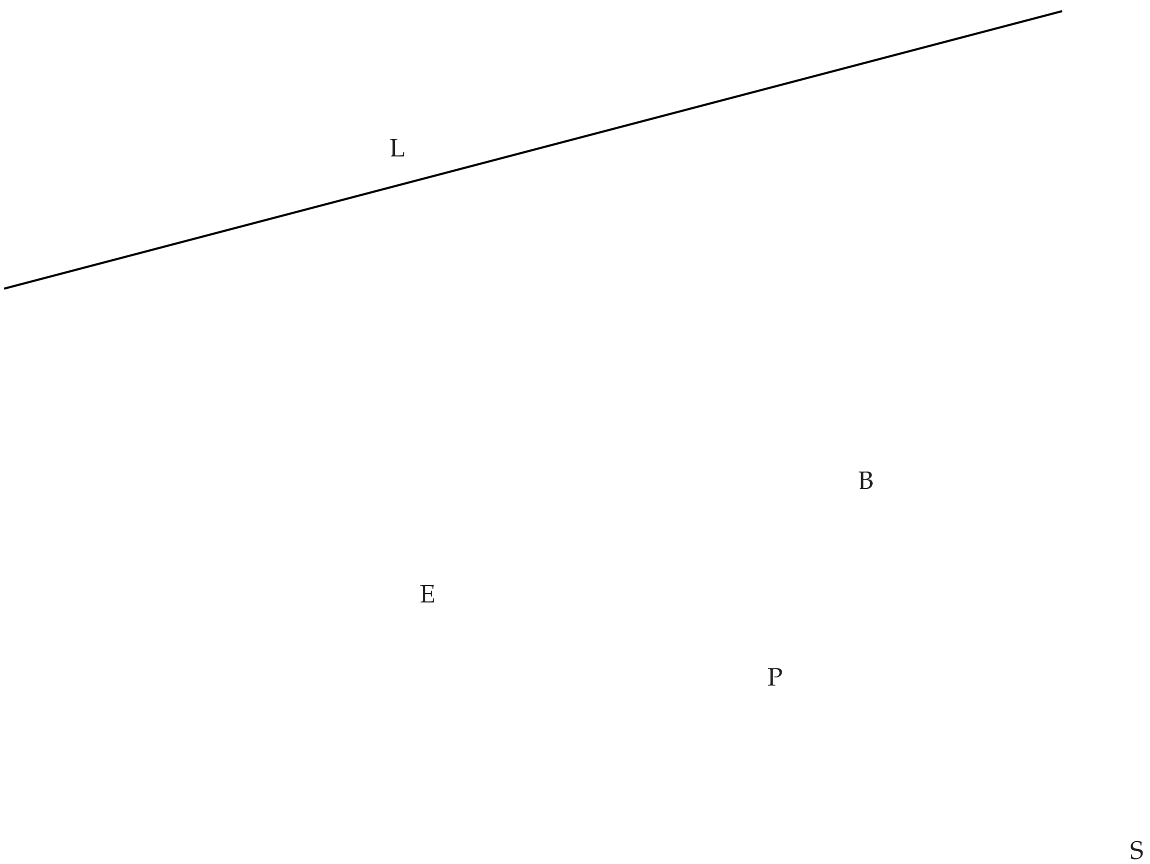
- Indice 1 : Le trésor se trouve à plus de 500 mètres de la ligne à haute tension L.
- Indice 2 : Le trésor est à plus de 800 mètres de l'école E.
- Indice 3 : Le trésor se trouve à moins de 300 mètres de la bibliothèque B.
- Indice 4 : Le trésor est à égale distance du stade S et de la piscine P.

Pour les quatre questions suivantes, aucune construction n'est demandée, seule la description des régions correspondantes dans la réalité est demandée.

1) En considérant l'indice 1, caractériser la région du plan dans laquelle le trésor peut se trouver.
2) En considérant l'indice 2, caractériser la région du plan dans laquelle le trésor peut se trouver.
3) En considérant l'indice 3, caractériser la région du plan dans laquelle le trésor peut se trouver.
4) En considérant l'indice 4, caractériser la région du plan dans laquelle le trésor peut se trouver.
5) Pour cette question, une construction géométrique est attendue. Elle doit être réalisée sur la copie à la règle graduée, à l'équerre et au compas.

   Le plan représenté page suivante est à l'échelle $\dfrac{1}{10\,000}$.
   Reproduire ce plan sur votre copie sachant que :
   - les points E et B sont situés à 5 cm de la droite L avec EB = 6 cm ;
   - le triangle EBS est isocèle en B avec ES = 10 cm ;
   - P est le milieu du segment [ES].

   Mettre en évidence, avec une autre couleur par exemple, la partie du plan dans laquelle se trouve le trésor. Tous les tracés nécessaires à cette construction seront laissés apparents.

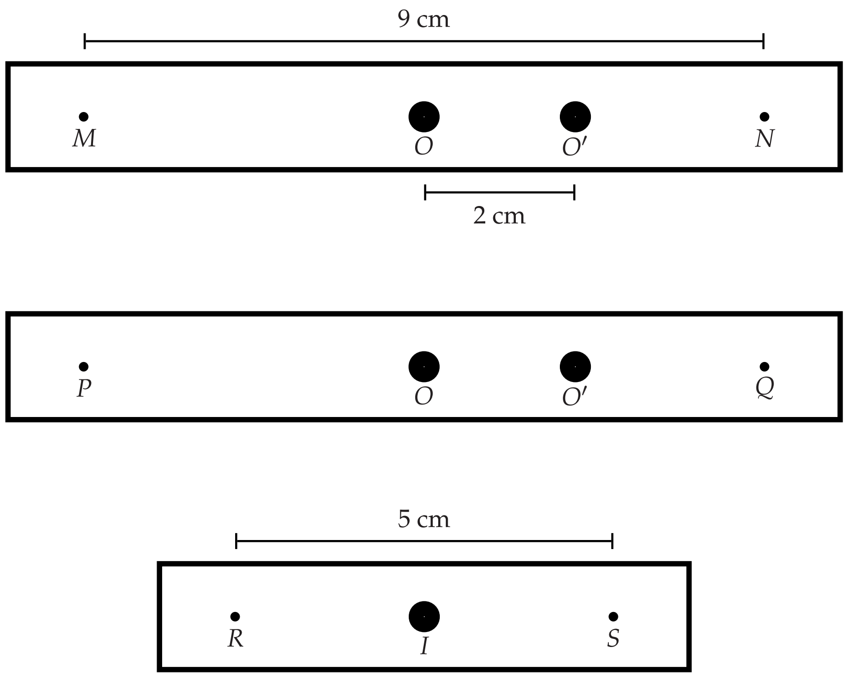


Entraînement

5 Les bandelettes

Exercice issu du site de **Dominique Pernoux** - *http ://pernoux.pagesperso-orange.fr/revision/revgeo.pdf.*

On fabrique à l'aide de bandelettes de bristol des « squelettes » de quadrilatères : chaque squelette est composé de deux bandelettes fixées « en croix » à l'aide d'une attache parisienne qui les traverse aux endroits notés O, O′ et I (situés au centre de la bandelette). Aux emplacements désignés par les lettres M, N, P, Q, R, S on a percé des trous permettant de passer la mine d'un crayon pour tracer les points correspondants, sommets du quadrilatère dont les diagonales sont matérialisées par le « squelette ».
On dispose de deux types de bandelettes de deux longueurs différentes, semblables à celles représentées ci-dessous.



1) On considère un « squelette » obtenu en prenant deux grandes bandes et en les faisant se croiser toutes les deux au point O. On s'intéresse aux quadrilatères MQNP tracés à partir de ce « squelette ».
Quelle famille de quadrilatères peut-on obtenir par ce procédé ? Identifier les cas particuliers éventuels. Justifier.
2) On considère un squelette obtenu en faisant se croiser une petite bande au niveau du point I et une grande bande au niveau du point O. On s'intéresse aux quadrilatères MSNR tracés à partir de ce « squelette ».
Quelle famille de quadrilatères peut-on obtenir par ce procédé ? Identifier les cas particuliers éventuels. Justifier.
3) On considère un squelette obtenu en faisant se croiser une petite bande au niveau du point I et une grande bande au niveau du point O′.
Construire à la règle graduée un quadrilatère MSNR de cette famille. Démontrer qu'il possède un angle droit.
4) On considère un squelette obtenu en prenant deux grandes bandes et en les croisant l'une au niveau du point O, l'autre au niveau du point O′.
Construire à la règle graduée et au compas un quadrilatère MQNP de cette famille qui possède un angle droit.

6 Portrait de quadrilatères

Voici un jeu tiré de *Géométrie à l'École* de François Boule, Savoir dire et savoir-faire, IREM de Bourgogne.
Il est constitué de dix étiquettes.

Deux angles droits seulement	Quatre angles droits
Côtés égaux deux à deux	Deux côtés égaux seulement
Quatre côtés égaux	Côtés opposés parallèles
Deux côtés parallèles seulement	Diagonales égales
Diagonales perpendiculaires	Diagonales se croisant en leur milieu

On choisit au hasard deux étiquettes parmi les dix et on doit essayer de dessiner un quadrilatère qui a ces deux propriétés.

1) Un enfant a sélectionné les deux étiquettes suivantes : Deux angles droits seulement et Diagonales perpendiculaires

a) En se limitant à la première propriété « Deux angles droits seulement », tracer à main levée les deux configurations possibles.

b) En prenant en compte les deux propriétés, construire à l'aide des outils usuels de géométrie (règle, équerre, compas) une figure correspondant à chacune des deux configurations possibles.

c) Rédiger les deux programmes de construction.

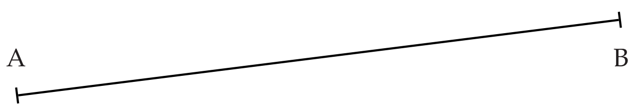
2) On choisit l'étiquette : Deux côtés parallèles seulement

Trouver toutes les étiquettes incompatibles avec elle. Justifier les réponses.

7 CRPE 2006 G1

ABC est un triangle tel que $\widehat{A} = 60°$et $\widehat{B} = 45°$. H est le pied de la hauteur issue de C.
Le cercle de diamètre [AB] de centre I coupe (AC) en L et (BC) en K ; (AK) et (BL) se coupent en O.

1) a) Reproduire ce segment sur votre copie.



b) À partir de ce segment et en utilisant uniquement la règle et le compas, terminer la construction d'un triangle ABC tel que $\widehat{A} = 60°$et $\widehat{B} = 45°$. Laisser apparents tous les traits de construction.

2) Démontrer que la droite (KI) est la médiatrice du segment [AB].

3) Démontrer que les points C, O, H sont alignés.

4) Quelle est la nature du quadrilatère IKCO ? Justifier votre réponse.

Entraînement

8 **CRPRE 2008 G3**

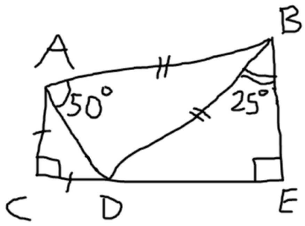
ABC est un triangle dans lequel l'angle de sommet A est aigu.
On considère le cercle de diamètre [BC]. Il coupe les droites (AB) et (AC) respectivement en D et E.
Les droites (BE) et (CD) se coupent en H.

1) Faire une figure.
2) Démontrer que les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.
3) Construire sur votre figure, avec la règle non graduée et le compas, le point M, quatrième sommet du parallélogramme BCMA et le point N, quatrième sommet du parallélogramme BCAN.
On laissera les traits de construction apparents.
4) Démontrer que le point A est le milieu de [MN].

9 **CRPE 2014 G1 et 2018 G1**

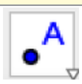
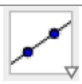
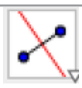
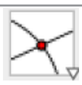
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

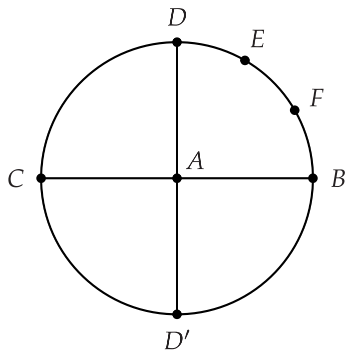
1) La somme des angles d'un pentagone convexe est égale à 540 °.
2) Soit la figure ci-dessous faite à main levée. Les points C, D et E sont alignés.



10 **CRPE 2010 G4**

On considère un cadran d'horloge et ses douze graduations horaires.
On veut construire, avec un logiciel de géométrie dynamique, un cercle et douze points régulièrement espacés pour représenter ce cadran.
On dispose pour cela des seules fonctionnalités accessibles à l'aide des 5 icônes ci-dessous.

Num.	Icône	Description de la fonctionnalité.
N°1		Placer et nommer un point libre.
N°2		Tracer la droite passant par deux points.
N°3		Tracer la médiatrice d'un segment.
N°4		Tracer le cercle défini par son centre et un de ses points.
N°5		Identifier et nommer les points d'intersection de deux objets.



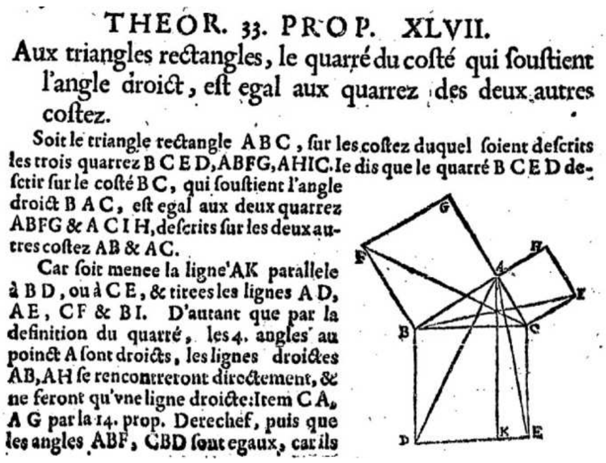
Recopier et compléter la description, ébauchée ci-dessous, de la construction des premiers points (A, B, C, D, E, F) nécessaires pour la construction complète :

- avec l'icône 1, placer et nommer deux points A et B ;
- avec l'icône 4, tracer le cercle de centre A passant par B. . .

Théorème de Pythagore et trigonométrie

GÉOMÉTRIE

10



THEOR. 33. PROP. XLVII.

Aux triangles rectangles, le quarré du costé qui soustient l'angle droict, est egal aux quarrez des deux autres costez.

Soit le triangle rectangle ABC, sur les costez duquel soient descrits les trois quarrez BCED, ABFG, AHIC. Ie dis que le quarré BCED descrit sur le costé BC, qui soustient l'angle droict BAC, est egal aux deux quarrez ABFG & ACIH, descrits sur les deux autres costez AB & AC.

Car soit menee la ligne AK parallele à BD, ou à CE, & tirees les lignes AD, AE, CF & BI. D'autant que par la definition du quarré, les 4. angles au poinct A sont droicts, les lignes droictes AB, AH se rencontreront directement, & ne feront qu'vne ligne droicte: Item CA, AG par la 14. prop. Derechef, puis que les angles ABF, CBD sont egaux, car ils

Les éléments d'Euclide, traduit par Didier Henrion, 1632 © gallica.bnf.fr

Un peu d'histoire

Pythagore de Samos était un astronome, philosophe, musicologue, disciple de **Thalès**. Aucun écrit ne nous est parvenu, et on doit se fier aux historiens de l'Antiquité quant à sa biographie et ses œuvres. Il crée son école à *Crotone*, laquelle devient rapidement une secte aux règles de vie très sévères. Devenant dérangeant, il meurt assassiné.

On attribue à Pythagore l'origine du terme *mathématiques* au sens grec de *mathematikos* : celui qui veut apprendre (scientifiquement). Pythagore est surtout connu par le « grand public » par le célèbre théorème qui porte son nom mais qui existait bien avant lui ! En effet, on retrouve des traces de mesures poussées sur les mesures des triangles rectangles sur d'anciennes tablettes (d'argile) babyloniennes datant de -1800 av. J.-C. ainsi que sur les bords du Nil, en Égypte.

Le nom de Pythagore veut dire « annoncé par le dieu pythien », en relation avec la Pythie de Delphes, vers qui son père, Mnésarque, appris ceci : « ta femme est enceinte et mettra au monde un enfant qui l'emportera en beauté et en sagesse. »

Cours

1. Théorème de Pythagore

PROPRIÉTÉ : Théorème de Pythagore

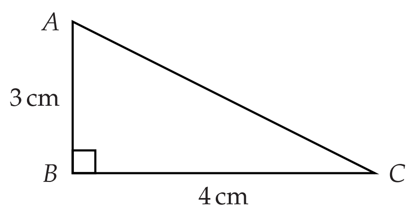
Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux côtés de l'angle droit.

MÉTHODE 1 Calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle

On utilise la propriété de Pythagore en respectant la rédaction :

- citer le triangle rectangle dans lequel on se trouve ainsi que l'angle droit ;
- citer la propriété utilisée (« d'après la propriété de Pythagore ») ;
- écrire l'égalité ;
- calculer la longueur du côté.

Exercice d'application **Longueur de l'hypoténuse**

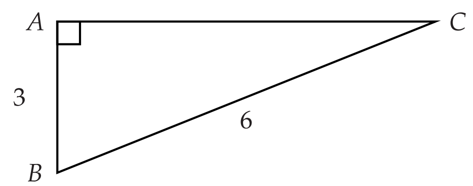


Correction On applique le théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en B :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25$$
$$AC = \sqrt{25} = 5$$

Donc la longueur de AC est de 5 cm.

Exercice d'application **Longueur du côté adjacent**



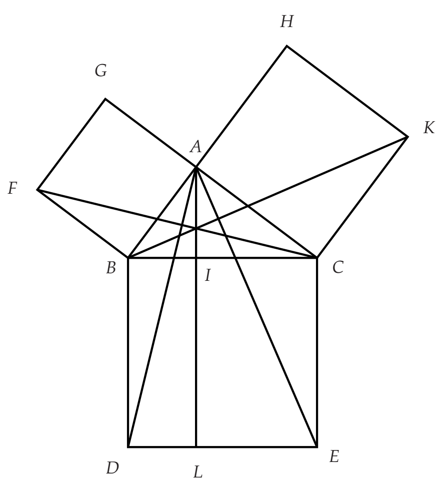
Correction On applique le théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en A :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$
$$AC^2 = 6^2 - 3^2 = 27$$
$$AC = \sqrt{27} \simeq 5,2.$$

La longueur de AC est d'environ 5,2 cm.

Il existe plus de 300 démonstration du théorème de Pythagore. En voici une utilisant les propriétés géométriques des aires. Il s'agit de la **démonstration d'Euclide** (vers −300 av. J.-C.).

PREUVE On désigne par $\mathcal{A}(P)$ l'aire du polygone P.



- $BD = BC$; $BA = BF$ et $\widehat{DBA} = \widehat{CBF}$
  $\Longrightarrow$ les triangles DBA et CBF sont isométriques
  $\Longrightarrow$ $\mathcal{A}(DBA) = \mathcal{A}(CBF)$.
- $\mathcal{A}(DBA) = \mathcal{A}(DBI) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(DBIL)$
  $\mathcal{A}(FBC) = \mathcal{A}(FBA) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(FBAG)$
  $\Longrightarrow$ $\mathcal{A}(DBIL) = \mathcal{A}(FBAG)$.
- De même, on peut démontrer que $\mathcal{A}(ECIL) = \mathcal{A}(KCAH)$
- $\mathcal{A}(BCED) = \mathcal{A}(DBIL) + \mathcal{A}(ECIL)$
  $\Longrightarrow$ $\mathcal{A}(BCED) = \mathcal{A}(FBAG) + \mathcal{A}(KCAH)$
  $\Longrightarrow$ $BC^2 = AB^2 + AC^2$

2. Réciproque du théorème de Pythagore

PROPRIÉTÉ : Réciproque du théorème de Pythagore

Si dans un triangle, le carré de la longueur du côté le plus grand est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors le triangle est rectangle et le plus grand côté est l'hypoténuse.

MÉTHODE 2 Déterminer si un triangle possède un angle droit

- repérer le côté le plus grand ;
- calculer séparément :
  - le carré du plus grand côté ;
  - la somme des carrés des deux autres côtés.

Deux cas peuvent se présenter :

il y a égalité	**il n'y a pas égalité**
• écrire l'égalité ;	• écrire l'inégalité ;
• citer la propriété utilisée : « d'après la réciproque du théorème de Pythagore… » ;	• citer la propriété utilisée : « d'après le théorème de Pythagore… » ;
• conclure : « le triangle est rectangle en… »	• conclure : « le triangle n'est pas rectangle. »

Exercice d'application Soit ABC un triangle tel que $AC = 10$, $AB = 6$ et $BC = 8$.
Le triangle ABC est-il rectangle ?

Correction Le côté le plus long étant $[AC]$, si le triangle est rectangle, il l'est en B.
- $AC^2 = 10^2 = 100$;
- $AB^2 + BC^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$.

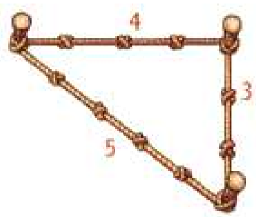
On a l'égalité : $AC^2 = AB^2 + BC^2$.
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

Exercice d'application Soit ABC un triangle tel que $AC = 9$, $AB = 16$ et $BC = 12$.
Le triangle ABC est-il rectangle ?

Correction Le côté le plus long étant $[AB]$, si le triangle est rectangle, il l'est en C.
- $AB^2 = 16^2 = 256$;
- $AC^2 + CB^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$

On a : $AB^2 \neq AC^2 + CB^2$.
D'après le théorème de Pythagore, si le triangle ABC était rectangle en C, on aurait l'égalité, ce qui n'est pas le cas donc : le triangle ABC n'est pas rectangle.

Remarque : lorsqu'il n'y a pas égalité, on utilise un raisonnement par contraposition, c'est à dire un raisonnement qui consiste à passer d'un énoncé direct de type $[A \Longrightarrow B]$ à sa formule contraposée de type $[non\ B \Longrightarrow non\ A]$.



Les géomètres égyptiens de l'époque pharaonique (donc bien avant la naissance de Pythagore) disposaient d'une corde sur laquelle ils avaient effectué 13 nœuds consécutifs situés à des intervalles réguliers. Celle-ci permettait de former des angles droits.

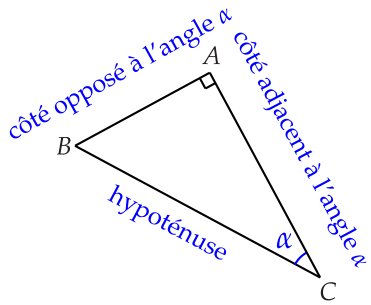
3. Trigonométrie dans le triangle rectangle

DÉFINITION : Cosinus, sinus, tangente

Soit ABC un triangle rectangle en A ; on note α la mesure l'angle aigu $\widehat{ACB}$, on a :

$$\cos\alpha = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{CA}{CB} \quad ; \quad \sin\alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{BA}{BC}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{AB}{AC}$$



exemple de moyen mnémotechnique pour se rappeler des formules :

$$\frac{SO}{H}\;\frac{CA}{H}\;\frac{TO}{A}$$

Ces formules permettent de calculer la mesure d'un angle dans un triangle rectangle.

Exemple

Soit le triangle ABC rectangle en A, avec $AB = 12\,\text{cm}$ et $AC = 16\,\text{cm}$.
Calculer l'angle $\widehat{ACB}$.

Correction

On peut calculer la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$ en utilisant la formule de la **tangente** :

$$\tan\widehat{ACB} = \frac{AB}{AC} = \frac{12\,\text{cm}}{16\,\text{cm}} = \frac{3}{4}$$

d'où $\widehat{ACB} = \arctan\left(\frac{3}{4}\right) \simeq 36{,}9\,^\circ$.

REMARQUE : la touche 

ou 

de la calculatrice permet de déterminer l'angle correspondant à une tangente.

Inversement, les formules de trigonométrie permettent de calculer la longueur d'un côté dans un triangle rectangle.

Exemple

Soit le triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 12\,\text{cm}$ et $\alpha = \widehat{ACB} = 30\,^\circ$.
Calculer BC.

Correction

On peut calculer la longueur du côté $[BC]$ en utilisant la formule du **sinus** :

$$\sin\alpha = \sin\widehat{ACB} = \frac{BA}{BC}$$

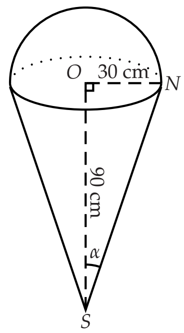
d'où $BC = \dfrac{BA}{\sin\alpha} = \dfrac{12\,\text{cm}}{\sin 30\,^\circ} = 24\,\text{cm}$.

PROPRIÉTÉ : Trigonométrie

Si α est la mesure (en degrés) d'un angle aigu dans un triangle.
On a $0 < \alpha < 90\,^\circ$ et les propriétés suivantes :

- $0 < \cos\alpha < 1$ et $0 < \sin\alpha < 1$.
- $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ et $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Groupement 1 - Exercice 5 - Question 2 : Pythagore



Un ballon-sonde est un ballon à gaz utilisé pour faire des mesures locales dans l'atmosphère.
Dans le cadre du projet scientifique qu'elle anime pour sa classe de CM2, une professeure des écoles a reçu un petit ballon-sonde, représenté ci-contre.
Son enveloppe, composée de matières plastiques et de latex, a la forme, une fois gonflée, d'un cône de révolution surmonté d'une demi-sphère.

Montrer qu'une génératrice du cône mesure $\sqrt{9000}$ cm.

Exemple de corrigé.
Dans le cône de révolution, $[SN]$ est une génératrice, et la hauteur $[OS]$ est perpendiculaire au rayon $[ON]$.

On peut donc appliquer le théorème de Pythagore dans le triangle SON rectangle en O :

$$\begin{aligned} SN^2 = OS^2 + ON^2 &= (90\,\text{cm})^2 + (30\,\text{cm})^2 \\ &= 8\,100\,\text{cm}^2 + 900\,\text{cm}^2 = 9\,000\,\text{cm}^2 \end{aligned}$$

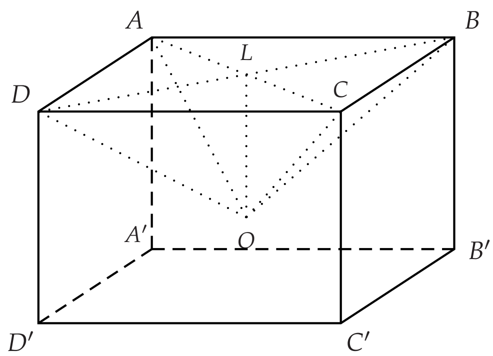
La génératrice du cône mesure $\sqrt{9000}$ cm.

Groupement 2 - Exercice 3 - Questions 1 et 2 : Pythagore et tracé

On considère un pavé droit $ABCDA'B'C'D'$ avec $DD' = 5\,\text{cm}$; $DC = 6\,\text{cm}$ et $DA = 7\,\text{cm}$.
On note L le point d'intersection des diagonales $[AC]$ et $[BD]$.
On souhaite creuser ce pavé, en retirant une pyramide $OABCD$ de hauteur $[OL]$.
Dans cette partie, on suppose que $OL = 4$ cm.

1) Montrer que $AL \approx 4{,}6\,\text{cm}$.

2) Construire le triangle ALO en vraie grandeur.



Exemple de corrigé.

1) Dans le triangle ADC rectangle en D, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$\begin{aligned} AC^2 = AD^2 + DC^2 &= (7\,\text{cm})^2 + (6\,\text{cm})^2 \\ &= 49\,\text{cm}^2 + 36\,\text{cm}^2 = 85\,\text{cm}^2\text{, soit } AC = \sqrt{85}\,\text{cm}. \end{aligned}$$

L étant le point d'intersection des diagonales du rectangle $ABCD$, il est situé au milieu de chaque diagonale, donc $AL = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{1}{2}\sqrt{85}\text{cm} \approx 4{,}61$ cm. On a bien $AL \approx 4{,}61$ cm.

2) $[OL]$ est la hauteur de la pyramide $OABCD$, on a donc (OL) perpendiculaire au plan (ABC), donc à toute droite de ce plan, en particulier à (AL).
Il suffit donc de tracer le triangle ALO rectangle en L tel que $OL = 4\,\text{cm}$ et $AL \approx 4{,}61$ cm.

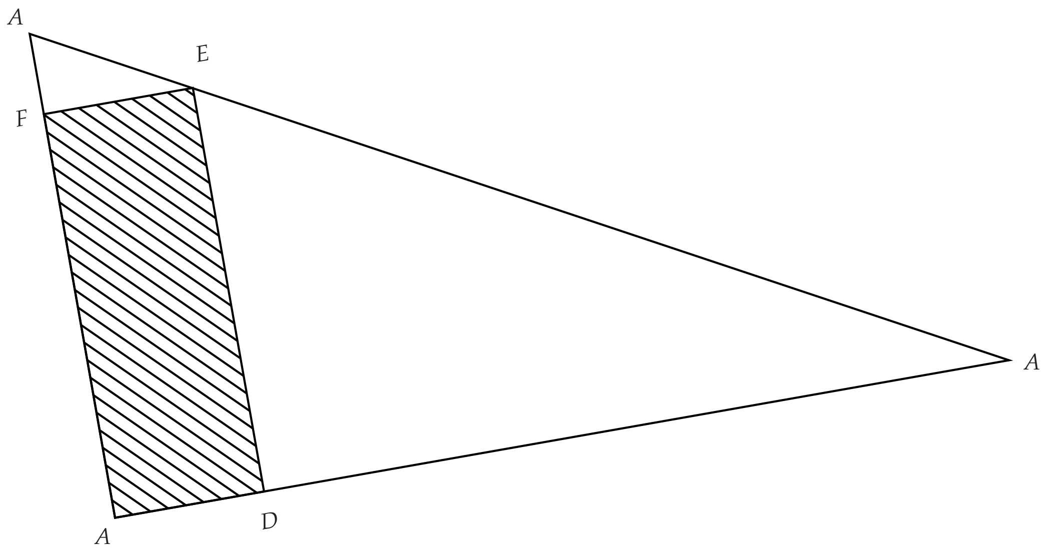
Vu au CRPE en 2022

Groupement 3 - Exercice 3 - Question 1 : Pythagore

Une enseignante a le projet d'installer un potager rectangulaire $ADEF$ sur une parcelle de forme triangulaire ABC dans l'enceinte de l'école.

Les points A, B, C, D, E et F sont tels que :

- $AB = 24\,\text{m}$, $AC = 10\,\text{m}$ et $BC = 26\,\text{m}$;
- $D \in [AB]$, $E \in [BC]$ et $F \in [AC]$.



La figure ci-dessus n'est pas à l'échelle.

Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

Exemple de corrigé.

Dans le triangle ABC, on a d'une part : $BC^2 = (26\,\text{m})^2 = 676\,\text{m}^2$;

et d'autre part, $AB^2 + AC^2 = (24\,\text{m})^2 + (10\,\text{m})^2 = 576\,\text{m}^2 + 100\,\text{m}^2 = 676\,\text{m}^2$.

$BC^2 = AB^2 + AC^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

Maîtriser les bases avec MathenPoche

Classe	N°	Thème	Dans le cours
4e	D3	Triangles rectangles	1. et 2.
3e	D3	Triangles rectangles	3.

1 **Pouce !**

Marc décide de calculer la longueur de la diagonale de l'écran de sa console (écran rectangulaire).
Il sait que cet écran mesure 5,2 cm de large et 6,2 cm de long.

1) Calculer la longueur de cette diagonale au millimètre près.

2) Sur la publicité de cette console, il est indiqué que sa diagonale mesure trois pouces. En déduire une valeur approchée de un pouce.

3) Un netbook a un écran de 10,1 pouces. Quelle est la longueur de la diagonale de l'écran de ce netbook en cm ?

2 **Pêle-même**

1) ABC est un triangle rectangle en B tel que AB = 2,4 cm et $\widehat{ACB} = 44\,^\circ$. Calculer AC au mm près.

2) SRT est un triangle rectangle en S tel que SR = 4 cm et RT = 6 cm. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{SRT}$.

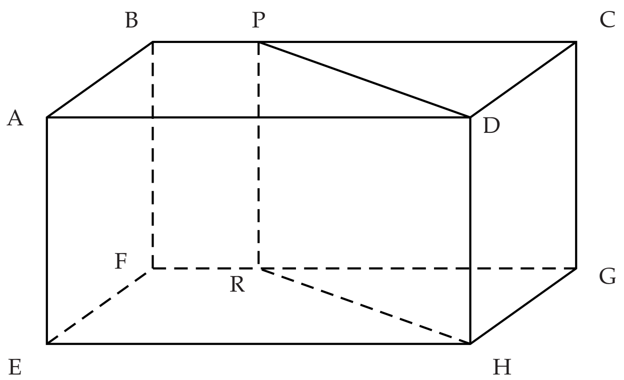
3) ATR est un triangle rectangle en A tel que AT = 9,6 cm et $\widehat{TRA} = 30\,^\circ$. Calculer AR au mm près.

3 **CRPE 2005 Besançon**

Les nombres a, b et c sont des nombres entiers tels que $0 < a \leqslant b \leqslant c$.
On suppose que a, b et c sont les mesures de longueur des côtés d'un triangle rectangle.
Montrez que l'un au moins de ces trois nombres est pair.

4 **CRPE 2005 Grenoble**

Le parallélépipède rectangle ABCDEFGH ci-dessous est coupé selon un plan et la section obtenue est le quadrilatère DPRH.



On donne EH = 8 cm, HG = 5 cm, CG = 4 cm et BP = 2 cm.

1) Tracez en vraie grandeur le quadrilatère DPRH.

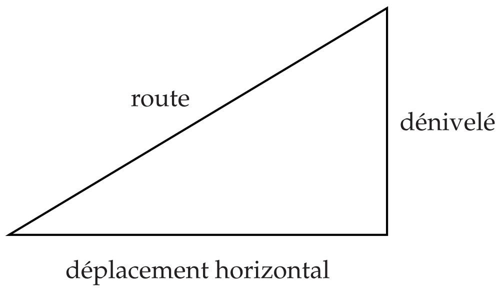
2) Calculez la valeur exacte de PH.

3) Calculez le volume du prisme ABPDEFRH.

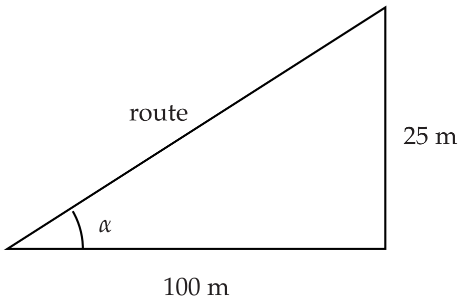
Entraînement

5 CRPE 2014 G2

Albert part dans les Alpes Autrichiennes, dans la station de ski de Kitzbühel.
Lors de la montée à la station, sur le dernier tronçon de route montant à la station en ligne droite, Albert a vu un panneau signalant une pente constante de 25 %. La pente est le rapport entre le dénivelé et le déplacement horizontal (théorique).
Ainsi une pente de 25 % indique un dénivelé de 25 m pour un déplacement horizontal de 100 m.



La figure n'est pas à l'échelle



On note α l'angle que la route forme avec l'horizontale. Cet angle est appelé l'inclinaison de la route.

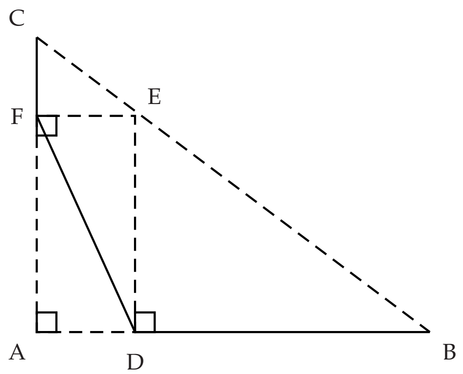
1) Calculer, au degré près, l'inclinaison du dernier tronçon de la route empruntée par Albert.

2) Ce tronçon de route permet de s'élever de 145 m. Calculer sa longueur, au mètre près.

6 CRPE 2016 G3

On donne trois points A, B, C tels que AB = 8 cm, AC = 6 cm ; les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.
On place :

- un point D appartenant au segment [AB] distinct de A et B ;
- le point E, intersection du segment [BC] et de la perpendiculaire à la droite (AB) passant par D ;
- le point F, intersection du segment [AC] et de la perpendiculaire à la droite (AC) passant par E.



1) Démontrer que BC = 10 cm.

2) Déterminer une mesure en degré de l'angle $\widehat{ABC}$ (on donnera le résultat arrondi à l'unité).

3) Démontrer que AE = DF.

7 CRPE 2009 G1

On considère deux points A et B du plan distants de 6 cm.

1) a) Le point C_1 est sur le segment [AB] et vérifie la condition $BC_1 = 2\ AC_1$. Quelle est la longueur du segment $[AC_1]$? Justifier.

b) Le point C_2, distinct de C_1, est sur la droite (AB) et vérifie la condition $BC_2 = 2\ AC_2$. Quelle est la longueur du segment $[AC_2]$? Justifier.

c) Placer, avec une règle graduée, les points A, B, C_1 et C_2 sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure des questions.

2) On s'intéresse maintenant aux points C du plan n'appartenant pas à la droite (AB) et vérifiant la condition BC = 2AC. On appelle x la mesure de AC, l'unité de longueur étant le centimètre.

a) Existe-t-il des points C correspondant à la valeur $x = 9$? Justifier la réponse. Dans le cas d'une réponse positive, construire ces points.

b) Existe-t-il des points C correspondant à la valeur $x = 5$? Justifier la réponse. Dans le cas d'une réponse positive, construire ces points.

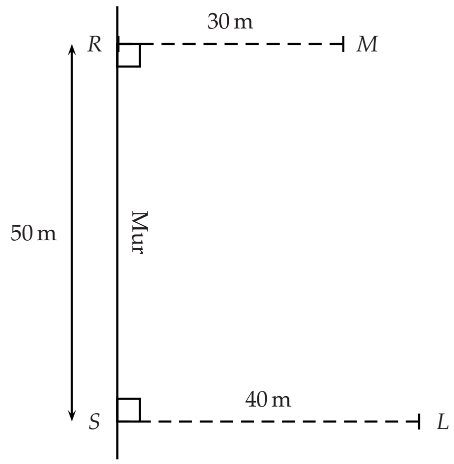
3) Calculer la valeur de x pour laquelle le triangle ABC est rectangle en C. Ecrire le résultat sous la forme $a\sqrt{5}$.

4) Montrer qu'il existe une seule valeur de x pour laquelle le triangle ABC est isocèle. Déterminer cette valeur et placer les points correspondants sur la figure en laissant apparents les tracés nécessaires à cette construction.

8 CRPE 2022 - Sujet 0

On propose un jeu dans une cour de récréation. Pour cela on s'appuie sur des croix peintes au sol comme indiquée sur le schéma ci-contre :

- la croix M est située à 30 m du mur d'enceinte de l'école ($MR = 30$ m) ;
- la croix L est située à 40 m du mur d'enceinte de l'école ($LS = 40$ m) ;
- les points R et S sont distants de 50 m ($RS = 50$ m).



Mila, une élève, se trouve sur la croix M et Lucien, un autre élève, se trouve sur la croix L. L'enseignante souhaite que Mila et Lucien courent tous les deux vers un même point de contact au mur ; le gagnant sera le premier à toucher ce point sur le mur. Pour que l'épreuve soit équitable, l'enseignante souhaite que le point de contact soit à égale distance des positions initiales des deux élèves, c'est-à-dire des croix L et M.

1) Construire à l'échelle le plan de la cour avec les points M, L, R et S en choisissant comme échelle 1 cm pour 5 m.

2) a) Sur la figure, construire le point T, milieu du segment $[ML]$. Tracer la droite perpendiculaire à (ML) et passant par T. On note C le point d'intersection de cette droite avec le mur.

b) Justifier que le point C est le point de contact cherché.

c) Mesurer la longueur RC sur le plan et en déduire une estimation de la distance entre les points R et C dans la cour de récréation.

3) On note x la distance, exprimée en mètre, entre les points R et C dans la cour de récréation.

a) Déterminer les longueurs MC et CL en fonction de x.

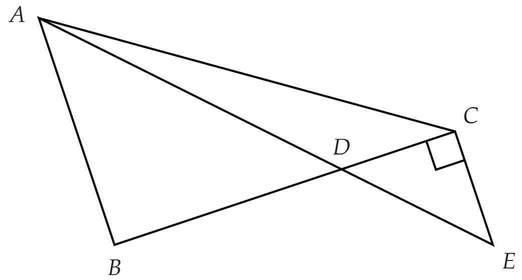
b) En déduire la distance entre les points R et C dans la cour de récréation.

Entraînement

9 **CRPE 2019 G3**

On considère la figure ci-dessous qui n'est pas représentée à l'échelle et qui vérifie les propriétés suivantes :

- $BC = 8\,\text{cm}$;
- $AB = 6\,\text{cm}$;
- $AC = 10\,\text{cm}$;
- $AD = 8\,\text{cm}$;
- D appartient aux segments $[AE]$ et $[BC]$;
- Les droites (BC) et (CE) sont perpendiculaires.



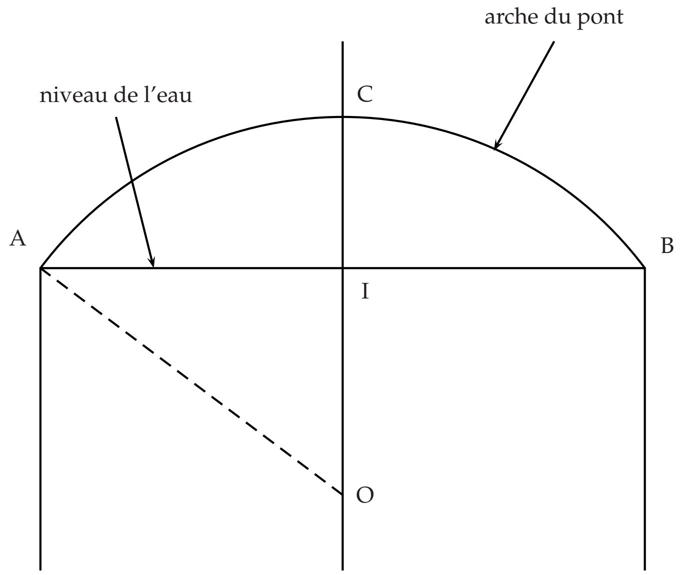
Le but de l'exercice est de déterminer l'aire du triangle ACE.

1) Montrer que les droites (AB) et (BC) sont perpendiculaires.
2) En déduire la longueur BD.
3) Déterminer la longueur CE.
4) Déterminer l'aire du triangle ACE.

10 **CRPE 2017 G3**

Un pont a une arche en forme d'arc de cercle.

Lors d'une crue, l'eau atteint les sommets A et B des piliers du pont.
La hauteur maximale IC entre le niveau de l'eau et le sommet de l'arche est alors de 5 mètres.
L'écartement AB entre les deux piliers du pont est de 24 mètres.
La situation est modélisée par le schéma ci-contre, qui n'est pas à l'échelle, sur lequel O est le centre de l'arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$ et (CO) est l'axe de symétrie de la figure.



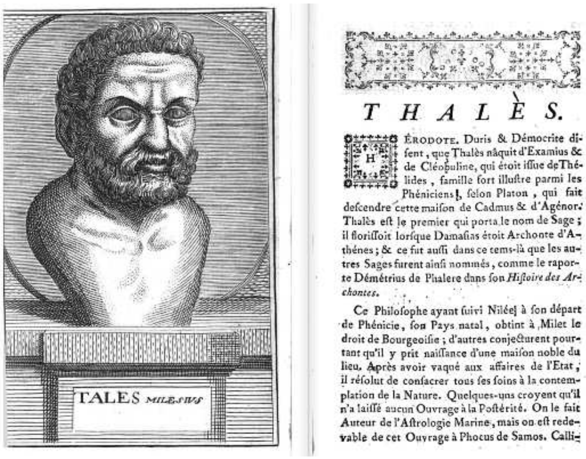
1) Montrer que le rayon OA de l'arche est 16,9 m.
2) On assimile la coupe de la partie émergée d'une péniche, vue de face, à un rectangle de 4 mètres de haut et de 12 mètres de large.

La situation est modélisée par le schéma ci-dessus, qui n'est pas à l'échelle sur lequel on a EH = 12 m et FE = 4 m.
Cette péniche peut-elle passer sous l'arche du pont sans dommages ? Justifier.

GÉOMÉTRIE

11

Théorème de Thalès et transformations



THALÈS.

HÉRODOTE, Duris & Démocrite disent, que Thalès nâquit d'Examius & de Cléobuline, qui étoit issue de Thélides, famille fort illustre parmi les Phéniciens, selon Platon, qui fait descendre cette maison de Cadmus & d'Agénor. Thalès est le premier qui porta le nom de Sage ; il florissoit lorsque Damasias étoit Archonte d'Athénes ; & ce fut aussi dans ce tems-là que les autres Sages furent ainsi nommés, comme le raporte Démétrius de Phalere dans son *Histoire des Archontes*.

Ce Philosophe ayant suivi Nilée à son départ de Phénicie, son Pays natal, obtint à Milet le droit de Bourgeoisie ; d'autres conjecturent pourtant qu'il y prit naissance d'une maison noble du lieu. Après avoir vaqué aux affaires de l'Etat, il résolut de consacrer tous ses soins à la contemplation de la Nature. Quelques-uns croyent qu'il n'a laissé aucun Ouvrage à la Postérité. On le fait Auteur de l'Astrologie Marine, mais on est redevable de cet Ouvrage à Phocus de Samos. Calli-

Vies, doctrines et sentences des philosophes illustres, 1761, Diogenes Laertius

Un peu d'histoire

La tradition attribue à **Thalès de Milet** (environ -625; -546 av. J.-C.) l'introduction en Grèce de la géométrie égyptienne. Thalès n'a laissé aucun écrit, ce qui rend donc difficile la réalisation d'une biographie incontestée de ce sage. C'est un commerçant qui consacre sa vie aux voyages et aux études, philosophe et savant, il est l'auteur de nombreuses recherches mathématiques, notamment en géométrie. De retour à Milet, il devient homme politique, et homme d'affaires. Ses travaux portent sur les mathématiques, l'astrologie, l'astronomie et la philosophie. Il serait mort de déshydratation en regardant un concours gymnique, oubliant de d'alimenter et de s'hydrater. On dit qu'il aurait mesuré les grandes pyramides grâce à leur ombre : au cours d'un voyage en Égypte, il aperçoit la pyramide de Kheops. Les dimensions du monument âgé alors de 2 000 ans, dépassent de loin tout ce qu'il avait imaginé.

– « *Comment mesurer cette pyramide ?* »

Thalès regardant son ombre eut alors cette idée :

– « *Le rapport que j'entretiens avec mon ombre est le même que celui que la pyramide entretient avec la sienne. Donc, à l'instant où mon ombre sera égale à ma taille, l'ombre de la pyramide sera égale à sa hauteur.* »

Toutefois, des documents historiques montrent que cette propriété était déjà connue bien avant par les Babyloniens et les Égyptiens. Le résultat porte le nom de Thalès en France. En anglais, il est connu sous le nom de *Intercept theorem* ; en allemand il est appelé *Strahlensatz* (théorème des rayons). La première démonstration écrite connue de ce théorème est donnée dans les *Éléments* d'**Euclide**.

Cours

1. Théorème de Thalès

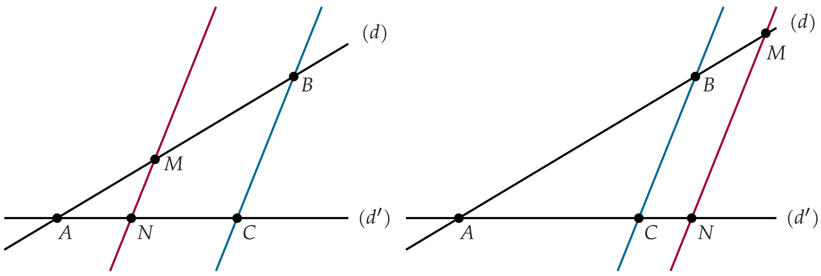
A. Configuration de Thalès

PROPRIÉTÉ : Théorème de Thalès

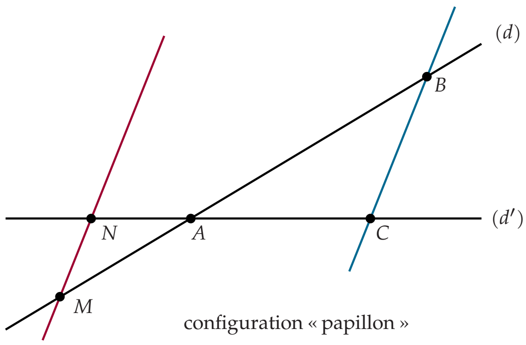
Soient (d) et (d') sont deux droites sécantes en A, B et M deux points de la droite (d), distincts de A, et C et N deux points de la droite (d'), distincts de A.
Si les droites (BC) et (MN) sont parallèles, alors : $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$.

Remarque : ce rapport est également égal à $\dfrac{MN}{BC}$ puisque dans ce cas, les triangles ABC et AMN sont semblables. Autrement dit, les longueurs des côtés des triangles ABC et AMN sont proportionnelles.

Les trois figures clé :

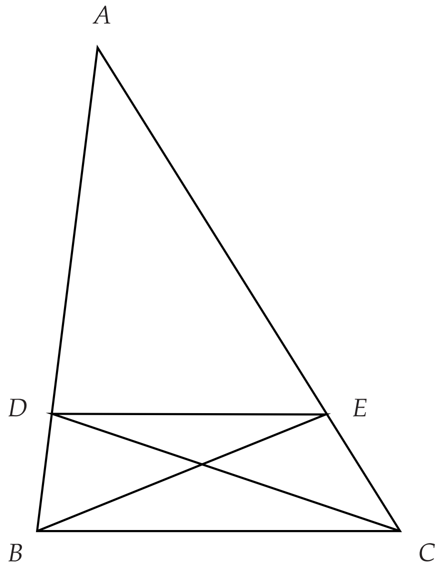


configurations « classique »



configuration « papillon »

PREUVE Une démonstration parmi d'autres : le démonstration d'Euclide basée sur les aires (−300 avant J.-C.).



Les droites (DE) et (BC) sont parallèles.

- Les triangles DEB et DEC on une base commune : $[DE]$ et la même hauteur donc : $\mathcal{A}(DEB) = \mathcal{A}(DEC)$;
  D'où $\mathcal{A}(ABE) = \mathcal{A}(ACD)$ par ajout de $\mathcal{A}(ADE)$.
  $\Longrightarrow \dfrac{\mathcal{A}(ABE)}{\mathcal{A}(ABC)} = \dfrac{\mathcal{A}(ACD)}{\mathcal{A}(ABC)}$;
- les triangles ABE et ABC ont la même hauteur issue de B : h_1 ;
  les triangles ACD et ABC ont la même hauteur issue de C : h_2 ;
  $\Longrightarrow \dfrac{\frac{AE \times \cancel{h_1}}{\cancel{2}}}{\frac{AC \times \cancel{h_1}}{\cancel{2}}} = \dfrac{\frac{AD \times \cancel{h_2}}{\cancel{2}}}{\frac{AB \times \cancel{h_2}}{\cancel{2}}}$
  $\Longrightarrow \boxed{\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{AD}{AB}}$

MÉTHODE 1 Calculer une longueur dans une configuration de Thalès

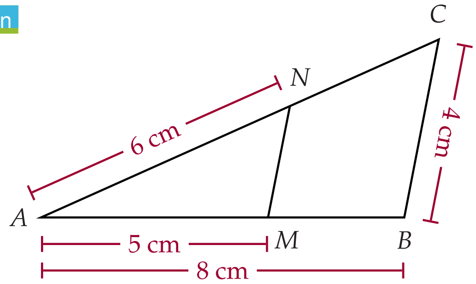
On utilise le théorème de Thalès en respectant la rédaction :

- citer les points alignés dans un ordre précis et les droites parallèles;
- citer la propriété utilisée (« d'après le théorème de Thalès »);
- écrire l'égalité des quotients;
- isoler, puis calculer la longueur du segment demandé.

Exercice d'application

ABC est un triangle,
$M \in [AB]$, $N \in [AC]$,
$AM = 5\,\text{cm}$, $AN = 6\,\text{cm}$, $AB = 8\,\text{cm}$ et $BC = 4\,\text{cm}$.
Les droites (MN) et (BC) sont parallèles.
Calculer MN et AC.

Correction



Les points A, N, C et A, M, B sont alignés dans le même ordre et les droites (MN) et (BC) sont parallèles.
D'après le théorème de Thalès, avec des mesures en cm, on a :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \quad \text{soit} \quad \frac{5}{8} = \frac{6}{AC} = \frac{MN}{4}$$

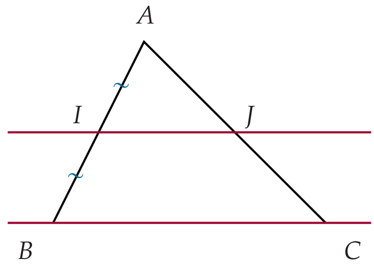
donc, $MN = \dfrac{5 \times 4}{8} = 2,5$ et $AC = \dfrac{6 \times 8}{5} = 9,6$.

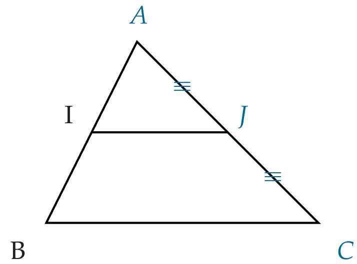
B. Un cas particulier : la réciproque du théorème de la droite des milieux.

PROPRIÉTÉ : Réciproque de la droite des milieux

Dans un triangle, la droite qui passe par le milieu d'un côté parallèlement à un deuxième côté coupe le troisième côté en son milieu.

Si dans le triangle ABC, I milieu de $[AB]$, $(IJ) \mathbin{/\mkern-6mu/} (BC)$ et $J \in (AC)$ **alors** J milieu de $[AC]$





PREUVE A, I, B et A, J, C sont alignés dans le même ordre et (IJ) est parallèle à (BC), donc d'après le théorème de Thalès, $\dfrac{AI}{AB} = \dfrac{AJ}{AC}$.

Or, I est le milieu de $[AB]$, d'où $\dfrac{AI}{AB} = \dfrac{1}{2}$, donc $\dfrac{AJ}{AC} = \dfrac{1}{2}$ ce qui implique que $AJ = \dfrac{1}{2}AC$.

2. Réciproque du théorème de Thalès

A. Configuration de Thalès, sens réciproque

PROPRIÉTÉ : Réciproque du théorème de Thalès

Si les points A, M et B d'une part, et les points A, N et C d'autre part, sont alignés dans le même ordre, et si les rapports $\dfrac{AM}{AB}$ et $\dfrac{AN}{AC}$ sont égaux, alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

MÉTHODE 2 Démontrer que deux droites sont parallèles

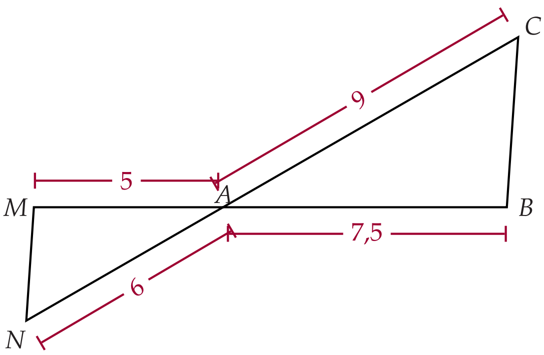
On utilise le théorème de Thalès en respectant la rédaction :

- citer les points alignés dans un ordre précis ;
- calculer deux rapports de longueur ;

s'il y a égalité	**s'il n'y a pas égalité**
• écrire l'égalité ;	• écrire l'inégalité ;
• citer la propriété utilisée : « d'après la réciproque du théorème de Thalès ... » ;	• citer la propriété utilisée : « d'après la contraposée au théorème de Thalès... » ;
• conclure : « les droites ... et ... sont parallèles »	• conclure : « les droites ... et ... ne sont pas parallèles »

Exercice d'application $A \in [NC]$ et $A \in [MB]$.
$AM = 5$, $AN = 6$, $AB = 7{,}5$ et $AC = 9$.
Les droites (MN) et (BC) sont-elles parallèles ?

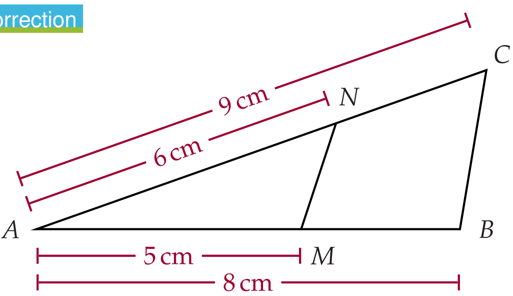
Correction



Les points M, A , B d'une part, et les points N, A, C d'autre part, sont alignés dans le même ordre.
On calcule $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{5}{7{,}5} = \dfrac{2}{3}$ d'une part,
et $\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$ d'autre part.
On constate que $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$;
d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Exercice d'application $M \in [AB]$, $N \in [AC]$,
$AM = 5\,\text{cm}$, $AN = 6\,\text{cm}$, $AB = 8\,\text{cm}$, $AC = 9\,\text{cm}$.
Les droites (MN) et (BC) sont-elles parallèles ?

Correction



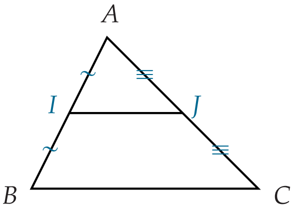
Les points A, N, C et A, M, B sont alignés dans le même ordre.
On calcule $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{5}{8}$ d'une part,
et $\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$ d'autre part.
On constate que $\dfrac{AM}{AB} \neq \dfrac{AN}{AC}$;
or, si les droites (MN) et (BC) étaient parallèles, le théorème de Thalès nous dirait que cette égalité est vraie. Comme ce n'est pas le cas, on peut en conclure que les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles.

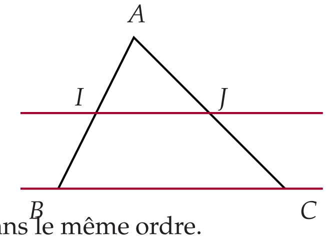
B. Un cas particulier : le théorème de la droite des milieux.

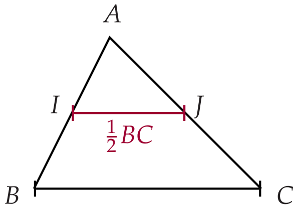
PROPRIÉTÉ : Théorème de la droite des milieux

Dans un triangle, la droite qui joint les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté et la longueur du segment qui joint les milieux de ces deux côtés est égale à la moitié de la longueur du troisième côté.

Si	dans le triangle ABC, I milieu de $[AB]$ et J milieu de $[AC]$.	**alors**	$(IJ) \mathbin{//} (BC)$	**et**	$IJ = \dfrac{1}{2}BC$







PREUVE A, I, B et A, J, C sont alignés dans le même ordre.

I est le milieu de $[AB]$ et J est le milieu de $[AC]$, d'où $\dfrac{AI}{AB} = \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{AJ}{AC} = \dfrac{1}{2}$.

$\dfrac{AI}{AB} = \dfrac{AJ}{AC}$, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (IJ) et (BC) sont parallèles.

De plus, $\dfrac{AI}{AB} = \dfrac{AJ}{AC} = \dfrac{IJ}{BC}$ ce qui implique que $\dfrac{IJ}{BC} = \dfrac{1}{2}$, soit $IJ = \dfrac{1}{2}BC$.

3. Les transformations

A. Isométries et homothéties

DÉFINITION : Isométrie, homothétie

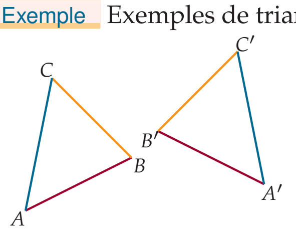
Une **isométrie** est une transformation qui conserve les longueurs.

Une **homothétie** est une transformation qui réduit ou qui agrandit une figure .

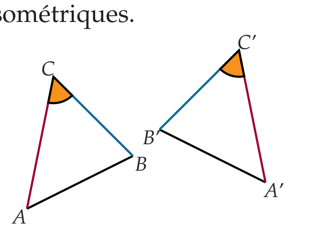
PROPRIÉTÉ

- Deux triangles sont **isométriques** (ou égaux) s'il sont superposables et deux triangles sont **semblables** si leurs côtés sont proportionnels, ou s'ils ont les mêmes angles.
- Une isométrie **conserve** les longueurs, le parallélisme, l'orthogonalité, les angles, les formes et les figures.
- Dans la configuration de Thalès, l'un des triangles est image de l'autre par une **homothétie** dont le centre est le sommet commun et le rapport est donné par le rapport de Thalès.
- Une **homothétie** de rapport k multiplie les aires par k^2 et les volumes par k^3.

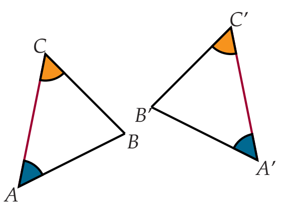
Exemple Exemples de triangles isométriques.



trois côtés de même longueur



un angle égal compris entre deux côtés de même longueur

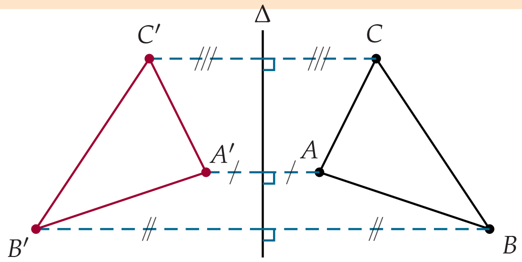


un côté de même longueur adjacent à deux angles égaux

B. Les symétries

DÉFINITION : Symétrie axiale

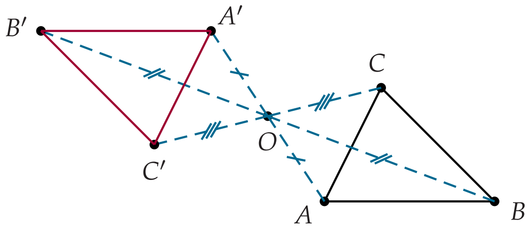
M' est l'image du point M par la **symétrie d'axe** Δ signifie que la droite Δ est la médiatrice du segment $[MM']$. C'est une isométrie.



On dit que les figures sont symétriques par rapport à la droite Δ.

DÉFINITION : Symétrie centrale

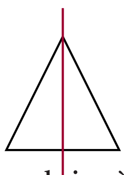
M' est l'image du point M par la **symétrie de centre** O signifie que O est le milieu de $[MM']$. C'est une isométrie.



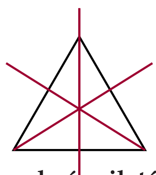
DÉFINITION : Axe, centre de symétrie

Si une figure $\mathcal{F}$ est « transformée » en elle-même par la symétrie axiale d'axe (d), alors la droite (d) est un **axe de symétrie** de la figure $\mathcal{F}$.
Si une figure $\mathcal{F}$ est « transformée » en elle-même par la symétrie centrale de centre O, alors O est le **centre de symétrie** de la figure $\mathcal{F}$.

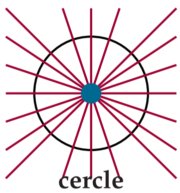
Exemple Une figure peut avoir plusieurs axes de symétrie mais si elle possède un centre de symétrie il est unique.



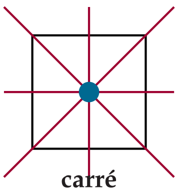
triangle isocèle
1 axe de symétrie
0 centre de symétrie



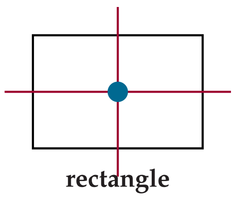
triangle équilatéral
3 axes de symétrie
0 centre de symétrie



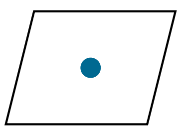
cercle
∞ axes de symétrie
1 centre de symétrie



carré
4 axes de symétrie
1 centre de symétrie



rectangle
2 axes de symétrie
1 centre de symétrie

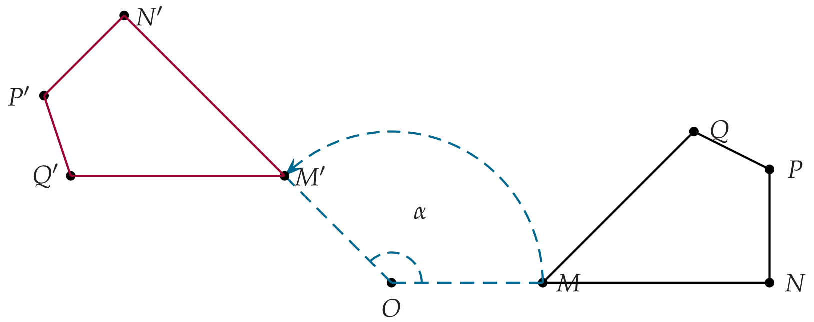


parallélogramme
0 axe de symétrie
1 centre de symétrie

C. Les rotations

DÉFINITION : Rotation

M' est l'image du point M par la **rotation de centre** O **et d'angle** α signifie que $OM = OM'$ et que $\widehat{MOM'} = \alpha$. C'est une isométrie.



REMARQUE : on appelle sens direct le sens inverse des aiguilles d'une montre et sens indirect le sens horaire.

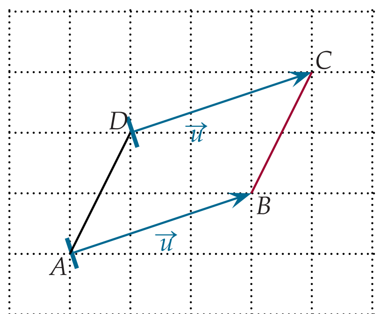
D. Les translations

DÉFINITION : Translation

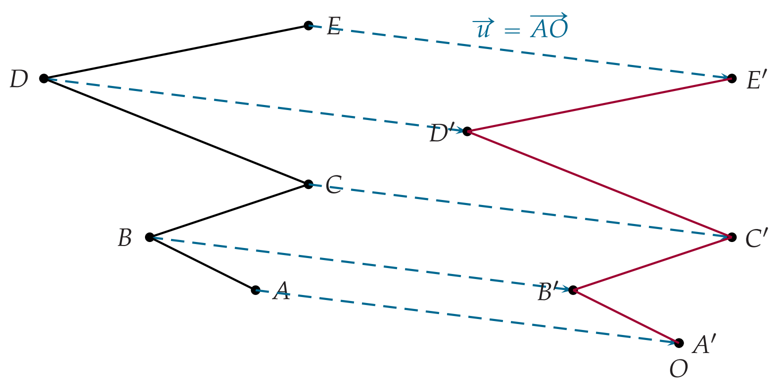
Un point C est l'image d'un point D par la **translation** qui transforme A en B lorsque le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme. On dit alors que C est l'image du point D par la translation de **vecteur** $\overrightarrow{AB}$. C'est une isométrie correspondant à un déplacement.

REMARQUE : pour la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ transformant D en C, on a :

- (AB) et (DC) sont parallèles (même direction);
- AB et DC sont de même longueur;
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ vont dans le même sens.

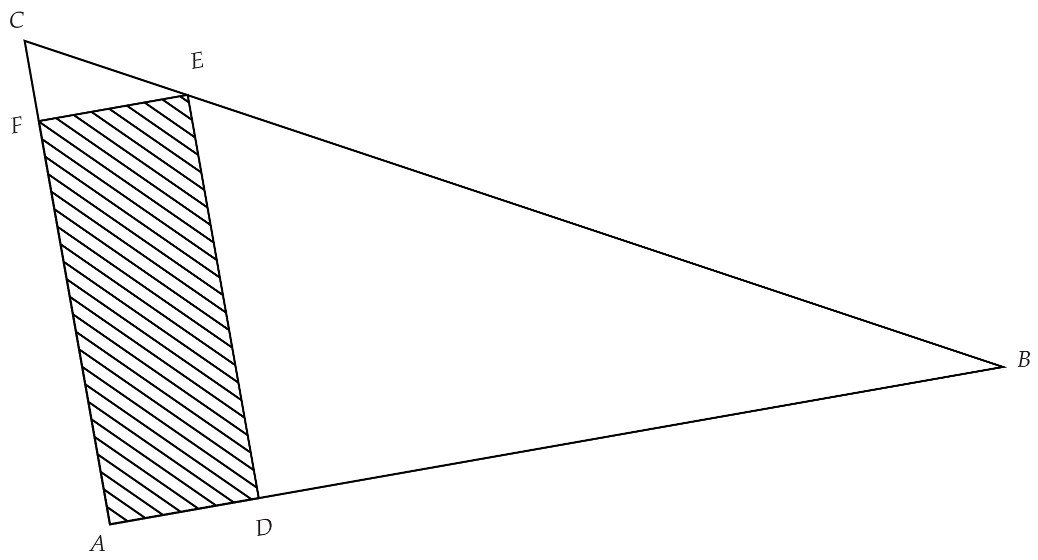


Les vecteurs sont souvent notés $\vec{u}$, $\vec{v}$…



Groupement 3 - Exercice 3 - Question 2 : Thalès et aire

Une enseignante a le projet d'installer un potager rectangulaire $ADEF$ sur une parcelle de forme triangulaire ABC dans l'enceinte de l'école.
Les points A, B, C, D, E et F sont tels que :
- $AB = 24\,\text{m}$, $AC = 10\,\text{m}$ et $BC = 26\,\text{m}$;
- $D \in [AB]$, $E \in [BC]$ et $F \in [AC]$.



La figure ci-dessus n'est pas à l'échelle.

On souhaite déterminer où positionner le point D sur $[AB]$ pour que l'aire du rectangle hachuré $ADEF$ soit la plus grande possible.
Dans cette partie on considère que $AD = 4,8$ m.
1) Montrer que la longueur DE est égale 8 m.
2) En déduire l'aire du rectangle $ADEF$ en m^2.

Exemple de corrigé.

1) $ADEF$ est un rectangle, les côtés (AF) et (DE) sont donc parallèles.
De plus, les points B, D, A et B, E, C sont alignés dans cet ordre.

D'après le théorème de Thalès : $\dfrac{BD}{BA} = \dfrac{BE}{BC} = \dfrac{DE}{AC} \iff \dfrac{24\,\text{m} - 4,8\,\text{m}}{24\,\text{m}} = \dfrac{BE}{26\,\text{m}} = \dfrac{DE}{10\,\text{m}}$

$$\implies \frac{19,2\,\text{m}}{24\,\text{m}} = \frac{DE}{10\,\text{m}}$$

$$\implies DE = \frac{19,2\,\text{m} \times 10\,\text{m}}{24\,\text{m}} = 8\,\text{m}.$$

La longueur DE est égale à 8 m.

2) $\mathcal{A}_{ADEF} = AD \times DE = 4,8\,\text{m} \times 8\,\text{m} = 38,4\,\text{m}^2$.
L'aire du triangle $ADEF$ est égale à $38,4\,\text{m}^2$.

Remarque : la question 3. suivante reprend cette question dans laquelle la longueur AD est égale à x. Elle a été traitée dans le chapitre N3 « Calcul littéral ».

Maîtriser les bases avec MathenPoche

Classe	N°	Thème	Dans le cours
6e	E5	Symétrie axiale	3.
5e	D2	Transformation et parallélogramme	3.
4e	D2	Transformation et parallélogramme	3.
	D4	Triangles et proportionnalité	1. et 2.
3e	D2	transformations	3.
	D4	Triangles et proportionnalité	1. et 2.

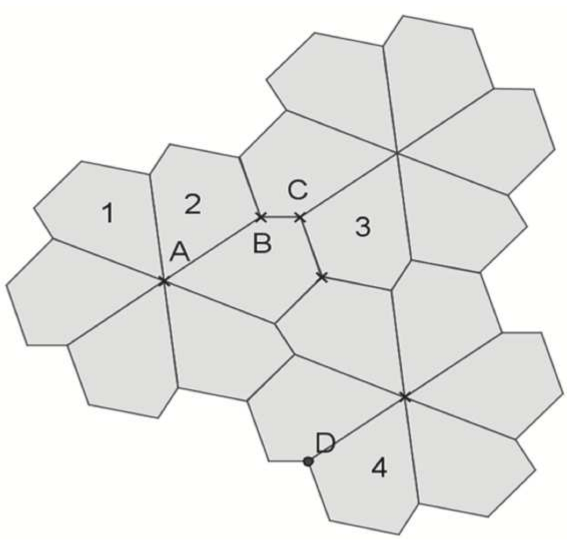
1 DNB 2002 et CRPE 2020 G3

Les deux parties suivantes sont indépendants.

Partie 1.

Ce pavage est composé de 18 pentagones tous superposables.

Quatre d'entre eux ont été numérotés.



Indiquer quelle transformation (translation, rotation, symétrie) permet de passer :

1) du pentagone 1 au pentagone 2 ;
2) du pentagone 2 au pentagone 3 ;
3) du pentagone 3 au pentagone 4.

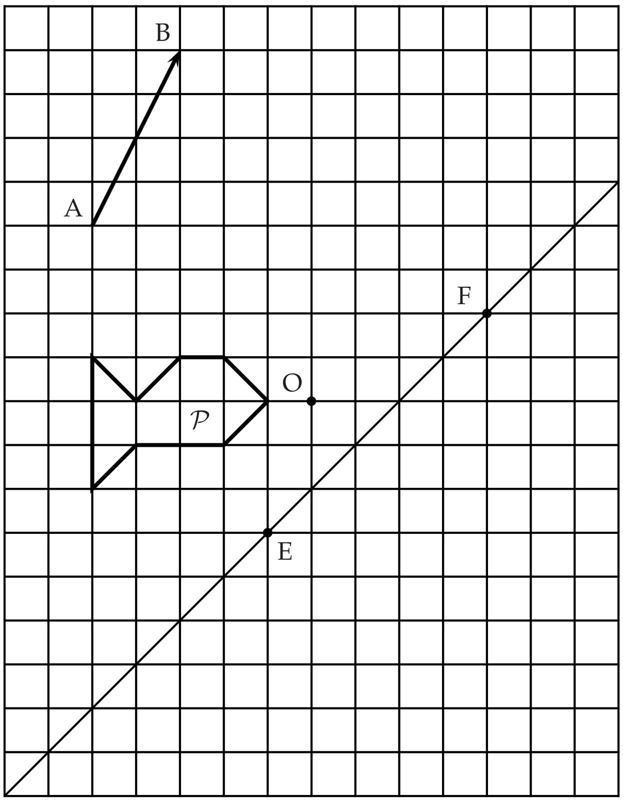
Préciser dans chaque cas les éléments qui définissent la transformation choisie.

Aucune justification n'est attendue.

Partie 2.

Sur le quadrillage ci-dessous :

1) tracer le symétrique $\mathcal{P}_1$ de la figure $\mathcal{P}$ par rapport au point O ;
2) tracer le symétrique $\mathcal{P}_2$ de la figure $\mathcal{P}$ par rapport à la droite (EF) ;
3) tracer l'image $\mathcal{P}_3$ de la figure $\mathcal{P}$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$;
4) tracer l'image $\mathcal{P}_4$ de la figure $\mathcal{P}$ dans la rotation de centre E, d'angle 90° dans le sens direct.

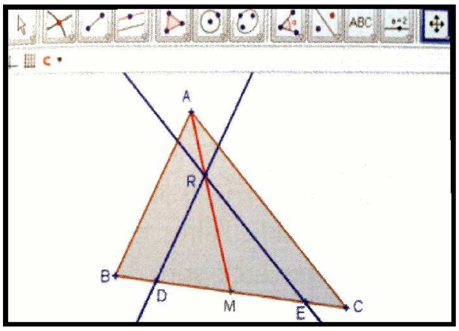


Entraînement

2 Une conjecture à démontrer

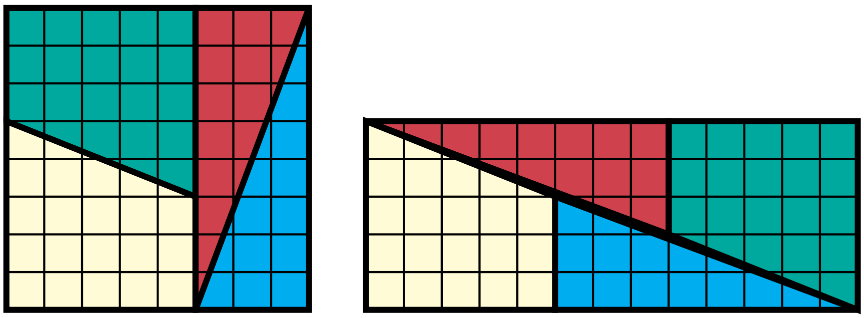
ABC est un triangle et M est le milieu du côté $[BC]$. R est un point qui décrit la médiane $[AM]$. Par R, on trace les parallèles à (AB) et à (AC) ; elles coupent le segment $[BC]$ en D et E.

1) Faire une figure avec un logiciel de géométrie dynamique et afficher les longueurs MD et ME.
2) Déplacer le point R. Que peut-on conjecturer pour MD et ME ?
3) Démontrer cette conjecture.



3 Puzzle de Lewis Carroll

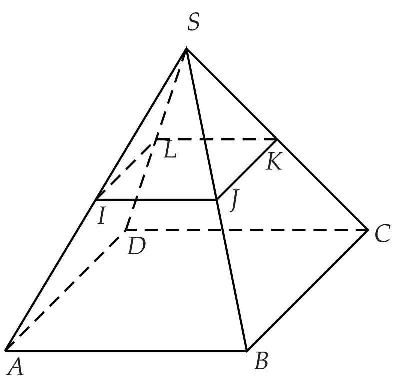
On considère le carré de 8 carreaux de côté ci-dessous. En utilisant les triangles rectangles et les trapèzes rectangles constituant le carré comme des pièces de puzzle, on transforme ce carré en un rectangle de 5 carreaux sur 13 carreaux. Quel est le paradoxe considéré ici ? Démontez ce paradoxe.



4 Aire et volume

On considère la pyramide de sommet S et de base $ABCD$ représentée ci-dessous. Les points I, J, K et L sont respectivement les milieux des arêtes $[SA]$, $[SB]$, $[SC]$ et $[SD]$.

Parmi les affirmations suivantes, indiquer celle(s) qui est (sont) exacte(s) en justifiant.

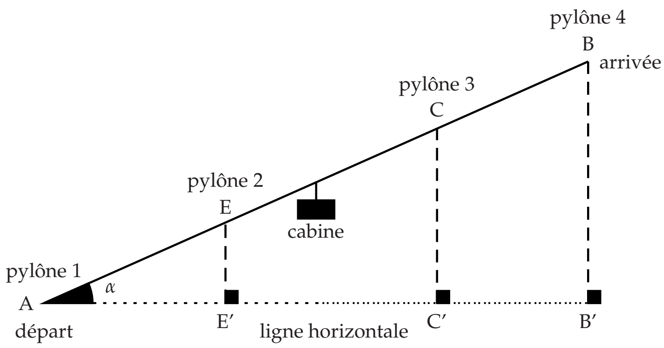


1) L'aire du quadrilatère $ABCD$ est égale à quatre fois l'aire du quadrilatère $IJKL$.
2) L'aire du quadrilatère $IJBA$ est égale à deux tiers de l'aire du triangle SAB.
3) Le volume de la pyramide $SABCD$ est égal à trois fois celui de la pyramide $SIJKL$.
4) Le volume de la pyramide $SABCD$ est égal aux huit septièmes du volume du solide $ABCDIJKL$.

5 **CRPE 2005 Créteil**

Une station de sports d'hiver est équipée d'un téléphérique pour permettre aux skieurs d'atteindre un plateau en altitude. Des pylônes sont placés en A, E, C et B pour soutenir le câble que l'on considérera rectiligne. Le câble mesure 2,48 km. L'altitude au point A est 2 100 m, l'altitude au point B est 2 620 m.

1) On définit la pente comme étant le rapport entre la hauteur du dénivelé (BB′ sur le dessin) et la distance parcourue à l'horizontale (AB′ sur le dessin). Calculer la pente de ce câble et l'exprimer en pourcentage.
2) Entre B et C, le câble mesure 480 m.
   a) Démontrer que CC′ = 419 m à 1 m près.
   b) Calculer l'altitude au point C, arrondie à 1 m près.
3) a) E est le milieu du segment [AC]. Calculer EC.
   b) Entre E et C, la cabine progresse à la vitesse constante de 5 m/s. En combien de temps la cabine parcourt-elle la distance EC ? Vous donnerez le résultat en minutes et secondes.

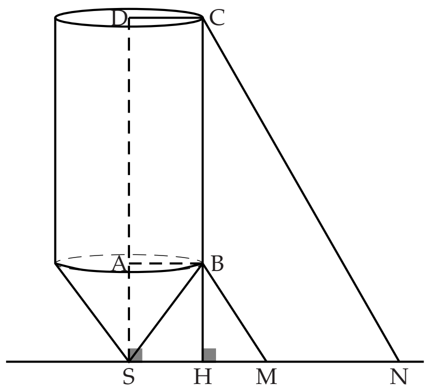


Remarque : sur ce schéma, les mesures des longueurs et de l'angle ne sont pas respectées.

6 **CRPE 2018 G1**

Un éleveur possède un silo à farine formé de deux solides de révolution : un cône et un cylindre, comme représenté sur la figure ci-contre.
Ces deux solides ont le même axe de révolution. Les centres D et A des bases sont alignés avec le sommet S du cône.
On donne : AS = 1,60 m ; DA = 2,40 m ; AB = 1,30 m.

Cette figure n'est pas à l'échelle.



1) Quel est le volume en mètre cube du silo à farine ? Arrondir au centième.
2) Le silo est rempli de farine d'orge au $\frac{6}{7}$ de son volume total. Une vache mange en moyenne 3 L de farine par jour. L'éleveur possède 48 vaches. Aura-t-il assez de farine pour nourrir ses 48 vaches durant 90 jours ?
3) Pour réaliser des travaux, deux échelles ont été posées contre le silo. Elles sont représentées sur la figure par des segments [BM] et [CN].
   On donne SM = 2,0 m et SN = 3,3 m. On note H le pied de la hauteur issue de B dans le triangle SBM. Les points S, H, M et N sont alignés. Les points C, B et H sont alignés.
   Les deux échelles sont-elles parallèles ? Justifier la réponse.

Entraînement

7 **CRPE 2015 G1**

Dans cet exercice, on prendra 1 *cm comme unité de longueur.*

On considère un trapèze $ABFE$ rectangle en A et B, c'est-à-dire tel que les droites (AE) et (BF) sont perpendiculaires à la droite (AB), et tel que $AB = 14$; $AE = 3$; $BF = 9$.
Le point M est un point variable sur le segment $[AB]$.
Le but de cet exercice est de déterminer la position de M pour laquelle la valeur de $EM + MF$ est minimale.

1) Construire le trapèze $ABFE$ et le point G, symétrique du point F par rapport à la droite (AB).

2) On appelle P l'intersection des droites (AB) et (EG).
Montrer que pour tout point M de $[AB]$, on a : $EM + MG \geqslant EP + PG$.
En déduire que la valeur $EM + MF$ est minimale lorsque M est placé en P.

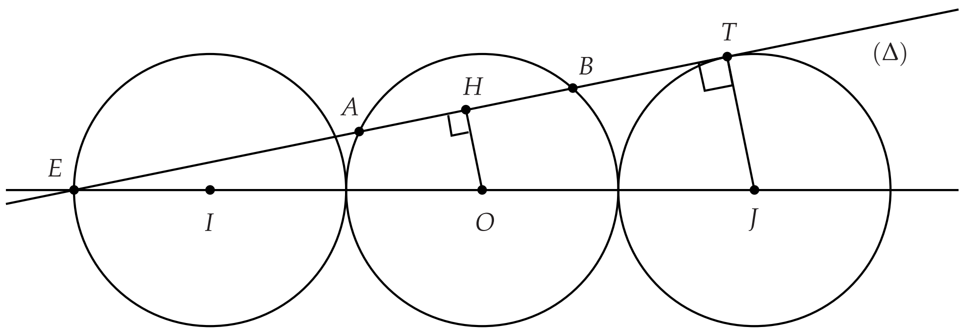
3) Montrer que $\dfrac{AP}{14 - AP} = \dfrac{3}{9}$ puis calculer AP.

4) Calculer la valeur minimale de $EM + MF$. En donner la valeur exacte en cm, et arrondie au dixième.

8 **CRPE 2008 Paris**

On considère trois cercles $(C_1), (C_2)$ et (C_3) de même rayon, noté r, et de centres respectifs I, O et J. Dans tout l'exercice, le rayon r est un nombre entier non nul. Nous savons que :

- les trois points I, O et J sont alignés et dans cet ordre ;
- le cercle (C_1) est tangent au cercle (C_2), le cercle (C_2) est tangent au cercle (C_3) ;
- le point E est à l'intersection de la droite (OI) et du cercle (C_1), et n'appartient pas au cercle (C_2) ;
- la droite (Δ) est tangente au cercle (C_3) en T et passe par E ; elle coupe le cercle (C_2) en A et en B ;
- H est le point de (Δ) tel que (OH) et (Δ) sont perpendiculaires.



On pose $OH = a$

1) En utilisant le théorème de Thalès, démontrer que : $a = \dfrac{3}{5}r$.

2) Expliquer pourquoi le nombre a est toujours un nombre rationnel.

3) a est-il toujours un nombre décimal ? Justifier la réponse.

4) Quels sont les nombres r pour lesquels a est un nombre entier ?

5) Le nombre a peut-il être un nombre premier ?

6) Calculer HB en fonction de r.

On pose $AB = b$

7) Démontrer que H est le milieu de $[AB]$ et en déduire que $b = \dfrac{8}{5}r$.

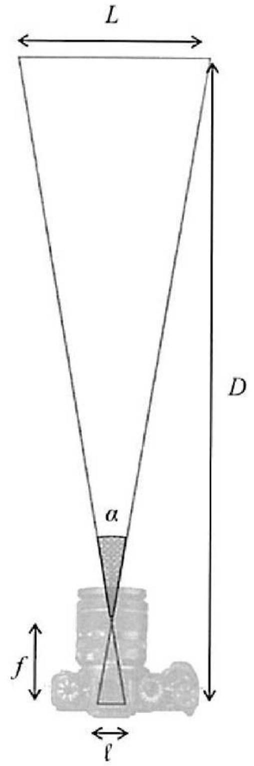
8) Existe-t-il des nombres r pour lesquels le nombre b est un nombre premier ? Justifier.

9 CRPE 2016 G2

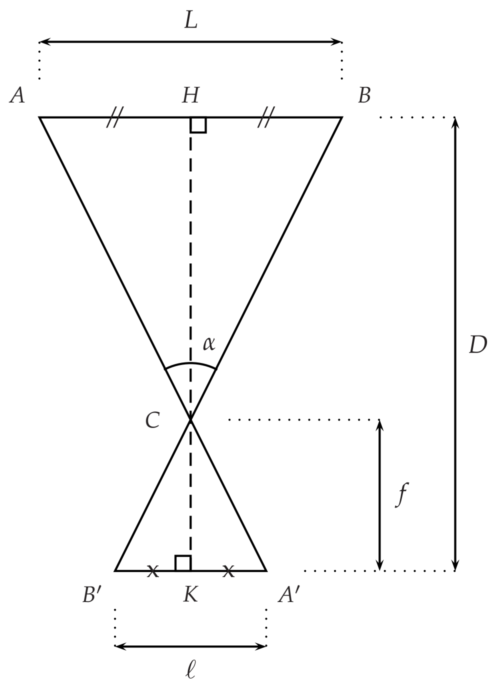
Cet exercice porte sur l'utilisation d'un appareil photo numérique et étudie son fonctionnement.

L'appareil photo : notations et vocabulaire.

- L est la largeur de la scène photographiée ;
- α est l'angle de champ (angle sous lequel la scène est vue) ;
- ℓ est la largeur du capteur numérique situé à l'arrière de l'appareil photo ;
- D est la distance entre la scène photographiée et le capteur numérique ;
- f, qui sera appelée focale de l'objectif, est la distance entre le capteur et le centre optique de l'objectif. C'est une caractéristique essentielle d'un objectif. Elle s'exprime généralement en millimètre (mm).



On schématise la situation par la figure ci-dessous dans laquelle les droites (AA'), (BB') et (HK) sont concourantes en C.



1) À l'aide des informations portées sur la figure :

a) Justifier que les droites (AH) et $(A'K)$ sont parallèles.

b) Démontrer que la droite (HK) est un axe de symétrie de la figure.

2) Justifier l'égalité : $\dfrac{CH}{CK} = \dfrac{AH}{A'K}$.

3) En déduire la relation : $\dfrac{D}{f} = \dfrac{L}{\ell} + 1$.

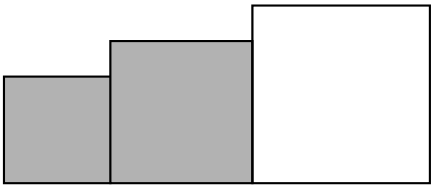
4) On considère que le capteur de l'appareil a pour largeur $\ell = 36$ mm et que le photographe est placé à $D = 12$ m de la scène du théâtre au centre de la salle.

a) Déterminer la largeur de la scène photographiée L qui correspond à une focale de 35 mm.

b) La scène du théâtre mesure 15 m de large. Quelles focales, en millimètre, le photographe peut-il utiliser pour que la largeur de la scène photographiée soit au moins aussi grande que la largeur de la scène du théâtre ?

10 **CRPE 2019 G1**

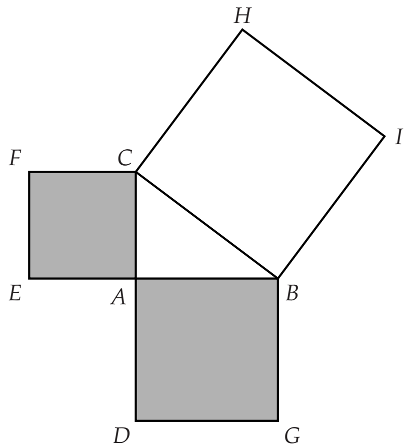
La figure ci-dessous – qui n'est pas nécessairement à l'échelle – représente trois carrés dont les mesures des côtés, en centimètre, sont respectivement 3 cm, 4 cm et 5 cm. Les deux plus petits carrés sont gris, le troisième est blanc.



1) Vérifier que la somme des aires des deux carrés gris est égale à l'aire du carré blanc.

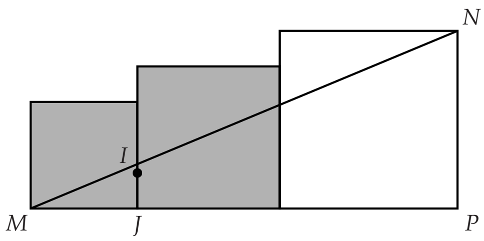
2) Claude affirme : « Si on dispose les trois carrés obtenus à la question précédente comme sur la figure 1 ci-dessous, alors le triangle ABC est un triangle rectangle. ».
L'affirmation de Claude est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse.

Figure 1



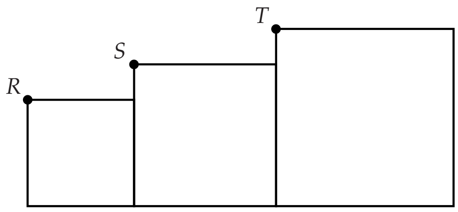
3) Avec les mêmes carrés, Dominique affirme : « Sur la figure 2 ci-dessous, les longueurs exactes, en centimètre, des segments $[MN]$ et $[IJ]$ sont des nombres décimaux ».
L'affirmation de Dominique est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse.

Figure 2



4) Avec les mêmes carrés, Camille affirme : « Sur la figure 3 ci-dessous, les points R, S et T sont alignés. ».
L'affirmation de Camille est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse.

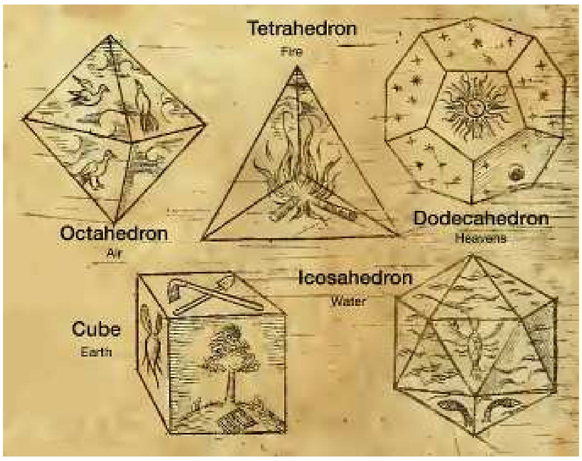
Figure 3



GÉOMÉTRIE

12

Géométrie dans l'espace



Les solides de Platon, Harmonices Mundi, 1619 - Johannes Kepler

Un peu d'histoire

Les solides de l'espace figurent dans les livres 11 à 13 des *éléments* d'**Euclide**.

Parmi les solides de l'espace, il en est une sorte qui a été étudiée (entre autre) par le philosophe grec **Platon** (-425 ; -348 av. J.-C.) : les polyèdres réguliers et convexes. Dans le *Timée*, l'un des derniers dialogues de Platon, ce dernier décrit la genèse du monde physique et de l'homme. Il associe chacun des quatre éléments physiques avec un solide régulier :

- la Terre est associée avec le *cube* : ces petits solides font de la poussière lorsqu'ils sont émiettés et se cassent lorsqu'on s'en saisit ;
- l'air avec l'*octaèdre* : ses composants minuscules sont si doux qu'on peut à peine les sentir ;
- l'Eau avec l'*icosaèdre* : elle s'échappe de la main lorsqu'on la saisit comme si elle était constituée de petites boules minuscules ;
- le feu avec le *tétraèdre* : la chaleur du feu est pointue.

Pour le cinquième solide, le *dodécaèdre*, Platon le met en correspondance avec le tout, parce que c'est le solide qui ressemble le plus à la sphère.

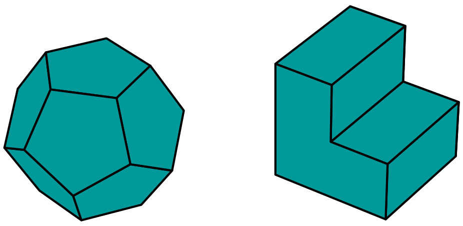
Cours

1. Classification des solides

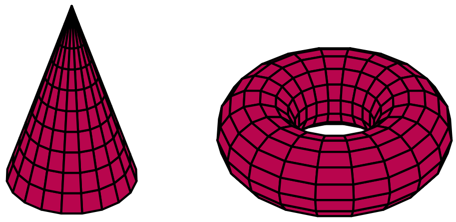
A. Les polyèdres

■ DÉFINITION : **Polyèdre**

Un **polyèdre** (de poly- plusieurs et -èdre face) est un solide de l'espace délimité par un nombre fini de polygones, appelés **faces** du polyèdre. L'intersection de deux plans forment une **arête** et ses extrémités sont appelés **sommets** du polyèdre.



polyèdres

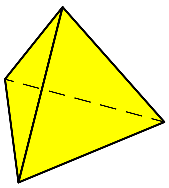


non polyèdres

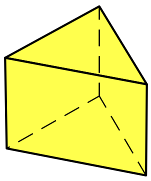
Le nom des polyèdres est formé d'un préfixe qualifiant le nombre de faces suivi du siffixe -èdre. Par exemple :

4	5	6	7	8	10	12	20
tétraèdre	pentaèdre	hexaèdre	heptaèdre	octaèdre	décaèdre	dodécaèdre	icosaèdre

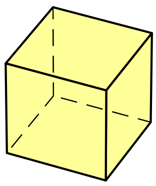
17	23	486	1 000 000
heptadécaèdre	triaicosaèdre	hexaoctacontétrahectaèdre	mégaèdre



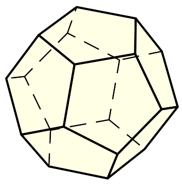
4 faces



5 faces



6 faces

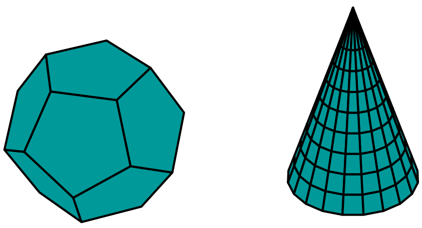


12 faces

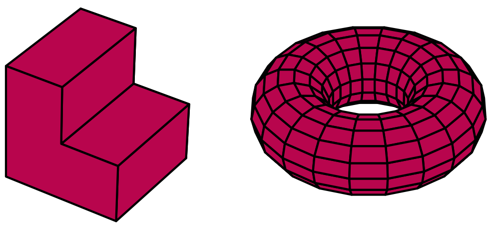
B. Convexité

■ DÉFINITION : **Convexité**

Un solide est **convexe** si, lorsque l'on prend deux points quelconques du solide, le segment tout entier joignant ces deux points reste à l'intérieur du solide.



solides convexes



solides non convexes

2. Représentations des solides

A. Perspective cavalière

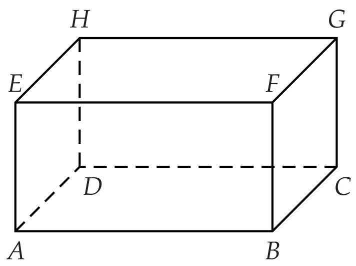
Pour représenter un solide de l'espace, on peut utiliser la **perspective cavalière** : technique de dessin permettant de représenter un solide sur une surface à deux dimensions dans lequel le parallélisme et les proportions sur les arêtes sont respectés, et où les angles ne sont respectés que dans les face de devant et du fond.

MÉTHODE 1 Représenter un solide en perspective cavalière

Pour représenter un solide en perspective cavalière :

1) on trace en vraie grandeur la face de devant ;
2) on trace les arêtes visibles des faces latérales parallèles et de même longueur : ce sont les fuyantes, plus courtes que leur mesure réelle ;
3) on trace les arêtes cachées en pointillés.

Exercice d'application



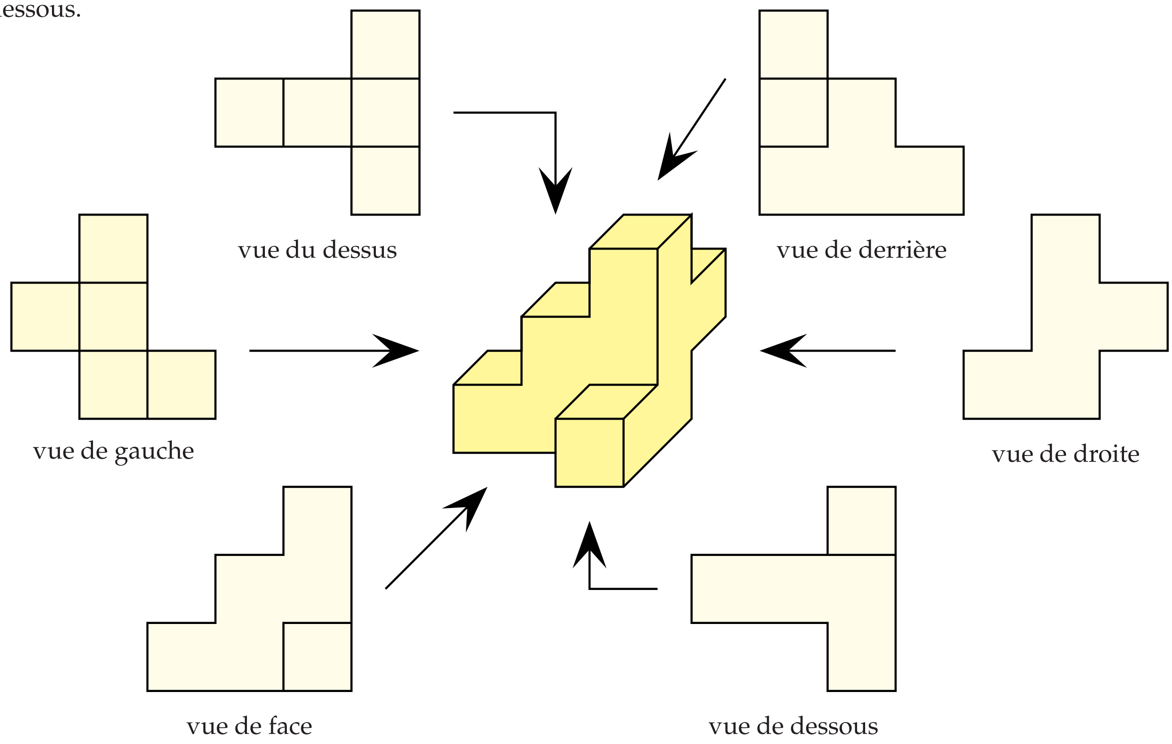
Correction

Ce parallélépipède rectangle possède :

- 8 **sommets** : A, B, C, D, E, F, G et H ;
- 12 **arêtes** : $[AB], [BC], [AE], [BF], [EF], [FG], [CG], [EH]$ et $[GH]$ apparentes, et $[AD], [DC]$ et $[DH]$ cachées ;
- 6 **faces** : $ABFE$ est la face de devant, $CDHG$ celle de derrière, $ABCD$ la face du dessous, $EFGH$ celle du dessus, $BCGF$ la face de droite, et $ADHE$ celle de gauche.

B. Différentes vues

On peut représenter un solide par ses différentes vues : de face, de derrière, de côté (droite et gauche) , de dessus, de dessous.



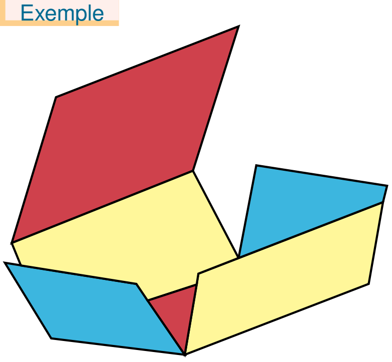
C. Patrons

DÉFINITION : Patron

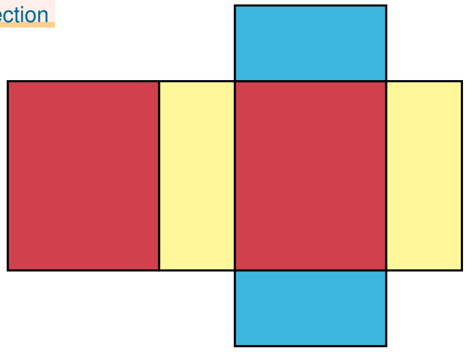
Le **patron** d'un solide est une surface plane d'un seul tenant qui, par pliage, permet de reconstituer le solide sans recouvrement de ses faces.

Un patron se dessine en dépliant mentalement le solide.

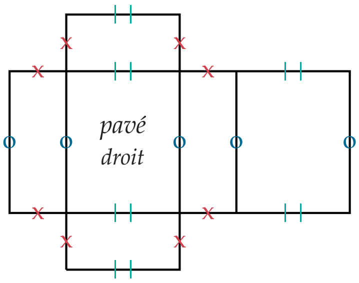
Exemple

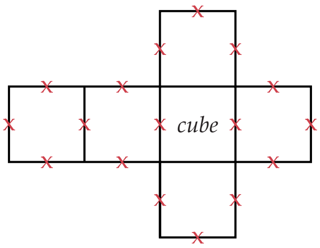


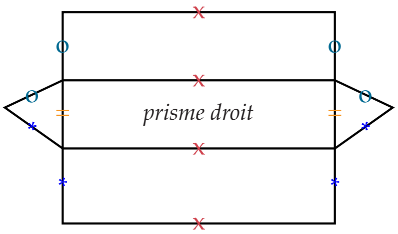
Correction

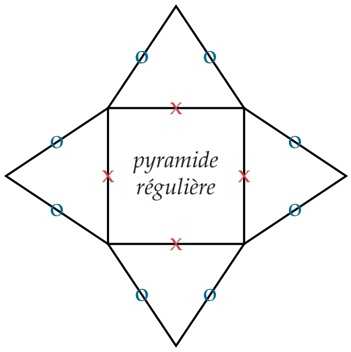


Le patron d'un polyèdre n'est pas unique, il dépend de la manière dont on le déplie. On sera vigilant à bien vérifier la cohérence des mesures pour que le patron se referme bien.

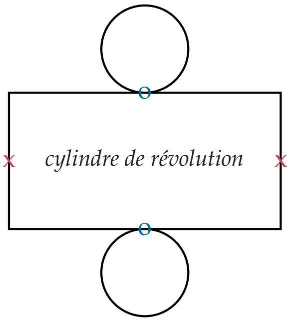


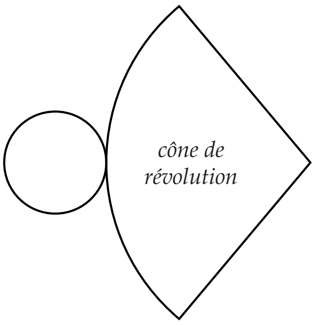






Pour les solide qui ne sont pas polyédriques, on parle de plutôt de développement.





D. Sections de solides

PROPRIÉTÉ : Section d'un pavé droit

- La section d'un pavé droit par un plan parallèle à une des faces est un rectangle de mêmes dimension que cette face.
- La section d'un pavé droit par un plan parallèle à une arête est un rectangle.

PROPRIÉTÉ : Section d'une sphère

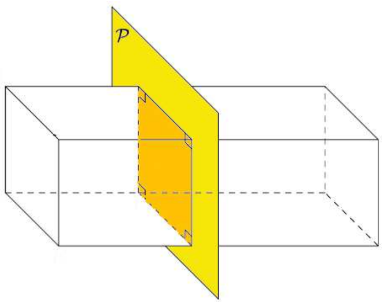
La section d'une sphère par un plan est un cercle.

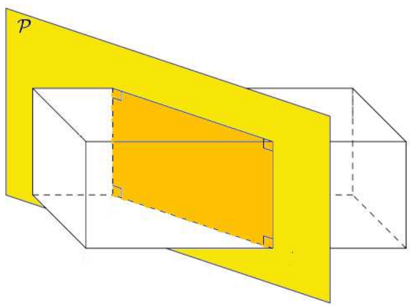
PROPRIÉTÉ : Section d'un cylindre

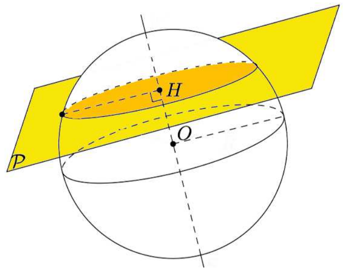
- La section d'un cylindre de révolution par est un plan parallèle à l'une de ses bases est un cercle de même rayon que la base.
- La section d'un cylindre de révolution par est un plan parallèle à l'axe de révolution est un rectangle.

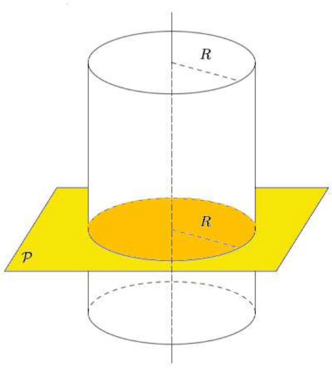
PROPRIÉTÉ : Section d'un cône ou d'une pyramide

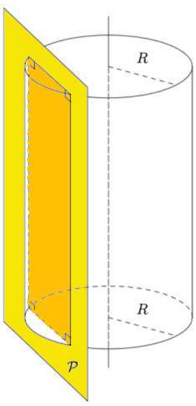
La section d'une pyramide ou d'un cône cylindre de révolution par est un plan parallèle à la base est une réduction de la base de la pyramide ou du cône.

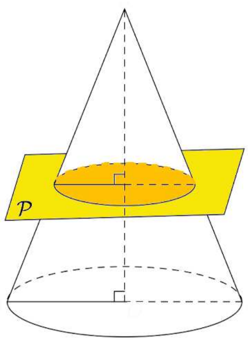


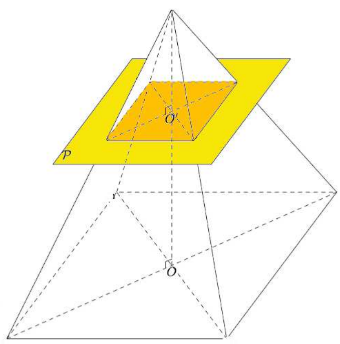






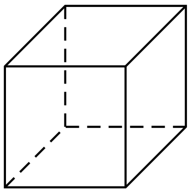
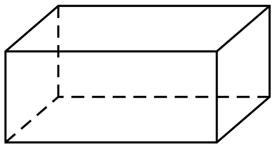
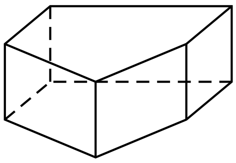
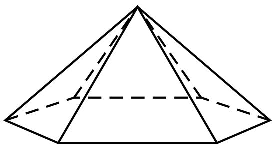
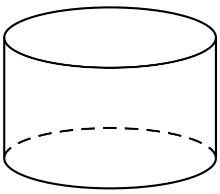
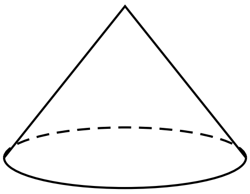
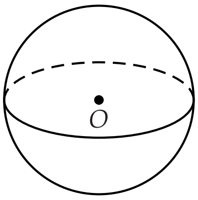






Cours

3. Solides usuels

nom	représentation	propriétés
cube		un cube est un polyèdre possédant 6 faces qui sont des carrés
pavé		un pavé, ou parallélépipède rectangle est un polyèdre possédant 6 faces qui sont des rectangles
prisme		un prisme est un polyèdre possédant deux faces polygonales parallèles et isométriques, les autres étant des rectangles
pyramide		une pyramide est un polyèdre dont la base est un polygone et dont toutes les autres faces sont des triangles ayant un sommet commun appelé sommet de la pyramide
cylindre		un cylindre (de révolution) est un solide à deux faces parallèles en forme de disque de même rayon et dont la surface latérale est engendrée par le déplacement d'une droite orthogonale au disque et suivant le contour de ce disque
cône		un cône (de révolution) est un solide à une face en forme de disque et dont la surface latérale est engendrée par le déplacement d'une droite qui décrit la circonférence du disque autour d'un point fixe appelé le sommet du cône
sphère		une sphère de centre O et de rayon r est l'ensemble des points M de l'espace tels que $OM = r$

4. Positions relatives de droites et de plans

On rappelle les propriétés suivantes :
– Par deux points distincts A et B de l'espace passe une seule droite, notée (AB).
– Par trois points non alignés A, B et C de l'espace passe un seul plan, noté (ABC).
– Si un plan contient deux points A et B, alors il contient toute la droite (AB).
– Dans tout plan de l'espace, tout résultat de géométrie plane s'applique.

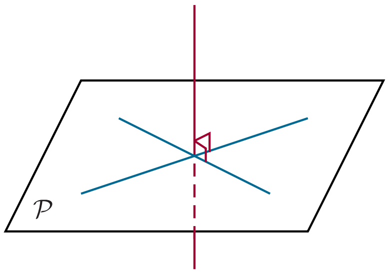
A. Orthogonalité

DÉFINITION : Droite(s) orthogonale(s)

- Deux droites de l'espace sont **orthogonales** si leurs parallèles menées par un point sont perpendiculaires.
- Une droite est **orthogonale** à un plan si elle est perpendiculaire à deux droites sécantes de ce plan.

PROPRIÉTÉ : Orthogonalité d'une droite par rapport à un plan

Si une droite est perpendiculaire à deux droites sécantes du plan, alors elle est orthogonale au plan (et donc à toute droite du plan).

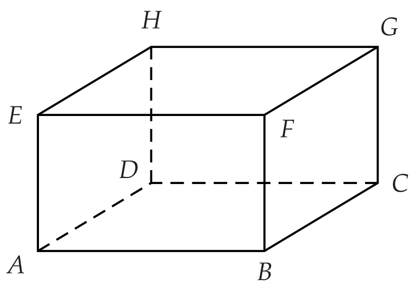


REMARQUES :

- Un plan est une surface plane illimitée. Il est entièrement déterminé par trois points non alignés. Cette surface est représentée en perspective par un parallélogramme.
- Dans l'espace, des droites orthogonales ne sont pas nécessairement coplanaires (situées dans un même plan) et n'ont donc pas nécessairement de point d'intersection.

Exemple

$ABCDEFGH$ est un pavé droit.



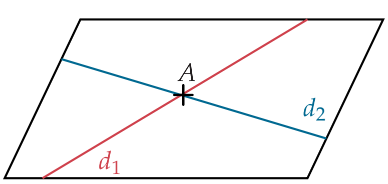
Correction

- La face $EFGH$ du dessus est contenue dans le plan (EHG), ou (EFG), ou (HEF)… il suffit de choisir trois points non alignés de la face.
- Les droites (EA) et (FG) sont orthogonales car (EA) est perpendiculaire à (EH), elle même parallèle à (FG).
- La droite (CB) est orthogonale au plan (ABF) puisque (CB) est perpendiculaire à (BA) et à (BF) qui sont deux droites sécantes du plan (ABF).

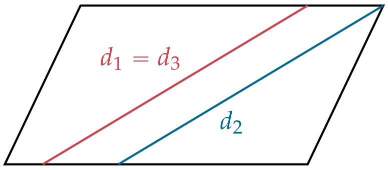
B. Positions relatives

Position relative de deux droites

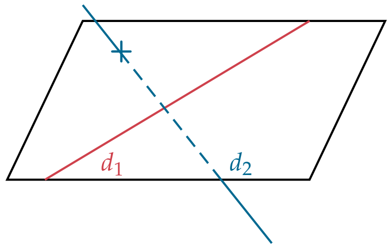
Droites coplanaires sécantes :
un point d'intersection



Droites coplanaires parallèles :
aucun ou une infinité de points d'intersection

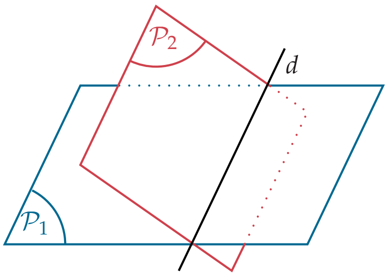


Droites non coplanaires :
aucun point d'intersection

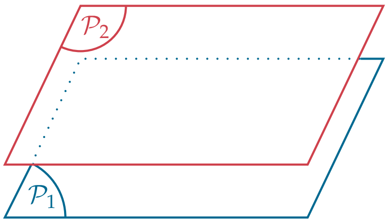


Position relative de deux plans

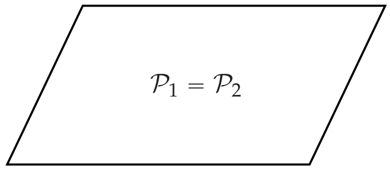
Plans sécants :
une droite d'intersection



Plans parallèles strictement :
aucun point d'intersection

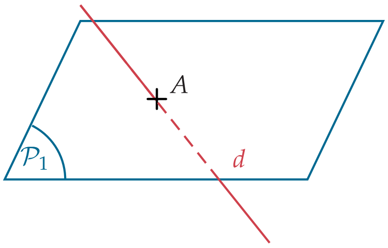


Plans parallèles confondus :
un plan d'intersection

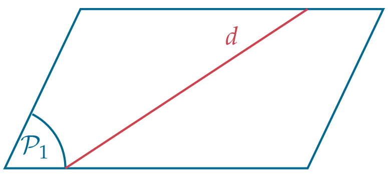


Position relative d'une droite et d'un plan

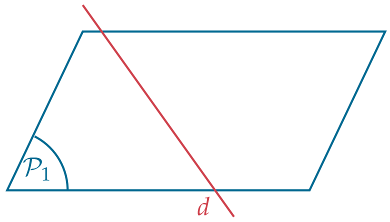
Droite et plan sécants :
un point d'intersection



Droite et plan parallèles :
droite incluse dans le plan

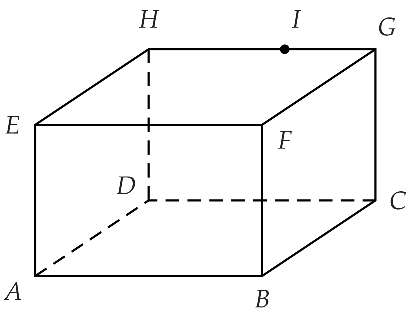


Droite et plan parallèles :
aucun point d'intersection



Exemple

$ABCDEFGH$ est un pavé droit.



Correction

- Les droites (IF) et (EG) sont coplanaires et sécantes, elles définissent le plan (HEF).
- Les droites (HF) et (DB) sont parallèles, elles définissent le plan (DBF).
- Les droites (HE) et (IC) sont non coplanaires.
- Les plans (IFB)et (AEF) sont sécants suivant la droite (FB).
- Les plans (DHC) et (FBA) sont parallèles.
- Les droites (HF) et (AC) sont dans des plans parallèles, mais elles ne sont pas parallèles.

5. Se représenter dans l'espace

A. Repérage sur un parallélépipède rectangle

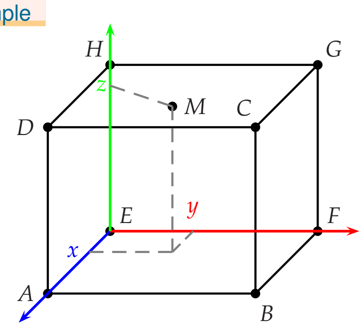
DÉFINITION : Repère dans un pavé

Dans un parallélépipède rectangle, un **repère** est formé par trois arêtes ayant un sommet commun appelé origine du repère.

PROPRIÉTÉ : Coordonnées

Tout point M d'un parallélépipède rectangle est repéré par trois nombres qui sont ses coordonnées : l'**abscisse** x, l'**ordonnée** y et l'**altitude** (ou la cote) z. On écrit $M(\,x\,;\,y\,;\,z\,)$.

Exemple



Correction

Dans ce pavé droit,

- E est l'origine du repère ;
- (EA) est l'axe des abscisses ;
- (EF) est l'axe des ordonnées ;
- (EH) est l'axe des altitudes.

Le point C a pour coordonnées $(\,1\,;\,1\,;\,1\,)$: on écrit $C\,(\,1\,;\,1\,;\,1\,)$.
Le point G a pour coordonnées $(\,0\,;\,1\,;\,1\,)$: on écrit $G\,(\,0\,;\,1\,;\,1\,)$.

B. Repérage sur une sphère

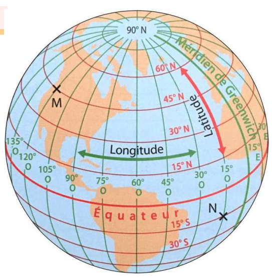
DÉFINITION : Parallèle et méridien

La section de la sphère par un plan perpendiculaire à l'axe Nord-Sud est un cercle appelé **parallèle**. Un demi-cercle de diamètre Nord-Sud est appelé **méridien**.

DÉFINITION : Latitude et longitude

- On assimile la Terre à une sphère et on repère un point M de la surface par deux coordonnées géographiques qui son sa **latitude** et sa **longitude** .
- Le parallèle origine est l'**équateur** et le méridien origine est le méridien de **Grennwich**.
- La **latitude** du point M est la mesure de l'angle ayant pour sommet le centre de la sphère, compris entre l'équateur et le parallèle sur lequel se trouve le point M.
- La **longitude** du point M est la mesure de l'angle ayant pour sommet le centre de la sphère, compris entre le méridien de Greenwich et le méridien sur lequel se trouve le point M.

Exemple



Correction

La latitude est comprise entre 0 ° et 90 °, Nord ou Sud.
La longitude est comprise entre 0 ° et 180 °, Est ou Ouest.

Le point M a pour longitude 120 ° Ouest et 45 ° Nord.
Montpellier a pour longitude X = 43,6 ° N et Y = 3,9 ° E.

Entraînement

Maîtriser les bases avec MathenPoche

Classe	N°	Thème	Dans le cours
6e	E7	Espace	1. à 3.
5e	D6	Espace	2. et 3.
4e	D5	Repérages	5.
	D6	Espace	1. à 3.
3e	D5	Repérage	5.
	D6	Espace	3.

1 Le chapeau de clown

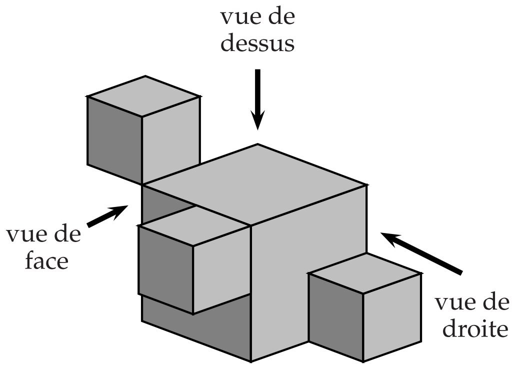
Pour le carnaval, Noé veut fabriquer un chapeau de clown conique pour sa poupée. Pour cela, il mesure son tour de tête : 21 cm. La génératrice du cône mesure 10 cm. Construire le développement du chapeau.

2 just for fun

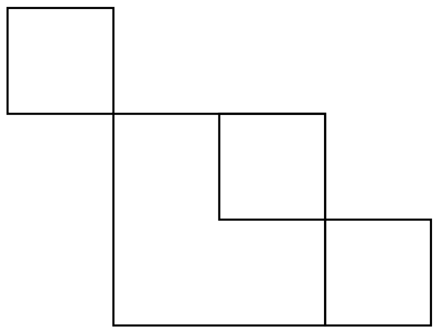
Combien y-a-t'il de patrons différents du cube (c'est à dire non superposables) ? Les tracer.

3 CRPE blanc 2018 Réunion

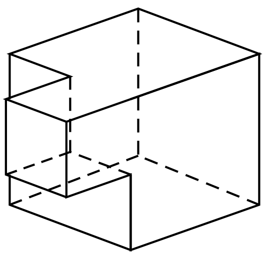
Les figures ci-dessous représentent un même solide constitué de l'assemblage de quatre cubes : trois cubes d'arête 2 cm et un cube d'arête 4 cm, vu en perspective et vu de face.



vue de face



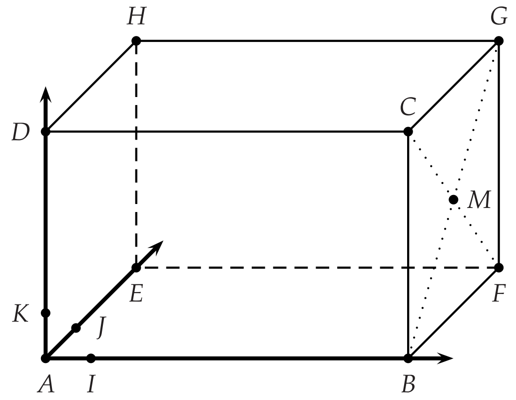
1) Dessiner la vue de droite et la vue de dessus de ce solide en vraie grandeur.
2) On supprime le petit cube le plus à gauche et celui le plus à droite en regardant de face.
   On note P le polyèdre restant.



a) Les faces d'un polyèdre sont les polygones qui le bordent.
   Combien le polyèdre P possède-t-il de faces ?
b) Dessiner un patron de P à l'échelle 1/2.

4 En repérage...

Dans le pavé droit suivant, on se place dans le repère orthonormé $(A; AI, AJ, AK)$ dont l'unité sur chaque axe est 1 cm. On sait que $AB = 8\,\text{cm}$, $AE = 3\,\text{cm}$ et $AD = 5\,\text{cm}$.



1) Indiquer les coordonnées des chacun des huit sommets du pavé droit.

2) Indiquer les coordonnées des chacun des douze milieux des arêtes du pavé droit.

3) M est le centre de la face $(BCGF)$. Indiquer les coordonnées de chacun des six centres des six faces du pavé droit.

5 La relation d'Euler

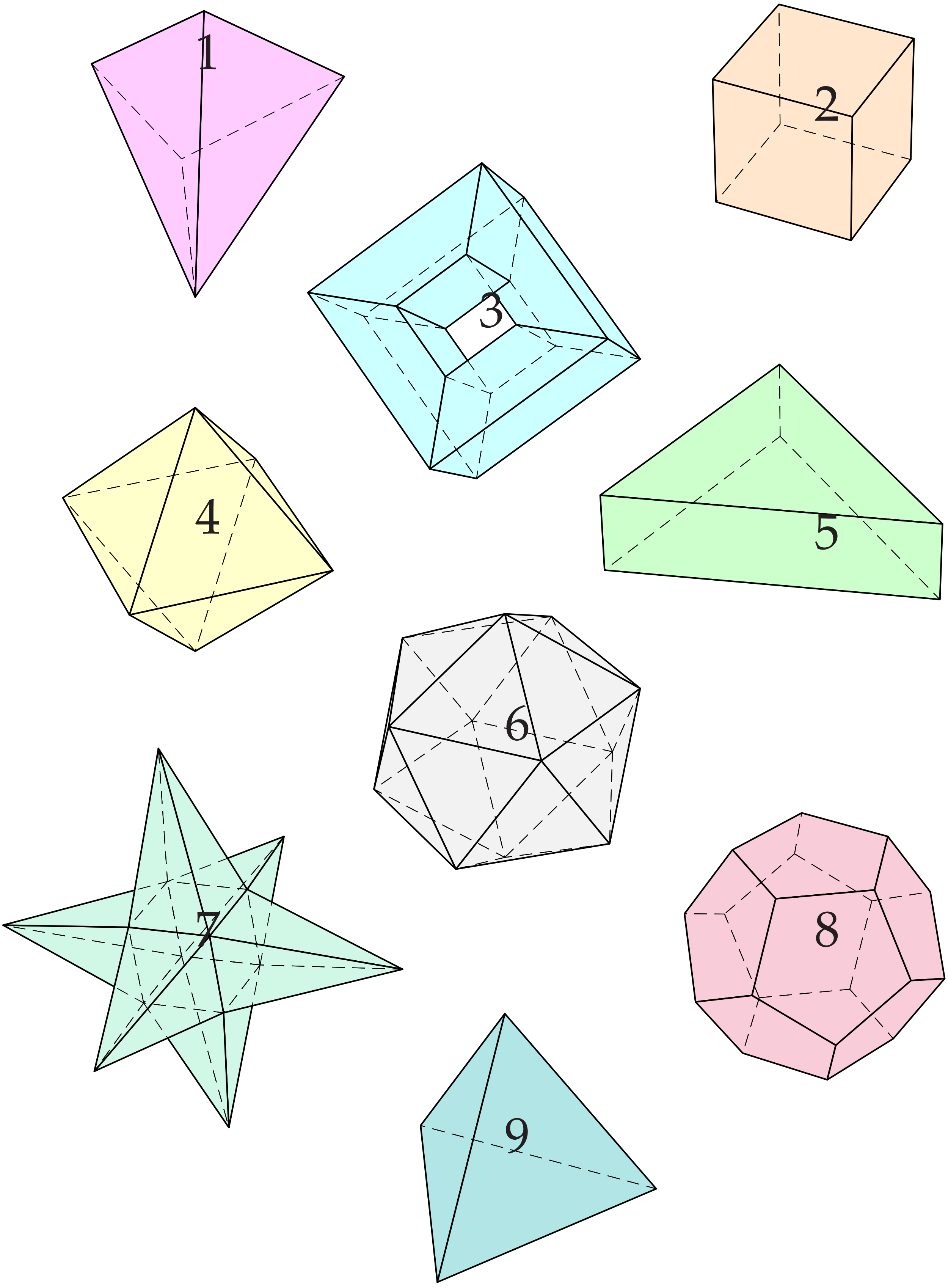
D'après une activité parue dans la revue Envol. n129, octobre-novembre-décembre 2004.

Pour chaque polyèdre nommé dans le tableau, retrouver sa représentation en perspective cavalière page suivante, dénombrer le nombre de sommets S, le nombre d'arêtes A et le nombre de faces F, puis calculer la caractéristique d'Euler S − A + F.

Enfin, dire si le solide est régulier, convexe, et s'il s'agit d'un solide de Platon (polyèdre régulier convexe). Discuter des valeurs obtenues.

Nom du solide	n	S	A	F	S − A + F	régulier ?	convexe ?	Platon ?
Tétraèdre								
Polyèdre étoilé								
Octaèdre								
Pyramide								
Icosaèdre								
Prisme								
Cube								
Beignoïde								
Dodécaèdre								

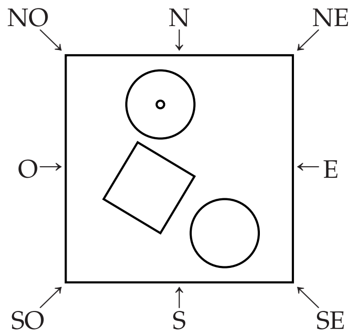
Entraînement



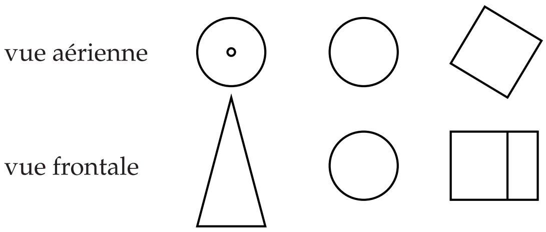
6 CRPE 1992 Orléans-Tours

On dispose de trois objets sur une table : un cône, un cube et une sphère. On a également des représentations de ces solides selon des points de vue différents :

Vue de la table du dessus

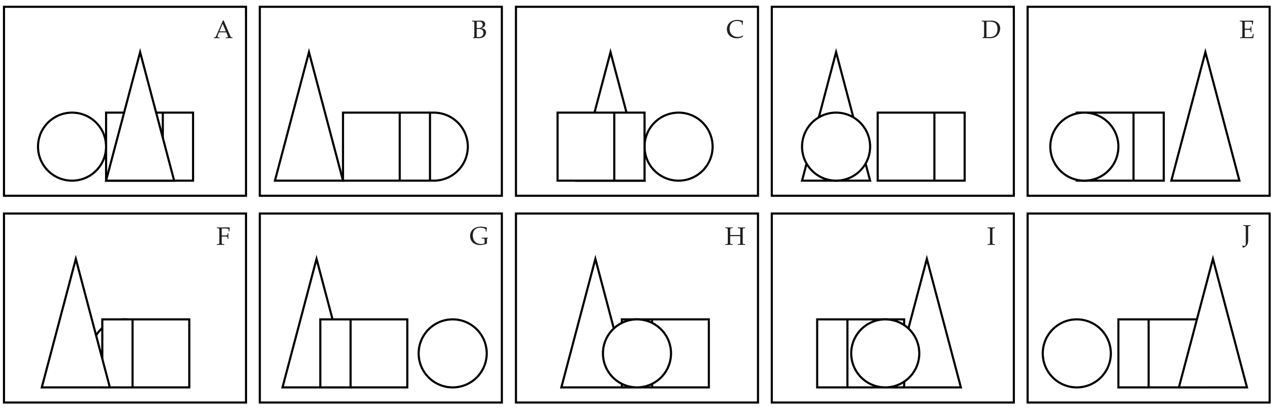


Solides en vue du dessus et de face



Les images ci-dessous représentent des vues, selon divers axes de visée. Déterminer le point de vue de chaque image (attention, certaines images correspondent à aucune configuration !).

N	NE	E	SE	S	SO	O	NO



7 CRPE 2020 - G4

On donne les coordonnées géographiques, arrondies au degré suivantes :

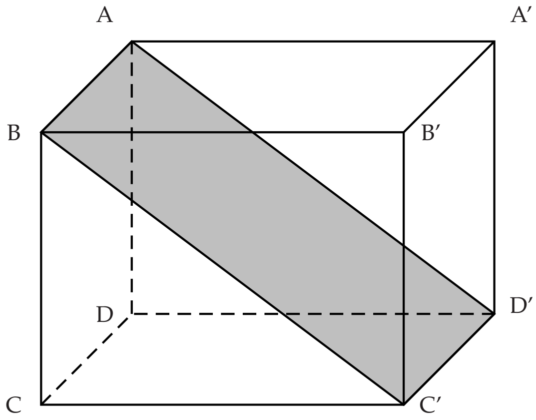
- de Tahiti : (17° S ; 149° O), soit en écriture anglo-saxonne (S 17°, W 149°) ;
- de l'Île de Pâques : (27° S ; 109° O).

L'Île de Pâques est aussi dénommée, en langue polynésienne, Rapa Nui. Les premiers habitants de l'Île de Pâques étaient originaires de l'Île de Rapa Iti située dans l'archipel des Australes (Polynésie Française). Les coordonnées géographiques de l'Île de Rapa Iti sont (27°S ; 144° O).

On souhaite estimer la distance du voyage effectué sur l'Océan Pacifique par ces premiers navigateurs polynésiens. Estimer la distance entre l'Île de Rapa Iti et l'Île de Rapa Nui en suivant le 27e parallèle sud, sachant que le rayon du 27e parallèle sud est environ 5 676 km.

8 CRPE 1996 Dijon

On considère un parallélépipède rectangle pour lequel AB = $2u$, BC = $3u$ et AA′ = $4u$, u étant l'unité de mesure de longueur.



On pratique une coupe selon le plan (ABC′D′). On obtient deux prismes identiques nommés ADD′C′CB que nous appellerons P_1 et AA′D′C′B′B que nous appellerons P_2, et qui ont chacun 5 faces.

1) Nommer et donner la nature géométrique des 5 figures planes qui composent P_1.

2) Dessiner deux patrons différents de ce prisme en prenant 1 cm comme unité. La construction sera réalisée sur papier uni, avec règle graduée, équerre et compas.

9 CRPE 2018 G3

Soit ABCDEFGH un cube d'arête 6 cm (*figure 1*).

1) Soit I, J et K les milieux respectifs des arêtes [FE], [FG] et [FB].
Quelle est la nature du triangle IJK ? Justifier.

2) Montrer que le volume du tétraèdre FIJK est 4,5 cm^3. On rappelle que le volume d'une pyramide est égal au tiers du produit de l'aire d'une base par la hauteur associée.

3) Construire, en vraie grandeur, un patron du tétraèdre FIJK. On laissera les traits de construction.

4) On coupe le cube en suivant le plan (IJK), afin d'ôter le tétraèdre FIJK. On procède de la même façon avec chacun des sept autres sommets du cube. Le solide obtenu après ces différentes coupes s'appelle un « cuboctaèdre »(*figure 2*).

a) Calculer le volume de ce cuboctaèdre.

b) Calculer la longueur totale de ses arêtes. On donnera le résultat arrondi au millimètre.

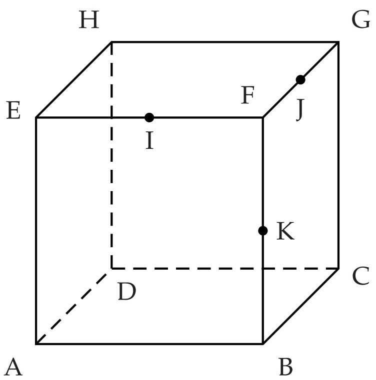


figure 1

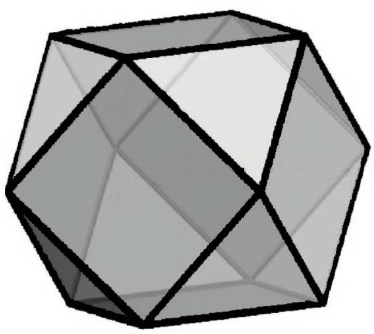
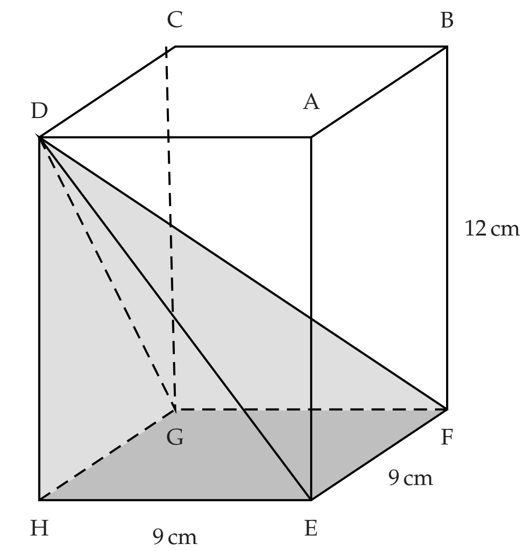


figure 2

10 **CRPE 2015 G2**

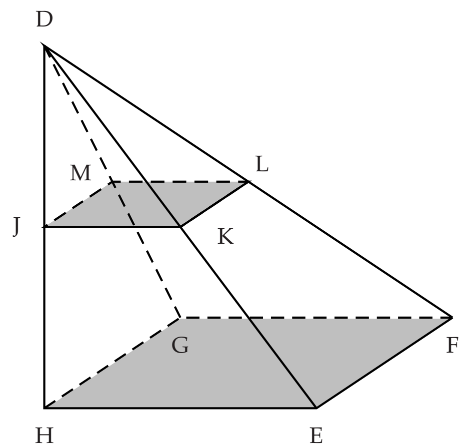


Les différents figures de cet exercice ne sont pas à l'échelle.

L'objet de ce problème est l'étude d'une pyramide en verre, destinée à être remplie de sable pour constituer un objet de décoration.
Cette pyramide est inscriptible dans un pavé droit, comme indiqué ci-contre. Le pavé droit a pour dimensions : 9 cm de longueur, 9 cm de largeur et 12 cm de hauteur.

1) Réalisation d'un patron de la pyramide.
- **a)** Calculer les longueurs DE et DG.
- **b)** Quelle est la nature du triangle DGF ? Du triangle DEF ? (on ne demande pas de justification.)
- **c)** Tracer sur la copie un patron de cette pyramide à l'échelle $1/3$.

La pyramide est remplie avec du sable de deux couleurs différentes : la partie inférieure avec du sable rouge et la partie supérieure avec du sable blanc.
Sur la figure ci-contre, le point J indique la hauteur à laquelle s'arrête le sable rouge ; les deux couleurs de sable sont délimitées par le plan parallèle à la base de la pyramide DEFGH passant par le point J.
La section est un quadrilatère JKLM où les points K, L, M appartiennent respectivement aux segments [DE], [DF] et [DG]. La pyramide DJKLM est une réduction de la pyramide DEFGH.



2) Dans cette partie, on donne JH = 2 cm.
- **a)** Quelle est la nature du quadrilatère JKLM ? Justifier.
- **b)** Calculer les longueurs JK et JM en justifiant les calculs.
- **c)** Déterminer le volume *B* de sable blanc et le volume *R* de sable rouge contenus dans la pyramide.

GRANDEURS ET MESURES

13

Périmètres et aires

Un peu d'histoire

Parmi les nombres qui permettent de mesurer des longueurs ou des aires, il en est un indispensable pour tout ce qui concerne les cercles et les disques : le nombre π.

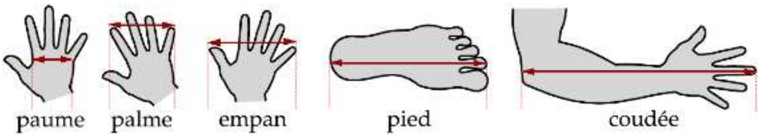
La quadrature du cercle est un problème classique de mathématiques apparaissant en géométrie. Il fait partie des trois grands problèmes de l'Antiquité, avec la trisection de l'angle et la duplication du cube. Il consiste à construire un carré de même aire qu'un disque donné à l'aide d'une règle et d'un compas. La quadrature du cercle nécessite la construction à la règle et au compas de la racine carrée du nombre π, ce qui est impossible. Ce problème mathématique est celui qui a résisté le plus longtemps aux mathématiciens, qui ont mis plus de trois millénaires à étudier le problème, reconnu comme insoluble par Ferdinand von Lindemann en 1882.

π est un nombre, au même titre que 2 ou 100 ou 6,538, sauf que son écriture décimale est infinie. Il désigne le rapport du périmètre d'un cercle par son diamètre. Là aussi, de nombreux mathématiciens ont tenté de découvrir la valeur la plus fiable de π par des méthodes diverses. L'une d'elles, celle d'Archimède (250 avant J.-C.), consistait à encadrer l'aire d'un disque de rayon 1 (donc π) par l'aire d'un polygone régulier inscrit dans ce disque, et par l'aire d'un polygone régulier exinscrit, dont les aires sont plus simples à calculer.

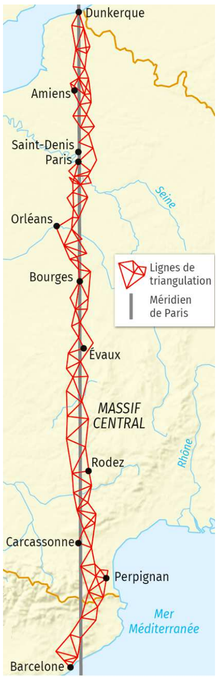
Cours

1. Repères historiques

En 1795, il existe en France plus de sept cents unités de mesure différentes qui varient d'une ville à l'autre. Beaucoup sont empruntées à la morphologie humaine : la paume, la palme, l'empan, le pied, la coudée, le pas, la brasse. . .



Source d'erreurs et de fraudes lors des transactions commerciales, cette situation porte préjudice au développement des sciences. Politiques et scientifiques vont tenter de réformer cet état de fait. Leur idée est d'assurer l'invariabilité des mesures en les rapportant à un étalon emprunté à un phénomène naturel, un étalon universel qui permettrait l'adhésion de toutes les nations étrangères. Il est alors décidé que le mètre (du grec *metron*, mesure) serait défini comme la longueur de la dix-millionième partie du quart du méridien terrestre[1].

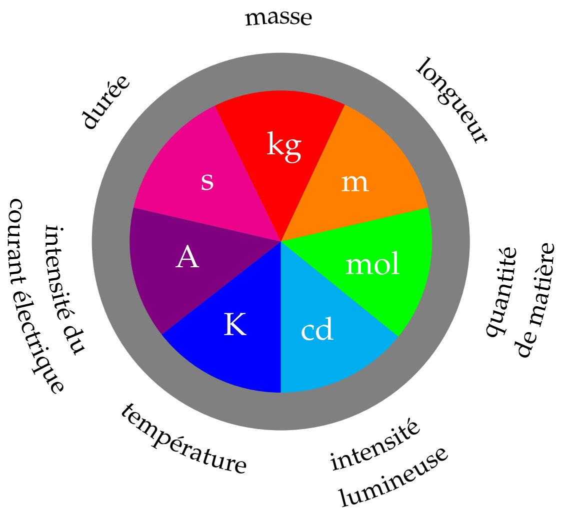


Ce sont les géodésiens Pierre-François **Mechain** (1744-1804) et Jean-Baptiste **Delambre** (1747-1822) qui vont se charger des opérations de triangulation permettant de donner une mesure fiable au mètre : ils devront mesurer la distance entre Dunkerque à Barcelone (situés sur le méridien de Paris, et distants de 10° de latitude). Ces travaux prennent près de sept ans et il faut plus de cent triangles pour jalonner l'arc du méridien. Sur ce parcours, nos deux hommes connaissent bien des mésaventures : arrestations, révocations temporaires, ou encore endommagement et destruction de leurs ouvrages géodésiques[2]. C'est ainsi que, le 26 mars 1791, nait le mètre.

L'unité de mesure de base étant déterminée, il suffit désormais d'établir toutes les autres unités de mesure qui en découlent : le mètre carré et le mètre cube, le litre, le gramme. . .
Le **système métrique décimal** est institué le 7 avril 1795. Il s'agit d'un bouleversement majeur des pratiques humaines. De plus, la décimalisation introduit une véritable révolution dans la conversion des différentes mesures : tout passage d'un multiple à un sous-multiple, et vice versa s'opère par simple glissement des chiffres d'un nombre dans le tableau de numération. Le **système international d'unité** (SI), son successeur, voit le jour officiellement en 1960.

Au départ, le système est composé de trois unités : le **mètre**, le **kilogramme** et la **seconde**. Mais au fur et à mesure que les sciences progressent, de nouvelles unités apparaissent : l'**ampère** pour l'intensité électrique en 1946, le **kelvin** pour la température et la **candela** pour l'intensité lumineuse en 1954. Enfin, la **mole** pour la quantité de matière fait son apparition en 1971. À ces 7 unités du SI s'ajoute le radian : unité sans dimension permettant de mesurer un angle. On peut alors en théorie se contenter de ces unités pour exprimer toutes les grandeurs physiques par combinaisons.
Ces unités doivent s'adapter aux progrès technologiques, et donc, leurs définitions évoluent pour permettre des mesures avec des précisions de plus en plus fines, tout en assurant une comparabilité fiable à long terme et une uniformité en tout lieu. C'est ainsi que, depuis 2018, toutes les unités du SI sont définies par rapport à des contantes de la nature. Les seuls pays à ne pas avoir adopté, de manière officielle, le système métrique sont le Liberia, la Birmanie et les États-Unis.

1. À l'époque, un méridien (astronomique) est un grand cercle passant par les pôles. Donc pour la Terre autour de 40 000 km, le 10 millionième du quart du méridien correspond bien à 1 m. Actuellement, on définit le méridien géographique comme un demi grand cercle.
2. Le reportage « Un mètre pour mesurer le monde » rend compte de cette épopée.



Remarques :

- Les symboles des unités sont exprimés en minuscules, sauf s'ils sont dérivés de noms propres.
- Le symbole L fut adopté en 1979, comme alternative pour éviter le risque de confusion entre la lettre l et le chiffre 1.
- Le quotient de deux unités s'écrit avec une barre oblique, horizontale ou avec un exposant négatif : par exemple $\mathrm{m/s}$; $\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ou $\mathrm{m.s^{-1}}$.

Voici par exemple un tableau dressé conformément à la loi du 11 juillet et au décret du 28 juillet 1903 sur les poids et mesures : les six unités principales sont alors le mètre pour les longueurs, l'are pour les mesures agraires, la stère pour le bois, le litre pour les mesures de capacité, le kilogramme pour les poids et le franc pour la monnaie. Le tableau montre des instruments usuels de mesures ainsi que leurs sous-mesures et sur-mesures.

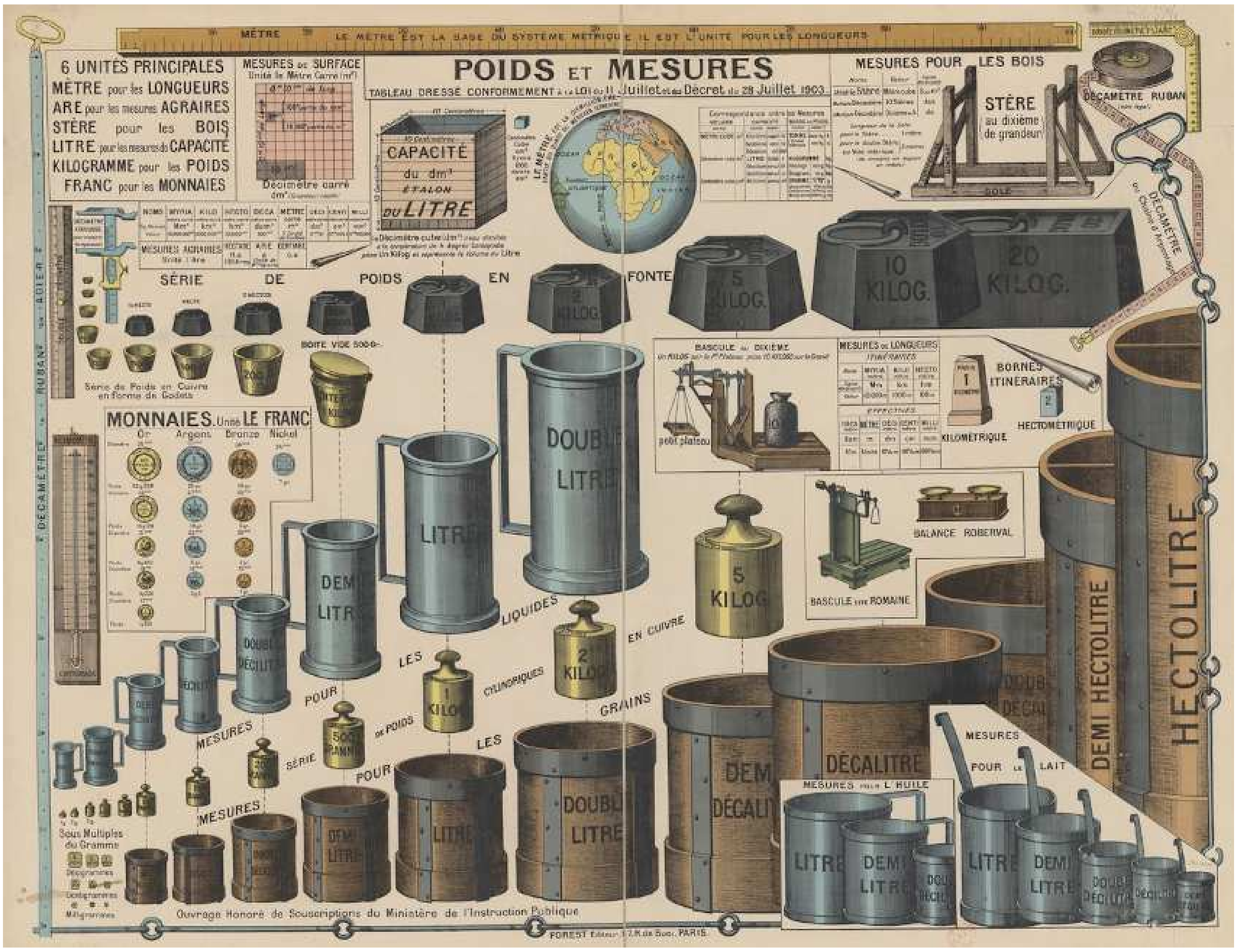


Tableau visible en détails sur Gallica, bibliothèque numérique de la Bibliothèque nationale de France.

2. Repères théoriques

A. Grandeur VS mesure

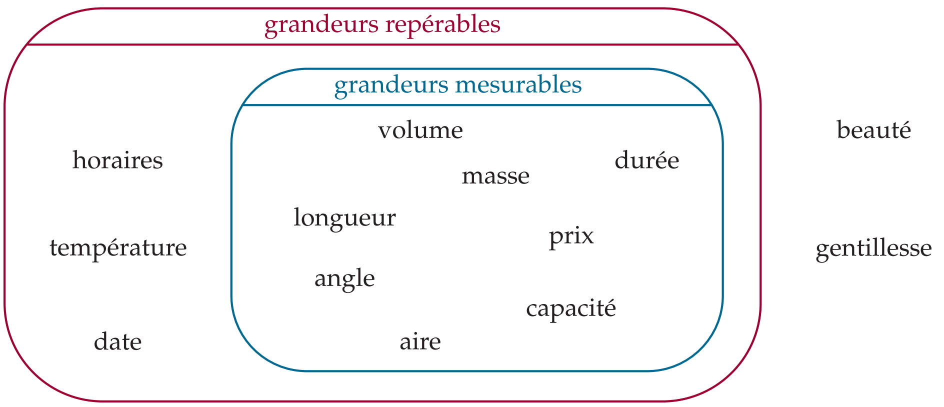
Dans le VIM (vocabulaire international de métrologie), on trouve la définition suivante d'une **grandeur** :

> *Propriété d'un phénomène, d'un corps ou d'une substance, que l'on peut exprimer quantitativement sous forme d'un nombre et d'une référence.*

Mesurer une grandeur c'est chercher combien de fois elle renferme une autre grandeur de même espèce prise pour unité de mesure.

Une grandeur peut être

- **repérable** : c'est une grandeur pour laquelle on peut définir une relation d'ordre qui permet de comparer et d'ordonner des objets selon cette grandeur ;
- **mesurable** : il faut de plus que la grandeur de deux objets réunis soit égale à la somme des grandeurs de chaque objet et que la grandeur d'un certain nombre n d'objets identiques réunis soit égale à n fois la grandeur de l'objet.



Exemple La température est une grandeur repérable : on peut la repérer à l'aide d'un thermomètre. Par contre, si on ouvre une fenêtre sur l'extérieur, la température obtenue n'est pas égale à la somme des températures ; et s'il fait 5°C à l'extérieur, on ne peut pas donner de sens à l'expression « demain il fera trois fois plus froid », ce n'est donc pas une grandeur mesurable.

En mathématiques, on utilise des nombres qui sont les nombres habituels, et les **nombres-de** qui sont des nombres accompagnés d'une unité. Ces derniers sont utilisés pour les grandeurs mesurables. On ne peut pas écrire une égalité entre nombre et nombre-de.

Exemple Une écriture du type : $AB + BC = 12 + 3 = 15\,\text{m}$ n'a aucun sens mathématique.
On écrira plutôt $AB + BC = 12\,\text{m} + 3\,\text{m} = 15\,\text{m}$,
ou alors : avec des mesures en m, on a $AB + BC = 12 + 3 = 15$.

L'avantage d'une écriture avec les unités est aussi de vérifier la cohérence des calculs et des unités et d'effectuer des conversions si besoin.

Exemple $12\,\text{dL} + 3\,\text{L} \neq 15?$ mais $12\,\text{dL} + 3\,\text{L} = 12\,\text{dL} + 30\,\text{dL} = 42\,\text{dL} = 4{,}2\,\text{L}$.

B. Longueurs et périmètres

L'unité du SI qui permet de mesurer une longueur est le mètre (m), et toutes les unités qui en découlent. Pour désigner les multiples ou les subdivisions des mesures, on utilise les préfixes :

Préfixe	kilo	hecto	déca		déci	centi	milli
Signification	1000	100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$
Abréviation	k	h	da		d	c	m
Unité de longueur	km	hm	dam	m	dm	cm	mm
Exemple		9	7	3	2	1	0

Ainsi, pour convertir d'une unité à l'autre, on multiplie ou on divise par 10, 100, 1 000, ...

Exemple 973,21 m = 9 732,1 dm = 9,732 1 hm = 973 210 mm.

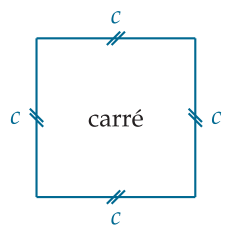
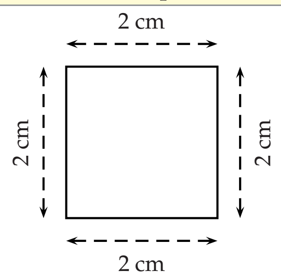
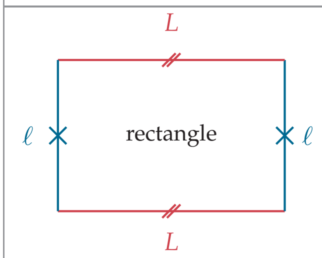
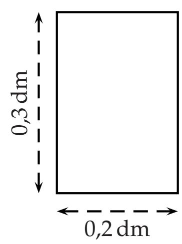
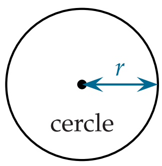
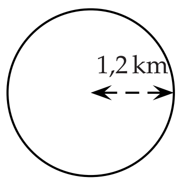
DÉFINITION : Périmètre et circonférence

Le **périmètre** d'une figure est la mesure du contour de cette figure.
Pour un disque, on parle aussi de **circonférence**.

PROPRIÉTÉ : Calcul d'un périmètre et d'une circonférence

Le **périmètre** d'un polygone s'obtient en additionnant la mesure de chacun de ses segments.
La **circonférence** d'un disque se rayon r se calcule grâce à la formule : $2\pi\, r$.

La circonférence d'un disque de rayon r est donc proportionnelle à son diamètre d, on peut aussi écrire $p = \pi \times d$ où $\pi \simeq 3,141\,592\,653\,589\,793\,238\,462\,643\,383\,279\,50\ldots \simeq 3,14$.

Figure plane	Mesure	Exemple	Calcul
	$p = c + c + c + c$ $p = 4\,c$		$p = 4 \times 2\,\text{cm}$ $p = 8\,\text{cm}$
	$p = L + \ell + L + \ell$ $p = 2\,(L + \ell)$		$p = 2 \times (0{,}2\,\text{dm} + 0{,}3\,\text{dm})$ $p = 2 \times 0{,}5\,\text{dm}$ $p = 1\,\text{dm}$
	$p = 2\,\pi\,r$		$p = 2 \times \pi \times 1{,}2\,\text{km}$ $p \simeq 2 \times 3,14 \times 1{,}2\,\text{km}$ $p \simeq 7{,}54\,\text{km}$

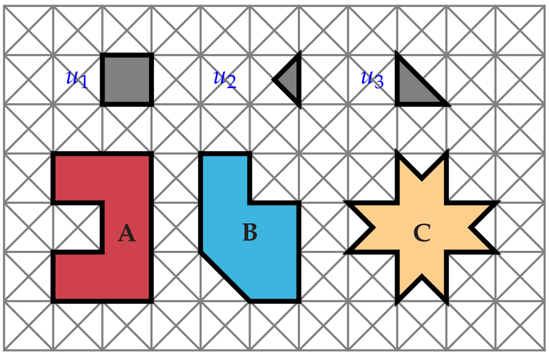
C. Surfaces et aires

DÉFINITION : Surface et aire

La **surface** d'une figure est la partie située à l'intérieur de son contour.
Sa mesure s'appelle l'**aire**, qui est le nombre d'unités d'aire que la figure contient.

La mesure d'aire peut se faire grâce à une formule, ou par découpage, déplacement…

Exemple



On compte combien on pourrait dessiner d'unité d'aire à l'intérieur de chaque figure.

Correction

Lorsqu'on n'a pas une unité d'aire entière, on peut utiliser deux procédures :

- on prend une partie de l'unité d'aire (la moitié $= \dfrac{1}{2} = 0,5$; le quart $= \dfrac{1}{4} = 0,25\ldots$) ;
- on « découpe » une partie de la figure afin de la déplacer ailleurs pour former une unité d'aire.

Unité	fig. A	fig. B	fig. C
u_1	5	4,5	4
u_2	20	18	16
u_3	10	9	8

Pour désigner une aire, on utilise le mètre carré (m^2) et ses multiples et sous-multiples. Ce n'est pas directement une unité du SI, mais l'aire est ce que l'on appelle une « grandeur composée », ici le produit de deux longueurs. Pour les mesures agraires, on utilise communément l'are (a) qui équivaut à 100 m^2 et l'hectares (ha) qui vaut 100 ares, c'est-à-dire 10 000 m^2.

km^2		hm^2		dam^2		m^2		dm^2		cm^2		mm^2	
					3	7	0	1	5	0	4	0	0

Exemple 370,150 4 m^2 = 37 015,04 dm^2 = 370 150 400 mm^2 = 3,701 504 dam^2…

À partir de la formule du rectangle, on peut retrouver les formules classiques par « découpage-recollage » :

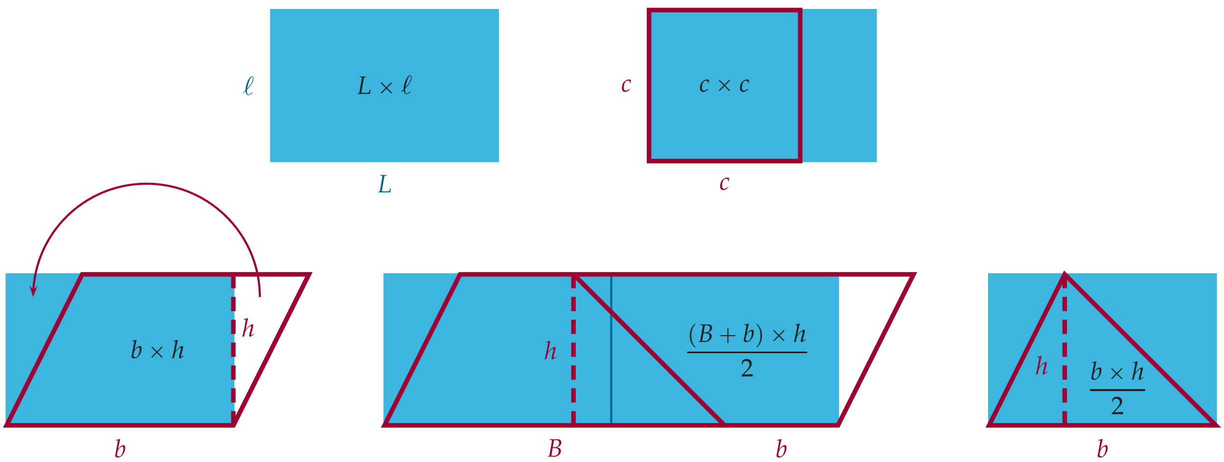
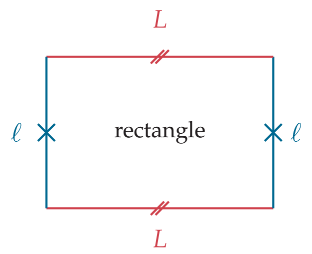
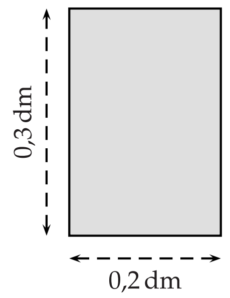
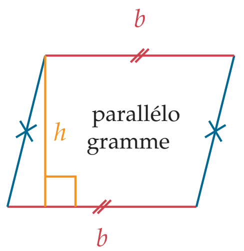
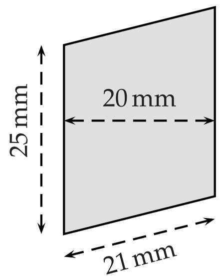
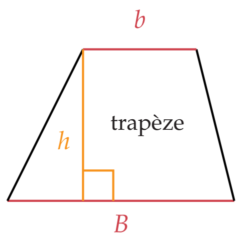
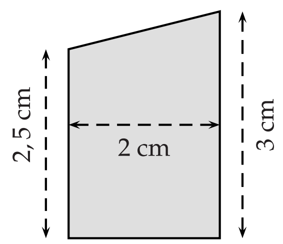
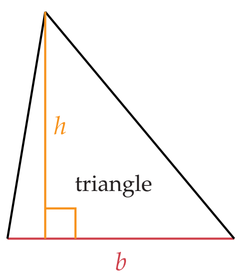
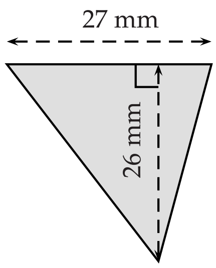
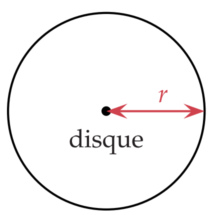
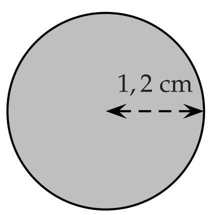


Figure plane	Mesures	Exemple	Calcul
	$\mathcal{A} = L \times \ell$		$\mathcal{A} = 0{,}2\,\text{dm} \times 0{,}3\,\text{dm}$ $\mathcal{A} = 0{,}06\,\text{dm}^2 = 6\,\text{cm}^2$
Pour le cas particulier du carré, on a $\mathcal{A} = c^2$ où c est la mesure du côté du carré			
	$\mathcal{A} = b \times h$		$\mathcal{A} = 20\,\text{mm} \times 25\,\text{mm}$ $\mathcal{A} = 500\,\text{mm}^2 = 5\,\text{cm}^2$
	$\mathcal{A} = \dfrac{(b+B) \times h}{2}$		$\mathcal{A} = \dfrac{(2{,}5\,\text{cm} + 3\,\text{cm}) \times 2\,\text{cm}}{2}$ $\mathcal{A} = 5{,}5\,\text{cm}^2$
	$\mathcal{A} = \dfrac{b \times h}{2}$		$\mathcal{A} = \dfrac{27\,\text{mm} \times 26\,\text{mm}}{2}$ $\mathcal{A} = 351\,\text{mm}^2 = 3{,}51\,\text{cm}^2$
	$\mathcal{A} = \pi r^2$		$\mathcal{A} = \pi \times (1{,}2\,\text{cm})^2$ $\mathcal{A} \simeq 4{,}52\,\text{cm}^2$

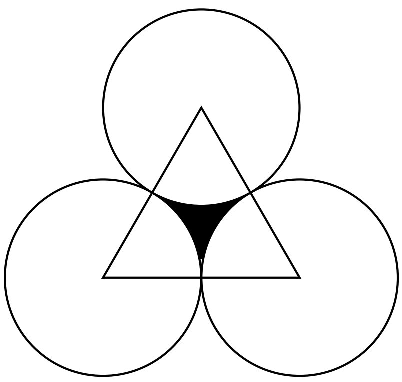
Cours

MÉTHODE 1 Déterminer l'aire d'une figure complexe

Pour calculer l'aire d'une figure non classique, on peut décomposer la figure en sous-figures simples, ajouter les aires obtenues, déplacer certains éléments de la figure pour obtenir une aire connue, procéder par soustraction…

Exercice d'application

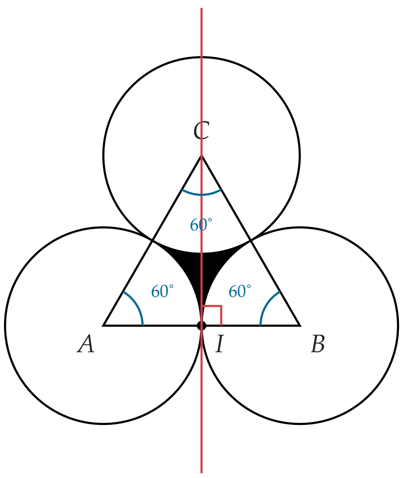
Sur la figure ci-dessous, les sommets du triangle sont les centres de trois cercles, de même rayon, tangents deux à deux.
r est le rayon de ces cercles.



Calculez, en fonction de r, l'aire de la partie noire intérieure au triangle et délimitée par les trois cercles.

....

Figure utilisée pour la démonstration



Correction

On note ABC le triangle.

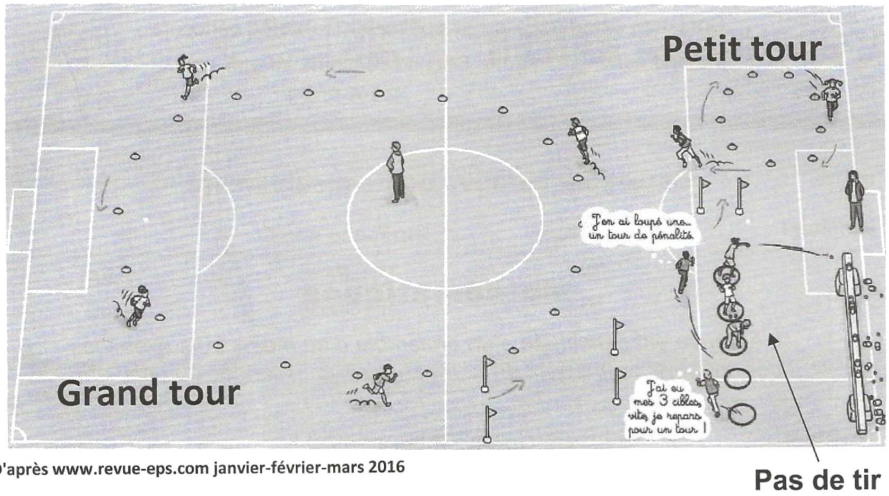
- **Montrons que le ABC est un triangle équilatéral :**
  Soit I le point de tangence des cercles de centre A et B et (d) la tangente commune aux deux cercles. Ces cercles étant tangents, on a (BI) perpendiculaire à (d) et (AI) perpendiculaire à (d).
  Or, deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles, donc, les deux droites (AI) et (BI) sont parallèles et ont un point commun, elles sont donc confondues.
  On a alors A, I, B alignés dans cet ordre avec $AI = r$ et BI= r, d'où $AB = 2r$.
  En procédant de la même manière pour les deux autres côtés du triangle, on trouve $AB = BC = CA = 2r$, d'ou :
  $\boxed{ABC \text{ est un triangle équilatéral}}$

- **Calcul de l'aire du triangle ABC** :
  La hauteur d'un triangle équilatéral de côté a vaut $a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (on peut le démontrer grâce au théorème de Pythagore).
  On a alors $\mathcal{A}(\text{ABC}) = \dfrac{\text{AB} \times \text{IC}}{2} = \dfrac{\cancel{2}r \times r\sqrt{3}}{\cancel{2}} = r^2\sqrt{3}$.
  $\boxed{\text{L'aire du triangle } ABC \text{ est égale à } r^2\sqrt{3}}$

- **Calcul de l'aire de la partie noircie :**
  Cette aire correspond à l'aire du triangle ABC, à laquelle on soustrait trois fois la même portion de disque.
  Or, le triangle étant équilatéral, l'angle $\widehat{BAC}$ vaut 60°. La somme des trois sections de disque correspond donc au demi disque de rayon r (puisque $60° \times 3 = 180°$).
  Or, l'aire d'un disque de rayon r vaut πr^2 donc, l'aire du demi-disque de rayon r vaut $\dfrac{1}{2}\pi r^2$.
  D'où : $r^2\sqrt{3} - \dfrac{1}{2}\pi r^2 = \left(\sqrt{3} - \dfrac{1}{2}\pi\right) r^2$.
  $\boxed{\text{L'aire de la partie noire vaut } \left(\sqrt{3} - \dfrac{\pi}{2}\right) r^2}$

Groupement 1 - Exercice 1 - Partie 2 - Question 1 :

Dans cette version adaptée du biathlon, les élèves ont à parcourir, en courant, 4 grands tours tracés avec des plots sur un stade comme sur la figure ci-dessous. À l'issue de chacun des 3 premiers tours, ils se présentent au pas de tir et lancent trois balles sur des cibles. S'ils atteignent 3 fois leur cible, ils n'ont pas de pénalité et repartent pour le grand tour suivant. En revanche, pour chaque lancer manqué, ils doivent effectuer un petit tour avant de repartir sur le grand tour.
Pour chaque élève on mesure la durée mise pour faire un parcours complet (grands tours + lancers + petits tours de pénalité le cas échéant). L'objectif est de mettre le moins de temps possible pour effectuer le parcours complet.



D'après www.revue-eps.com janvier-février-mars 2016

Dans cette partie, des élèves de CE1 font l'épreuve de biathlon dans sa totalité :
les 4 grands tours + les 3 épreuves de lancers de 3 balles + les éventuels tours de pénalité. On rappelle que pour un élève de CE1, la longueur du grand tour est de 250 m. La longueur du tour de pénalité est de 20 m.

1) Sachant que le tour de pénalité forme un cercle, déterminer son rayon. Arrondir au centimètre.

2) Un élève de CE1, qui court à la vitesse moyenne de 150 m/min, prend le départ de l'épreuve. On suppose que pour effectuer 3 lancers, il passe, à chaque fois, 30 secondes sur le pas de tir. Quelle sera la durée totale que met cet élève pour réaliser le parcours complet, s'il ne rate aucune cible au premier tour et qu'il rate une cible au 2e tour puis deux cibles au 3e tour ? Donner la réponse en minutes et secondes.

Exemple de corrigé.

1) Le périmètre d'un cercle se calcule grâce à la formule $p = 2\pi R$ où R est le rayon du cercle.

On a alors : $20\text{ m} = 2\pi R \iff R = \dfrac{20\text{ m}}{2\pi} \approx 3,183\text{ m}$. Le rayon du tour de pénalité est d'environ 3,18 m.

2) Calcul de la distance effectuée par l'élève :

- 4 grands tours $= 4 \times 250\text{ m} = 1\,000\text{ m}$;
- 3 cibles loupées lui font faire 3 petits tours de 20 m chacun, soit 60 m.

Au total, il va parcourir 1 060 m a une vitesse de 150 m/min.

Calcul du temps passé en course :

$$v = \frac{d}{t} \iff 150\text{ m/min} = \frac{1\,060\text{ m}}{t} \iff t = \frac{1\,060\text{ m}}{150\text{ m/min}} \iff t \approx 7,066\text{ min} = 7\text{ min }4\text{ s}.$$

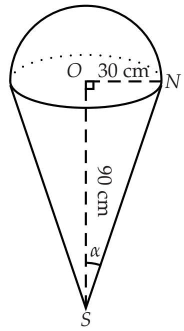
Calcul de la durée totale :

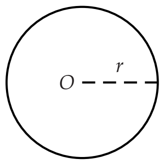
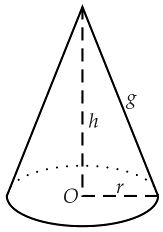
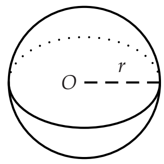
on additionne le temps passé en course au temps passé sur le pas de tir, qui est de $3 \times 30\text{ s} = 1\text{ min }30\text{ s}$.

La durée totale pour cet élève est de 8 min 34 s.

Groupement 1 - Exercice 5 - Question 3 :

Un ballon-sonde est un ballon à gaz utilisé pour faire des mesures locales dans l'atmosphère.
Dans le cadre du projet scientifique qu'elle anime pour sa classe de CM2, une professeure des écoles a reçu un petit ballon-sonde, représenté ci-contre.
Son enveloppe, composée de matières plastiques et de latex, a la forme, une fois gonflée, d'un cône de révolution surmonté d'une demi-sphère.
Les dimensions données sur la figure ci-contre sont celles du ballon-sonde au sol, sur le lieu du lâcher situé au niveau de la mer.
On pourra, si nécessaire, utiliser le formulaire ci-dessous.



	 g est la longueur d'une génératrice du cône	
Périmètre du disque : $2\,\pi\,r$	Volume du cône : $\frac{1}{3}\,\pi\,r^2\,h$	Volume de la boule : $\frac{4}{3}\,\pi\,r^3$
Aire du disque : $\pi\,r^2$	Aire de la surface latérale : $\pi\,r\,g$	Aire de la sphère : $4\,\pi\,r^2$

Sachant que la génératrice du cône mesure $\sqrt{9000}$ cm^2, en déduire que l'enveloppe totale du ballon-sonde, au niveau de la mer, a une aire d'environ 1,5 m^2 au dixième près.

Exemple de corrigé.
Calcul de l'enveloppe de la partie conique (surface latérale du cône) :
$A_1 = \pi \times 30\text{ cm} \times \sqrt{9000}\text{ cm} = 900\sqrt{10}\,\pi\text{ cm}^2$.
Calcul de l'enveloppe de la demi-sphère (demi-aire de la sphère) :
$A_2 = \dfrac{1}{2} \times \left(4 \times \pi \times (30\text{ cm})^2\right) = 1\,8000\,\pi\text{ cm}^2$.
Calcul de l'enveloppe du ballon-sonde :
$A = A_1 + A_2 = 900\sqrt{10}\,\pi\text{ cm}^2 + 1\,8000\,\pi\text{ cm}^2 \approx 14\,596\text{ cm}^2 \approx 1,4\,596\text{ m}^2$.
L'enveloppe totale du ballon sonde au niveau de la mer a une aire d'environ $1,5$ m^2.

Groupement 3 - Exercice 1 - Question 7 :

Question :	**A**	**B**	**C**	**D**
Le triangle ABC est rectangle en B. De plus, $AB = 8$ cm et $AC = 10$ cm. L'aire du triangle ABC est...	24 cm^3	40 cm^3	48 cm^3	80 cm^3

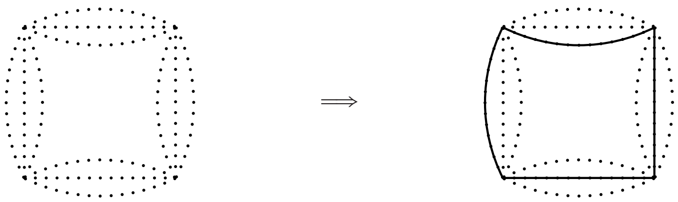
Exemple de corrigé.
Dans le triangle ABC rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore, on a :
$AC^2 = AB^2 + BC^2 \iff (10\text{ cm})^2 = (8\text{ cm})^2 + BC^2 \iff BC^2 = 100\text{ cm}^2 - 64\text{ cm}^2 = 36\text{ cm}^2$
Donc, $BC = \sqrt{36}\text{ cm} = 6\text{ cm}$.
L'aire du triangle ABC est égale à $AB \times BC = \dfrac{8\text{ cm} \times 6\text{ cm}}{2} = 24\text{ cm}^2$. La bonne réponse est A.

Maîtriser les bases avec MathenPoche

Classe	N°	Thème	Dans le cours
6e	G3	Périmètres	2.
	G4	Aires	2.
5e	C	Grandeurs et mesures	2.
4e	G1	Calcul de surfaces	2.

1 Curvica

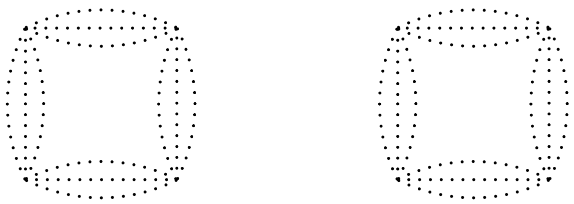
À partir d'un carré, on obtient une pièce du puzzle curvica [2] en « creusant », en « bombant » ou en laissant droit les côtés. Par exemple, voici une pièce de Curvica :



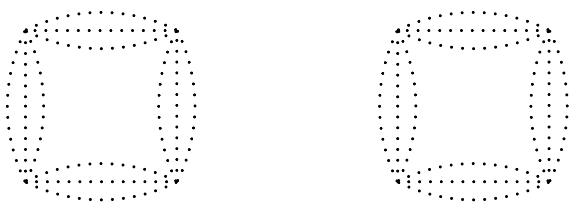
tous les arcs de cercles (creusés et bombés) reliant deux sommets du carré sont superposables.

Construire deux pièces différentes (donc non superposables par rotation, déplacement ou retournement) ayant les caractéristiques suivantes :

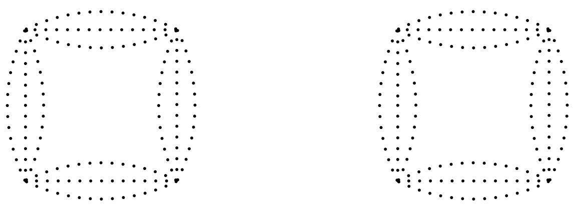
- Les deux pièces ont la même aire mais des périmètres différents.



- Les deux pièces ont le même périmètre mais des aires différentes.



- Les deux pièces ont le même périmètre et la même aire.



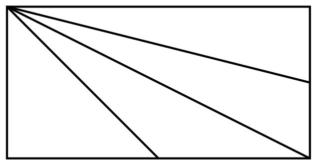
2. Pour plus d'informations, voir l'article d'Yves Martin, de l'IREM de la Réunion : `http://irem.univ-reunion.fr/spip.php?article802`

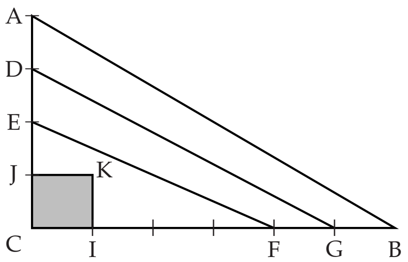
2 CRPE 2006 G5

Dans cet exercice, on dira que deux parts sont « égales » lorsqu'elles ont la même aire.

1) On partage un gâteau rectangulaire par ses diagonales. Les parts sont-elles « égales » ? Justifier.

2) On partage un gâteau rectangulaire en traçant trois segments à partir d'un même sommet : un segment vers le sommet opposé et deux segments vers les milieux des côtés opposés. Les parts sont-elles « égales » ? Justifier.



3) 

ABC est un triangle rectangle en C. [AC] est partagé en quatre segments de même longueur CJ, et [CB] en six segments de même longueur CI.
Les polygones EFC, DGFE et ABGD ont-ils la même aire ? Justifier.

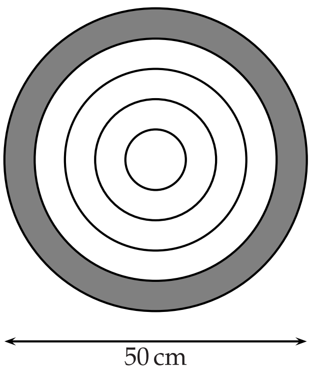
3 CRPE 2008 G3

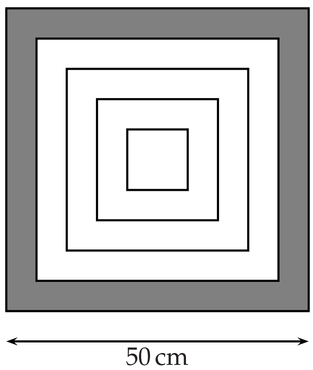
Pour carreler une pièce rectangulaire mesurant 4,18 m sur 5,67 m, un carreleur propose à des propriétaires le choix entre deux modèles de dalles carrées :

1) Le premier modèle a 29 cm de côté et coûte 2,30 € l'unité. Avec ce modèle, il n'utilise que des dalles entières et il complète avec du joint autour de chaque dalle.
   a) Calculer le nombre maximal de dalles que l'on peut poser dans la largeur de la pièce.
   b) Calculer le nombre maximal de dalles que l'on peut poser dans la longueur de la pièce.
   c) Les joints autour des dalles auront-ils tous la même largeur ? Si oui, quelle est cette largeur ?
2) Le deuxième modèle a 36 cm de côté et coûte 3,10 € l'unité. Avec ce modèle-là, il est préconisé des joints de 0,6 cm et le carreleur est alors dans l'obligation de couper des dalles et les découpes ne sont pas réutilisées. Calculer le nombre de dalles nécessaires.
3) Quel sera le choix le moins coûteux pour l'achat des dalles ?

4 CRPE 2012 G2

On considère les deux figures suivantes :



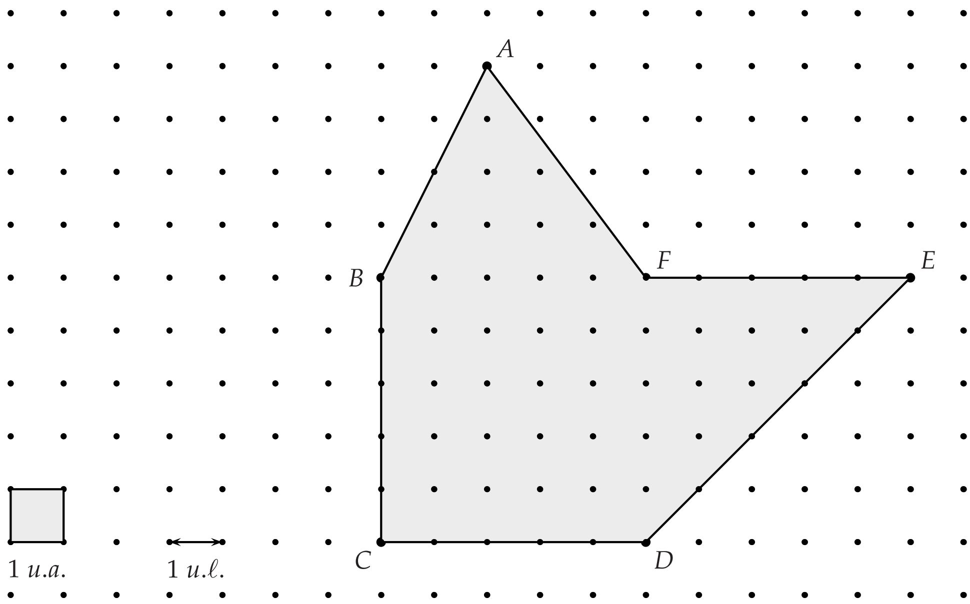


La première est constituée de cinq disques concentriques de rayons respectifs 5 cm, 10 cm, 15 cm, 20 cm et 25 cm.
La seconde est constituée de cinq carrés concentriques de côtés respectifs 10 cm, 20 cm, 30 cm, 40 cm et 50 cm.
Le rapport entre l'aire du disque central et l'aire grisée dans la figure de gauche est-il égal au rapport entre l'aire du carré central et l'aire grisée dans la figure de droite ?

5 **CRPE 2015 G1**

On travaille dans un réseau pointé à maille carrée. On notera une unité de longueur 1 $u.\ell.$ et une unité d'aire 1 $u.a.$
On appelle polygone de Pick, un polygone non aplati construit sur un tel réseau et dont chacun des sommets est un point du réseau.

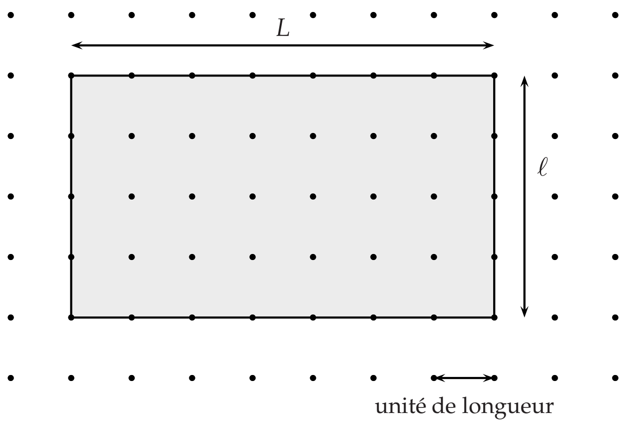
1) Calculer l'aire du polygone $ABCDEF$, en unité d'aire. Expliciter les étapes du raisonnement.



2) Une formule trouvée sur Internet sous le nom de formule de Pick prétend permettre de calculer l'aire $\mathcal{A}$ d'un polygone de Pick, à partir du nombre i de points du réseau strictement intérieurs à ce polygone et du nombre b de points du réseau sur le bord du polygone : $\mathcal{A} = i + \frac{b}{2} - 1$.
Appliquer cette formule au polygone $ABCDEF$ et vérifier que l'on retrouve bien son aire.

3) Appliquer la formule de Pick aux deux polygones de Pick $ABCDF$ et DEF.
Vérifier que la somme des résultats obtenus est égale à l'aire totale de la figure.

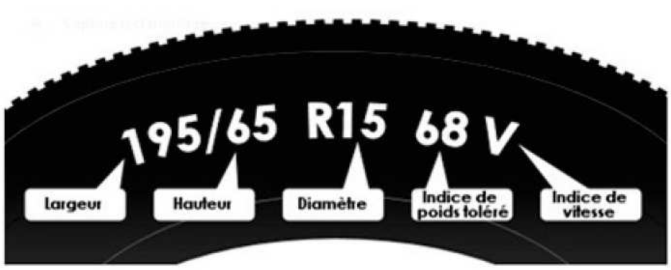
4) On considère un rectangle de Pick de dimensions quelconques dont les côtés sont parallèles au réseau.
On note L sa longueur et ℓ sa largeur.
Exprimer b et i en fonction de L et ℓ et en déduire que l'aire $\mathcal{A}$ du rectangle vérifie $\mathcal{A} = i + \frac{b}{2} - 1$.



Entraînement

6 **CRPE 2018 G1**

Comment lire les informations inscrites sur un pneumatique ?



La largeur	La largeur est exprimée en millimètre.
La hauteur	Ce nombre ne donne pas directement la mesure de la hauteur : il indique à quel pourcentage de la largeur correspond la hauteur (ici, la hauteur vaut 65% de la largeur).
Le diamètre	Le diamètre est exprimé en pouce. Il correspond au diamètre de la jante (le R signifie Radial).
L'indice de poids toléré (tableau 1)	L'indice de poids toléré est un code numérique qui correspond à la charge maximale qu'un pneu peut supporter.
L'indice de vitesse (tableau 2)	L'indice de vitesse est un code alphabétique qui correspond à la vitesse maximale à laquelle un pneu peut rouler. V correspond à 240 km/h.

Tableau 1

Indice de poids toléré	Poids en kg
55	218
58	236
59	243
60	250
61	257
62	265
63	272
64	280
65	290
66	300
67	307
68	315
69	325
70	335
71	345
72	355
73	365
74	375
75	387
76	400
77	412
78	425

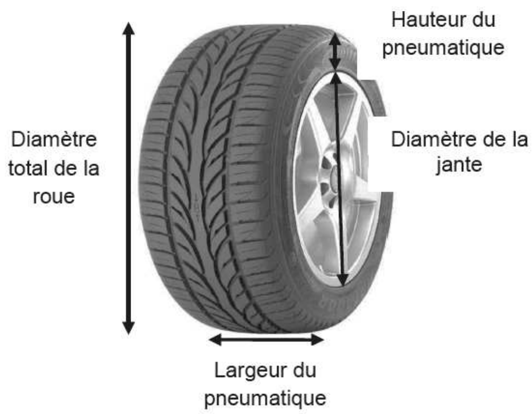


Tableau 2

Indice de vitesse	Vitesse en km/h
Q	160
R	170
S	180
T	190
U	200
H	210
V	240
ZR	> 240
W	270
Y	300

1) On considère un pneumatique sur lequel est inscrit « 195/65 R15 68V ».

a) Sachant que 1 pouce vaut 2,54 cm, calculer le diamètre de la jante en centimètre.

b) Montrer que la hauteur du pneu est 12,675 cm.

c) Calculer le diamètre total de la roue en centimètre.

2) On considère désormais un pneu radial pouvant supporter une charge maximale de 412 kg et rouler à la vitesse maximale de 270 km·h^{-1}. Sa largeur est de 20,5 cm, le diamètre de sa jante est de 40,64 cm et son diamètre total est de 63,19 cm. Indiquer, sous la forme « 195/65 R15 68V », les informations qui seront inscrites sur ce pneu.

7 **CRPE 2018 G3**

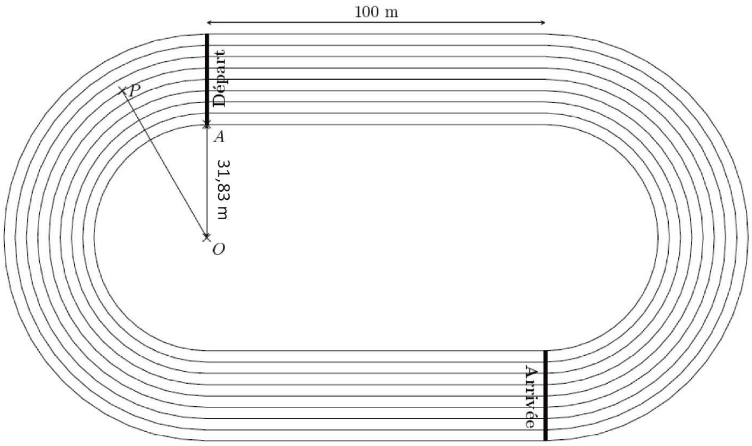
Une piste d'athlétisme est formée de huit couloirs. La largeur de chaque couloir est de 1,22 mètre.

Chacun des neuf bords des huit couloirs est composé de deux lignes droites de 100 mètres et de deux demi-cercles. Le couloir 1 est celui le plus à l'intérieur, le 8 étant celui le plus à l'extérieur. Le bord intérieur du couloir 1 est composé de deux lignes droites de 100 mètres et de deux demi-cercles de rayon 31,83 mètres.

Dans tout l'exercice on négligera la largeur des bandes de peinture délimitant les couloirs.

Pour les courses de sprint (100 m, 200 m ou 400 m), il y a huit coureurs et chacun occupe un couloir. Un coureur devant rester dans son couloir tout au long de la course, on considère que la distance qu'il parcourt est celle correspondant à la ligne la plus intérieure de son couloir.

1) On a la représentation suivante :



Vérifier que la distance d'un tour de piste complet parcourue par le coureur du couloir 1 est d'environ 400 m.

2) Dessiner le couloir 1 (avec ses deux bords) à l'échelle 1/1200.

Indiquer les calculs effectués pour réaliser la construction.

On étudie dans les questions ci-dessous la configuration d'une course de 200 m.

3) Expliquer pourquoi il y a un décalage au départ d'une course de 200 m comme sur la photographie ci-dessous :

4) Sur la représentation précédente,

- le point A correspond à la position de départ du coureur dans le couloir 1 ;
- le point P correspond à la position de départ du coureur dans le couloir 6. Pour ce coureur, le décalage correspond à la longueur de l'arc de cercle de centre O et qui a pour extrémités le point P et le point de la ligne 6 situé sur la ligne « Départ ».

a) Calculer le décalage du coureur du couloir 6 au centimètre près.

b) On peut repérer la position de départ dans le couloir par l'angle $\widehat{AOP}$ que l'on appelle α. Cet angle dépend du numéro du couloir. Calculer la mesure de l'angle α, au dixième de degré, pour le couloir 6.

c) Y a-t-il proportionnalité entre le numéro du couloir et la valeur de α ? Justifier.

Entraînement

8 **CRPE 2017 G2**

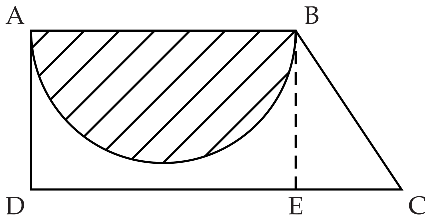
On souhaite modéliser un jardin dont l'aménagement doit être repensé. Ce jardin à la forme d'un trapèze ABCD tel que les droites (AB) et (DC) sont parallèles ; les droites (AD) et (DC) sont perpendiculaires ; AB = 50 m, AD = 30 m et DC = 70 m ; E est le point du segment [DC] tel que ABED est un rectangle.

1) Représenter le jardin à l'échelle 1/1 000ᵉ.

2) **a)** Dans un premier temps, le propriétaire désire clôturer le jardin.
Calculer la longueur de clôture nécessaire sachant qu'il prévoit l'installation d'un portail de 3,10 m de large. Donner la valeur exacte puis la valeur arrondie au mètre.

b) Dans un deuxième temps, il partage son jardin en trois parties :

- un espace potager représenté par le triangle rectangle BCE ;
- un espace de plantations florales représenté par le demi-disque hachuré de diamètre [AB] ;
- un espace engazonné sur le reste du jardin.



Calculer l'aire arrondie au mètre carré de chacune des trois parties du jardin.

9 **CRPE 2021 G4**

Dans ce problème, les figures qui sont dessinées ne sont pas représentées en vraie grandeur.

1) On souhaite partager un carré $ABCD$ de 10 cm de côté en trois parties comme indiqué sur la *figure 1*.
L est un point du segment $[BC]$ et M est le point du segment $[CD]$ tel que $DM = BL$. On note x la longueur, en centimètre, du segment $[BL]$. Les aires sont exprimées en cm^2.

a) Expliquer pourquoi $0 \leqslant x \leqslant 10$.

b) Vérifier que si $x = 2$, alors l'aire du quadrilatère grisé $AMCL$ est égale à 80 cm^2.

c) Calculer l'aire du quadrilatère grisé $AMCL$ si $x = \dfrac{3}{5}$.

d) Montrer que l'aire du quadrilatère grisé $AMCL$ en fonction de x est égale à $100 - 10x$.

e) Déterminer x pour que les trois parties aient la même aire.

2) Le triangle hachuré a été supprimé pour obtenir trois triangles ADM, AML et ALB de la *figure 2*.

a) Vérifier que si $x = 2$, alors l'aire du triangle hachuré MCL est égale à 32 cm^2.

b) Exprimer l'aire, en centimètre carré, de la partie hachurée MCL en fonction de x.

c) Montrer que l'aire du triangle grisé AML est égale à $50 - \dfrac{x^2}{2}$.

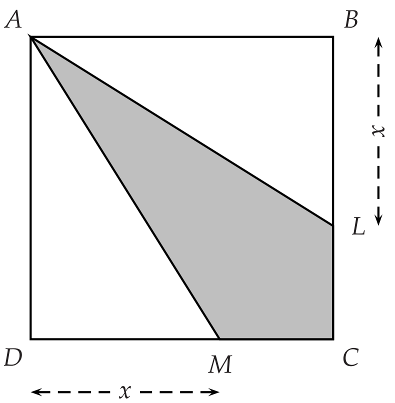


figure1

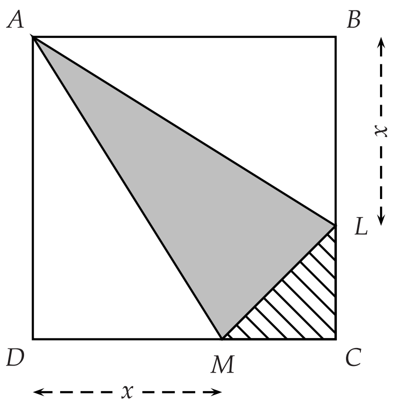
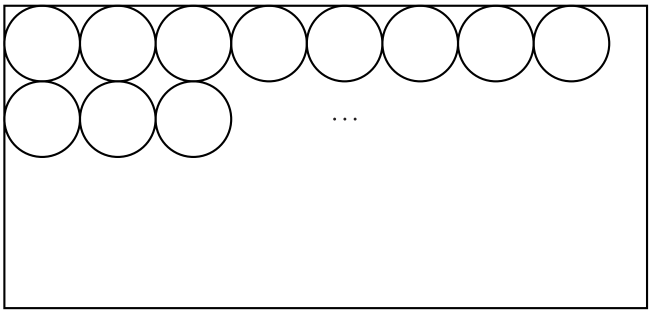


figure2

10 **CRPE 2022 - Sujet 0**

Alice veut réaliser une activité avec ses élèves de petite section de maternelle.
Elle a besoin de découper 30 disques de 14 cm de rayon dans des feuilles de dimensions 120 cm × 80 cm, c'est-à-dire de 120 cm de longueur sur 80 cm de largeur.
Elle aimerait les dessiner en occupant l'espace de chaque feuille en commençant en haut à gauche puis en continuant comme dans la figure ci-dessous (qui n'est pas à l'échelle).



1) Calculer l'aire de la feuille, en cm^2.

2) **a)** Expliquer pourquoi Alice peut tracer au maximum 4 disques dans la longueur de la feuille.

b) En déduire le nombre maximum de disques qu'elle pourra tracer dans cette feuille.

c) Combien faut-il au minimum de feuilles pour dessiner les 30 disques ?

3) Représenter à l'échelle 1/8 une feuille de dimensions 120 cm × 80 cm avec les disques qu'elle peut contenir.

4) Calculer l'aire exacte d'un disque puis donner la valeur arrondie au centimètre carré près.

Dans la suite du problème, on considèrera que l'aire d'un disque est de 616 cm^2.

5) **a)** Quelle est l'aire de papier non utilisé si Alice découpe 8 disques dans une feuille ?
Quelle proportion, exprimée en pourcentage et arrondie à l'unité de pourcentage, de l'aire totale de la feuille cela représente-t-il ?

b) Quelle est l'aire de papier non utilisé après avoir découpé 30 disques ?
Quelle proportion, exprimée en pourcentage et arrondie à l'unité de pourcentage, de l'aire totale des feuilles utilisées cela représente-t-il ?

6) Pour limiter le gaspillage de papier, Alice veut choisir le format qui permettra d'obtenir le moins de chutes (en cm^2) tout en gardant la même disposition que précédemment.
Elle a le choix entre plusieurs formats proposés par un fournisseur :

Nom	Dimensions
Raisin	65 cm × 50 cm
Jésus	76 cm × 56 cm
Impérial	80 cm × 60 cm
Grand Aigle	105 cm × 75 cm
Grand Monde	120 cm × 80 cm

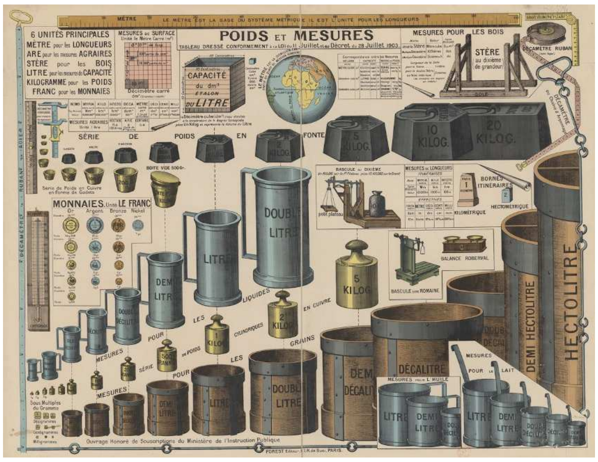
Pour obtenir les 30 disques, le format Grand Aigle permet-il d'obtenir moins de chutes (en cm^2) que le format Grand Monde ? Justifier la réponse.

Entraînement

GRANDEURS ET MESURES

14

Volumes et autres grandeurs



Poids et mesures. Tableau dressé conformément à la loi du 11 juillet et au décret du 28 juillet 1903

Un peu d'histoire

Comme vu dans le chapitre précédent, la fin du 18e siècle se voit doté d'un système métrique universel. Puis, devant la multiplicité d'unités existantes dans les différents pays, la conférence générale des poids et mesures demande à son comité dés 1948 de mettre en place une réglementation complète des unités de mesures. Il ouvre alors une enquête officielle sur l'opinion des milieux scientifiques, techniques et pédagogiques mondiaux afin d'établir un système pratique susceptible d'être adopté par tous les pays. L'accord est réalisé en 1960 sous le nom de système international d'unités (abrégé SI dans toutes les langues).

Les unités des grandeurs géométriques, cinématiques et mécaniques sont obtenues par combinaison des trois unités : le mètre (longueur), le kilogramme (masse) et la seconde (durée). Ces trois unités sont appelées unités de base pour cette raison. On a dû ajouter le kelvin (température) et la mole (quantité de matière) pour les grandeurs thermodynamiques ; l'ampère (intensité électrique) pour les grandeurs électriques ; et la candela (intensité lumineuse) pour la photométrie. On doit ajouter deux autres unités purement géométriques : le radian (angle plan) et le stéradian (angle solide), elles sont appelées unités SI supplémentaires ; on peut alors en théorie se contenter de ces neuf unités en fonction desquelles on peut exprimer toutes les grandeurs physiques par combinaisons.

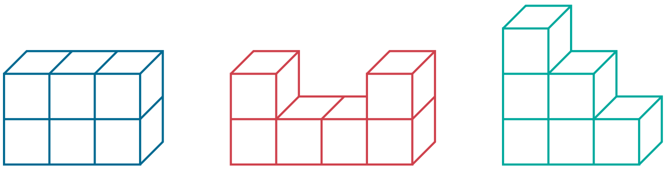
Cours

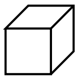
1. Volumes et capacités

■ DÉFINITION : **Volume, capacité et contenance**

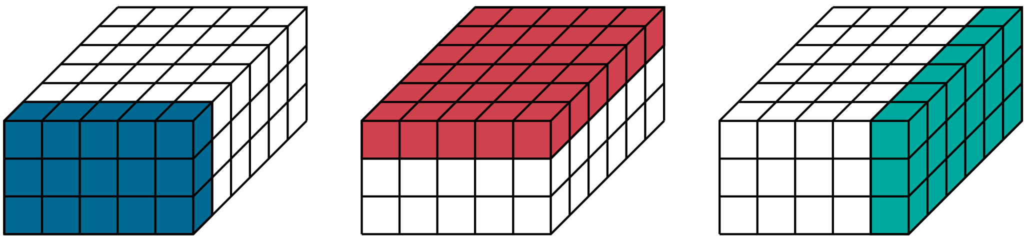
Le **volume** d'un solide est la place que celui-ci occupe dans l'espace.
La **capacité**, ou la **contenance** d'un récipient, c'est ce qu'il peut contenir.

Ces trois objets n'ont pas la même forme mais occupent la même quantité d'espace, ils ont donc le même volume.



Si l'unité de volume est un cube , le volume des ces trois solides est de 6 unités de volume.

Exemple Pour calculer le volume d'un parallélépipède rectangle, il suffit de « compter » le nombre d'unités de volume qu'il comporte. Voici par exemple trois façons de dénombrer :



face de devant : $3 \times 5 = 15$
nombre de tranches : 6
volume total : $6 \times 15 = 90$

face du dessus : $5 \times 6 = 30$
nombre de tranches : 3
Volume total : $3 \times 30 = 90$

face de côté : $3 \times 6 = 18$
nombre de tranches : 5
Volume total : $5 \times 18 = 90$

Il existe deux unités principales en dimension 3 :
– les unités de volumes en « cube » : c'est également une grandeur composée d'un produit de trois longueurs.
– les unités de capacité ou de contenance en « litre », unité dérivée des unités de volume.

■ DÉFINITION : **Mètre cube et litre**

- Lorsque l'unité de volume est un cube de 1 m d'arête, cela représente 1 $\mathbf{m}^3$.
- Le **litre** (L) est une unité de capacité valant 1 dm^3. On a alors 1 L = 1 dm^3.

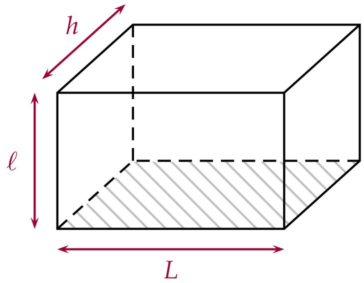
Pour effectuer un changement d'unité de volume, on reprend les même préfixes que pour les changements de longueur, et on impose pour chacun d'eux trois colonnes au tableau.

km^3			hm^3			dam^3			m^3			dm^3			cm^3			mm^3		
												hL	daL	L	dL	cL	mL			
							2	1	0	9	2	8	0	1	5					

Ainsi, pour convertir d'une unité à l'autre ; on multiplie ou on divise par 1 000, 1 000 000…

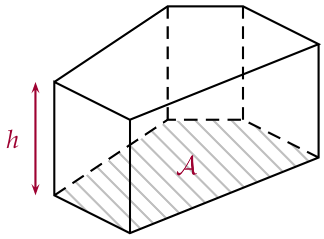
Exemple 21,092 801 5 dam^3 = 21 092,801 5 m^3 = 210 928,015 hL = 21 092 801,5 dm^3…

Parallélépipède rectangle
Le **cube** de côté c en est un cas particulier avec $L = \ell = h = c$.



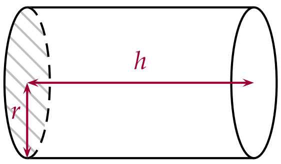
$\mathcal{V} = L \times \ell \times h$
cube : $\mathcal{V} = c^3$

Prisme
$\mathcal{A}$ est l'aire d'une base, h la hauteur du prisme.



$\mathcal{V} = \mathcal{A} \times h$

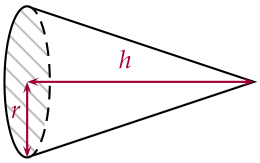
Cylindre
h est la hauteur du cylindre, et r est le rayon du disque de base.



$\mathcal{V} = \pi\, r^2\, h$

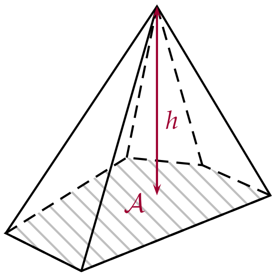
Aire de la base × hauteur

Cône
r est le rayon du disque de base et h la hauteur du cône.



$\mathcal{V} = \dfrac{1}{3} \times \pi\, r^2\, h$

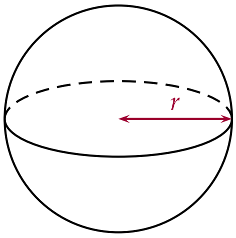
Pyramide
$\mathcal{A}$ est l'aire de la base et h la hauteur de la pyramide.



$\mathcal{V} = \dfrac{1}{3} \times \mathcal{A}\, h$

Aire de la base × hauteur ÷ 3

Sphère ou **Boule**
r est le rayon.

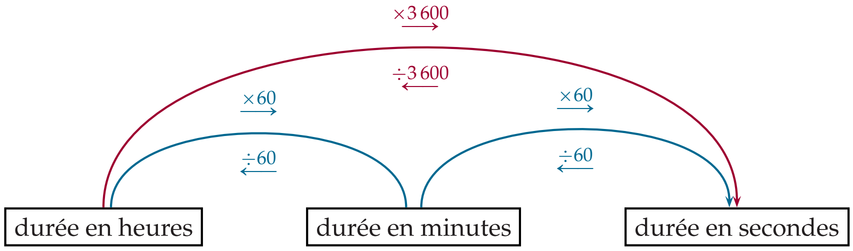


$\mathcal{V} = \dfrac{4}{3} \times \pi\, r^3$

Cours

2. Durées et horaires

La seconde (s) est l'unité du système SI permettant de caractériser une durée. Contrairement aux autres unités, elle ne suit pas un système décimal, mais hexadécimal (de base 60).



Exemple

- Convertir 170 minutes en heures et minutes.
- Convertir 1 h 25 min 36 s en secondes.

Correction

- $170 = 2 \times 60 + 50$, donc 170 min = 2 h 50 min.
- 1 h = 3 600 s et 1 min = 60 s donc
  1 h 25 min 36 s = 3 600 s + 25 × 60 s + 36 s = 5 136 s.

Pour effectuer des additions ou soustractions de durées, on peut effectuer une opération en colonne (un peu périlleuse) ou procéder de proche en proche.

Exemple

- Un train part de Montpellier à 8 h 48 min. La durée du trajet pour se rendre à Paris est de 3 h et 20 min. À quelle heure arrivera-t-il à Paris ?
- Un automobiliste part de Perpignan à 8 h 35 min et arrive à Montpellier à 10 h 20 min. Quelle est la durée de son trajet ?

Correction

- $$\begin{array}{ccccc} & 8 & \text{h} & 4 & 8 \\ + & 3 & \text{h} & 2 & 0 \\ \hline 1 & \cancel{1} & \text{h} & \cancel{6} & 8 \\ & & & & \\ 1 & 2 & \text{h} & 0 & 8 \end{array}$$
  on aligne les heures sous les heures, les minutes sous les minutes puis on additionne terme à terme. Si le nombre de minutes est supérieur à 60, on soustrait 60 min et on ajoute 1 h.
- 8 h 35 $\xrightarrow{+25\text{ min}}$ 9 h 00 $\xrightarrow{+1\text{ h}}$ 10 h 00 $\xrightarrow{+20\text{ min}}$ 10 h 20.
  La durée totale du trajet est de 1 h 45 min.

REMARQUE : attention à l'aspect hexadécimal de cette grandeur :

- lorsqu'on lit 1,5 h, cela correspond à 1 h et 0,5 h, c'est-à-dire 1h et 30 min ($0,5 \times 60$ min).
- Inversement, 2 h 15 min ne correspond pas à 2,15 h mais à 2,25 h (15 min = $\dfrac{15}{60}$ h = 0,25 h).

3. Masse

On peut mesurer une masse grâce au gramme (g) et à toutes les unités qui en découlent. Pour désigner les multiples ou les subdivisions des mesures, on utilise les préfixes identiques à ceux déjà utilisés pour les unités de longueurs :

Préfixe	kilo	hecto	déca		déci	centi	milli
Signification	1 000	100	10	1	$\dfrac{1}{10}$	$\dfrac{1}{100}$	$\dfrac{1}{1\,000}$
Unité de masse	kg	hg	dag	g	dg	cg	mg

REMARQUE : on utilise aussi la tonne pour les masses plus importantes selon la correspondance suivante : 1 tonne = 1 000 kg.

4. Grandeurs composées

DÉFINITION : Grandeur composée

Une **grandeur composée** est une grandeur qui s'exprime en fonction de plusieurs unités de base : grandeur produit lorsqu'on les multiplie et grandeur quotient lorsqu'on les divise.

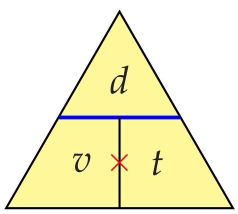
Pour les grandeurs composées, il est essentiel de faire attention à la cohérence des unités.
Quelques exemples, bien évidement non exhaustifs ;-)

Grandeurs produit	L'aire est le produit de deux longueurs.	$\mathrm{cm}^2 \longleftarrow \mathrm{cm} \times \mathrm{cm}$ $\mathcal{A}_{\text{triangle}} = \dfrac{b \times h}{2}$
	Le poids est le produit d'une masse par l'intensité de la pesanteur (9,81 N/kg à Paris).	$\mathrm{N} \longleftarrow \mathrm{kg} \times \mathrm{N/kg}$ $\mathcal{P} = m \times g$
Grandeurs quotient	La vitesse est le quotient d'une distance par un temps.	$\mathrm{m/s} \longleftarrow v = \dfrac{d}{t}$ (m, s)
	La masse volumique est le quotient d'une masse par un volume.	$\mathrm{g/cm^3} \longleftarrow \rho = \dfrac{m}{V}$ (g, cm^3)

Moyen mnémotechnique pour passer d'une écriture à l'autre dans une grandeur quotient :
on considère, par exemple, l'expression de la vitesse que l'on peut modéliser de la manière suivante :

$$d = v \times t$$

$$v = \frac{d}{t}$$

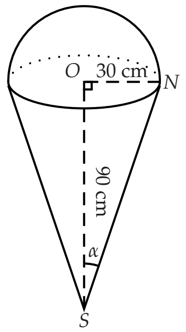


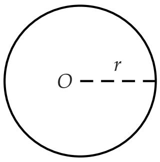
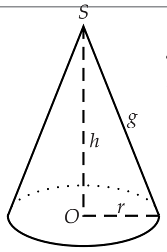
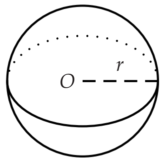
$$t = \frac{d}{v}$$

Vu au CRPE en 2022

Groupement 1 - Exercice 5 - Question 1 : Volume et capacité

Un ballon-sonde est un ballon à gaz utilisé pour faire des mesures locales dans l'atmosphère.
Dans le cadre du projet scientifique qu'elle anime pour sa classe de CM2, une professeure des écoles a reçu un petit ballon-sonde, représenté ci-contre.
Son enveloppe, composée de matières plastiques et de latex, a la forme, une fois gonflée, d'un cône de révolution surmonté d'une demi-sphère.
Les dimensions données sur la figure ci-contre sont celles du ballon-sonde au sol, sur le lieu du lâcher situé au niveau de la mer.
On pourra, si nécessaire, utiliser le formulaire ci-dessous.



	 g est la longueur d'une génératrice du cône	
Périmètre du disque : $2\,\pi\,r$	Volume du cône : $\frac{1}{3}\,\pi\,r^2\,h$	Volume de la boule : $\frac{4}{3}\,\pi\,r^3$
Aire du disque : $\pi\,r^2$	Aire de la surface latérale : $\pi\,r\,g$	Aire de la sphère : $4\,\pi\,r^2$

1) Montrer, en indiquant les étapes du calcul, que le volume exact du ballon-sonde au niveau de la mer, est égal à $45\,000\,\pi$ cm^3.
2) Donner le volume du ballon sonde en litre, arrondi à l'entier.

Exemple de corrigé.

1) Calcul du volume de la partie conique : $V_1 = \dfrac{1}{3} \times \pi \times (30\text{ cm})^2 \times 90\text{ cm} = 27\,000\,\pi\text{ cm}^3$.

Calcul du volume de la demi-sphère : $V_2 = \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{4}{3} \times \pi \times (30\text{ cm})^3\right) = 18\,000\,\pi\text{ cm}^3$.

Calcul du volume du ballon-sonde : $V = V_1 + V_2 = 27\,000\,\pi\text{ cm}^3 + 18\,000\,\pi\text{ cm}^3 = 45\,000\,\pi\text{ cm}^3$.

Le volume du ballon-sonde au niveau de la mer est de $45\,000\,\pi$ cm^3

2) Grâce a la correspondance « $1\text{dm}^3 = 1$ L », on a : $V = 45\,000\,\pi\text{ cm}^3 = 45\,\pi\text{ dm}^3 = 45\,\pi\text{ L} \approx 141{,}37$.
Le ballon a un volume d'environ 141 litres.

Groupement 3 - Exercice 1 - Question 1 : Volume

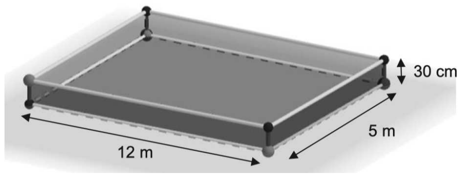
Question :	**A**	**B**	**C**	**D**
Quel est le volume d'un cylindre d'une hauteur de 6 cm et de base un disque d'un diamètre de 8 cm ?	$48\,\pi$ cm^2	$96\,\pi$ cm^2	$144\,\pi$ cm^2	$384\,\pi$ cm^2

Exemple de corrigé.

$\mathcal{V} = \pi \times r^2 \times h = \pi \times (4\,\text{cm})^2 \times 6\,\text{cm} = 96\,\pi\,\text{cm}^2$. La bonne réponse est B.

Groupement 3 - Exercice 3 - Partie B : Volume, capacité et prix

Dans cette partie, un jardin est assimilé à un rectangle qui a pour longueur 12 m et pour largeur 5 m.
On souhaite entourer le jardin d'une bordure de 30 cm de hauteur afin de remplir le pavé droit obtenu d'un mélange de terre et de terreau. On négligera, dans cette partie, l'épaisseur de la bordure du jardin.
Le mélange est composé d'un tiers de terreau et de deux tiers de terre.



1) Montrer que le volume de terreau nécessaire pour le potager est de 6 m^3.

2) Trois magasins proposent les offres suivantes :

Magasin 1	Magasin 2	Magasin 3
Livraison : 20 €	Livraison offerte	Livraison offerte pour tout achat supérieur à 50 €
0,10 € le litre de terreau	2,35 € le sac de 20 litres de terreau	5,37 € le sac de 50 litres de terreau
	20 % de remise immédiate après l'achat d'une carte de fidélité au prix de 10 €	

Quel magasin choisir pour avoir le tarif, livraison comprise, le plus économique pour les 6 m^3 nécessaires ?

Exemple de corrigé.

1) On commence par calculer le volume du bac :
$\mathcal{V}$ = longueur × largeur × hauteur = $12\,\text{m} \times 5\,\text{m} \times 0{,}3\,\text{m} = 18\,\text{m}^3$.
Le remplissage nécessite un tiers de terreau, soit $\dfrac{1}{3} \times 18\,\text{m}^3 = 6\,\text{m}^3$.
<u>On a besoin de 6 m^3 de terreau pour remplir le potager</u>.

2) On calcule le coût pour 6 m^3 pour chaque magasin, sachant que 6 m^3 = 6 000 dm^3 = 6 000 L.

- Magasin 1.
$$\left.\begin{array}{l}\text{Prix du terreau : } 6\,000 \times 0{,}10\text{ €} = 600\text{ €} \\ \text{Prix de la livraison : 20 €}\end{array}\right\}\ \text{Prix total : 600 € + 20 € = 620 €.}$$
- Magasin 2 sans carte de fidélité.
$$\left.\begin{array}{l}\text{Prix du terreau : } \dfrac{6\,000}{20} \times 2{,}35\text{ €} = 705\text{ €} \\ \text{Prix de la livraison : offerte}\end{array}\right\}\ \text{Prix total : 705 €.}$$
Magasin 2 avec carte de fidélité.
$$\left.\begin{array}{l}\text{Prix du terreau : } \left(1 - \dfrac{20}{100}\right) \times \dfrac{6\,000}{20} \times 2{,}35\text{ €} = 564\text{ €} \\ \text{Prix de la livraison : offerte} \\ \text{Prix de la carte de fidélité : 10 €}\end{array}\right\}\ \text{Prix total : 564 € + 10 € = 574 €.}$$
- Magasin 3.
$$\left.\begin{array}{l}\text{Prix du terreau : } \dfrac{6\,000}{50} \times 5{,}37\text{ €} = 644{,}40\text{ €} \\ \text{Prix de la livraison : offerte}\end{array}\right\}\ \text{Prix total : 644,40 €.}$$
<u>Le magasin le plus économique est le magasin 2, en prenant la carte de fidélité</u>.

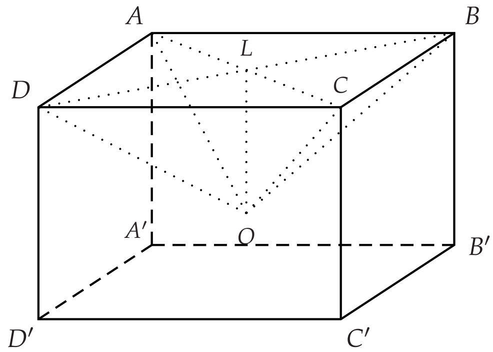
Vu au CRPE en 2022

Groupement 2 - Exercice 3 - Partie 1 - Question 3 : Volumes

On considère un pavé droit $ABCDA'B'C'D'$ avec $DD' = 5\,\text{cm}$; $DC = 6\,\text{cm}$ et $DA = 7\,\text{cm}$.
On note L le point d'intersection des diagonales $[AC]$ et $[BD]$.
On souhaite creuser ce pavé, en retirant une pyramide $OABCD$ de hauteur $[OL]$.
Dans cette partie, on suppose que $OL = 4$ cm.

1) Calculer le volume de la pyramide $OABCD$.

2) Calculer le volume du pavé creusé.



Exemple de corrigé.

1) $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABCD} \times OL = \dfrac{1}{3} \times 6 \text{ cm} \times 7 \text{ cm} \times 4 \text{ cm} = 56 \text{ cm}^3$.

Le volume de la pyramide est égal à 56 cm^3.

2) Le volume du pavé creusé s'obtient en soustrayant le volume de la pyramide $OABCD$ au volume du pavé droit $ABCDA'B'C'D'$:

$\mathcal{V} = 5 \text{ cm} \times 6 \text{ cm} \times 7 \text{ cm} - 56 \text{ cm}^3 = 210 \text{ cm}^3 - 56 \text{ cm}^3 = 154 \text{ cm}^3$.

Le volume du pavé creusé est égal à 154 cm^3.

Maîtriser les bases avec MathenPoche

Classe	N°	Thème	Dans le cours
6e	G1	Durées	2.
	G6	Volumes	1.
5e	C	Grandeurs et mesures	1. et 3.
4e	G2	Calculs de volume	1.
	G4	Grandeurs composées	3.
3e	G1	Calculs de volume	1.
	G2	Grandeurs composées	3.

1 CRPE 2005 Lyon

On rappelle que la masse volumique d'un corps, solide ou liquide, est le quotient de sa masse par son volume ; la masse volumique de l'eau est, dans des conditions normales, 1 g/cm^3.

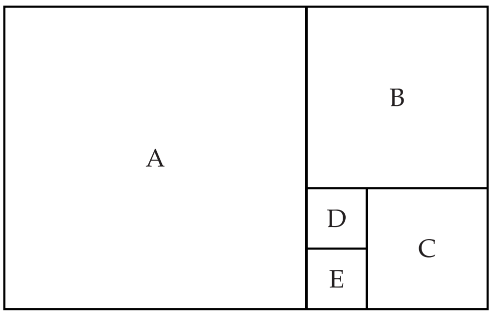
Une statuette métallique a une masse de 340 g. On dispose d'un vase, dont la masse (à vide !) est 500 g. On remplit à ras bord le vase d'eau, l'ensemble pèse 2 300 g.

Si on immerge la statue dans le vase plein, on trouve après débordement que le vase pèse 2 600 g.

1) Calculer le volume de la statue.
2) Calculer la masse volumique de la statue en g/cm^3, puis en kg/L (kilogramme par litre).
3) On vide le vase de l'eau et de la statue, puis on le remplit à ras bord d'un nouveau liquide. L'ensemble pèse 1 940 g. Quelle est la masse volumique de ce liquide ?

2 CRPE 2006 G1

La figure ci-dessous est un rectangle découpé en cinq carrés A, B, C, D, E.



1) On appelle a, b, c, d, e les longueurs respectives des côtés de ces carrés.
   Exprimer a, b, d, e en fonction de c.
2) On suppose que le rectangle représente une feuille de papier de 3 610 cm^2.
   Calculer c puis trouver les dimensions de la feuille.
3) On suppose que le rectangle représente une plaque métallique homogène. La masse de la pièce B est 100 grammes.
   Calculer la masse de la pièce A à un décigramme.
4) On suppose que le rectangle représente la vue de dessus d'un assemblage de cinq cubes. Le volume du cube A est 2 m^3. Calculer le volume du cube C. Donner la réponse en dm^3.

Entraînement

3 CRPE 2006 G4

1) Convertir les durées suivantes en seconde.
- **a)** deux tiers d'heure.
- **b)** 1,2 heure.

2) Convertir les durées suivantes en heure, minute et seconde.
- **a)** 5 532 secondes.
- **b)** 1,87 heure.

3) Quelle durée faut-il à la grande aiguille d'une montre pour parcourir un angle de 54 ° ?

4) Depuis sa position initiale à midi pile, la petite aiguille d'une montre a parcouru un angle de 68 °. Quelle est la nouvelle heure indiquée ?

5) Arnaud part de Paris à 23 h 00 pour Rio de Janeiro. Son avion se pose à Houston à 03 h 00 (heure locale) pour une escale d'une heure. Le vol entre Houston et Rio de Janeiro dure 10 heures.
Houston est à l'ouest de Paris et il y a 7 heures de décalage horaire entre ces deux villes.
Rio de Janeiro est à l'est de Houston et il y a 3 heures de décalage horaire entre ces deux villes.
- **a)** Quelle est la durée du vol entre Paris et Houston ?
- **b)** À quelle heure (heure locale) Arnaud arrive-t-il à Rio de Janeiro ?

4 CRPE 2016 G2

On admet que la vitesse de la lumière dans le vide est égale à 3×10^8 m/s.

1) Une unité astronomique (notée 1 UA) est égale à la distance moyenne Terre – Soleil ; elle vaut 150 millions de kilomètres.
Calculer le temps, exprimé en minute et seconde, nécessaire à un signal lumineux émis par le Soleil pour parvenir à la Terre, en supposant qu'il parcourt 1 UA dans le vide.

2) Une année-lumière (notée 1 AL) est la distance parcourue dans le vide par la lumière en une année julienne (c'est-à-dire 365,25 jours).
Calculer une valeur approchée, en kilomètre, d'une année-lumière.

3) Dans le système solaire, la planète la plus éloignée du Soleil est Neptune, et sa distance moyenne par rapport au Soleil est de 4,5 milliards de kilomètres.
- **a)** Exprimer cette distance en UA.
- **b)** Si on réalisait une maquette du système solaire dans laquelle Neptune est placée à 1 m du Soleil, à quelle distance du Soleil faudrait-il placer la Terre ? On donnera le résultat arrondi au millimètre.

5 CRPE 2017 G3

Pour calculer le débit D d'une perfusion en gouttes par minute, les infirmiers utilisent la formule $D = \dfrac{V}{3 \times T}$ où V est le volume, en millilitre, de la perfusion et T est le temps, en heure, que doit durer la perfusion.

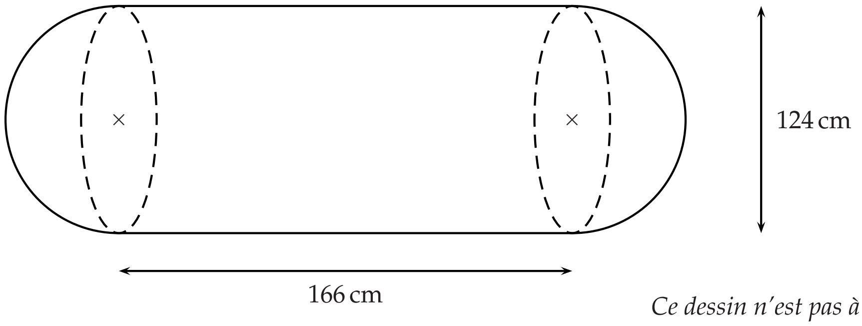
1) À quel débit doit être réglée la perfusion si le volume à transfuser est de 1,5 litre en un jour ?
Arrondir la réponse à l'unité.

2) Une perfusion est réglée sur un débit de 6 gouttes par minute.
Quel volume de liquide sera perfusé en une heure et quart ?

3) Une perfusion a un volume de 250 mL et est réglée sur un débit de 8 gouttes par minute.
Quelle devrait être la durée de la perfusion ? Donner la réponse sous la forme x heures y minutes.

6 CRPE 2017 G3

Un habitant de Poitiers utilise la toiture de son garage pour recueillir l'eau de pluie et la stocker dans une cuve enterrée. Vue du ciel, la toiture à la forme d'un rectangle de 4 mètres sur 6,2 mètres.
La cuve est constituée de deux demi-sphères de 124 cm de diamètre et d'un cylindre de révolution de diamètre 124 cm et de longueur 166 cm.
Le dimanche 29 mai 2016, il a été relevé une hauteur de 31,7 mm de précipitations à Poitiers (*Source : Info Climat*).



Ce dessin n'est pas à l'échelle

1) Vérifier que le volume d'eau, en litre, tombé sur la toiture de la grange ce jour là est d'environ 790 L.
2) Sachant que 90 % de l'eau de pluie tombée sur le toit du garage est récupérée dans la cuve, calculer le volume d'eau, en litre, réellement recueilli dans le réservoir ce jour là.
3) Est-il vrai que, ce jour là, un peu moins d'un quart de la citerne a été rempli ?

7 CRPE 2018 G2

Une canette est fabriquée à partir d'une feuille plane de tôle d'aluminium d'épaisseur 130 micromètres (μm). Un micromètre est égal à un millionième de mètre.
La masse volumique de l'aluminium est 2 700 kg/m^3.
On s'intéresse aux canettes classiques dont le rayon est de 3,3 cm et dont la surface de métal nécessaire est de 268,42 cm^2. On admet que l'anneau pour ouvrir la canette et le rivet de liaison entre l'anneau et le couvercle ont une masse de 1,4 g et que la masse d'aluminium nécessaire pour souder le couvercle au reste de la canette est 1,9 g.

1) Déterminer, au dixième de gramme près, la masse d'aluminium nécessaire pour fabriquer une cannette classique.
2) Il faut 9 kg d'aluminium pour fabriquer un certain type de vélo. Estimer le nombre de cannettes classiques nécessaires pour obtenir l'aluminium pour fabriquer un tel vélo.

Entraînement

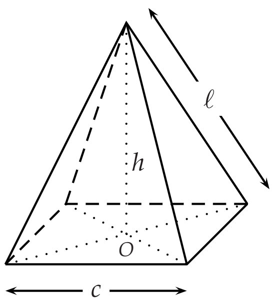
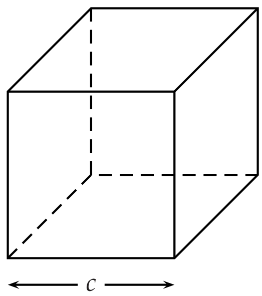
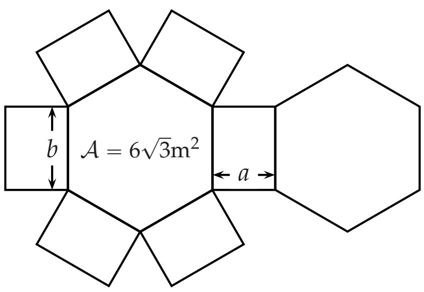
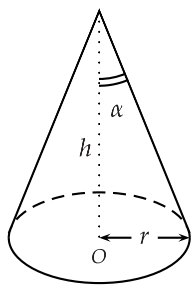
8 **CRPE 2018 G1-G3**

Pour chacune des affirmations suivantes indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.
Une réponse exacte mais non justifiée ne rapporte aucun point. Une réponse fausse n'enlève pas de point.

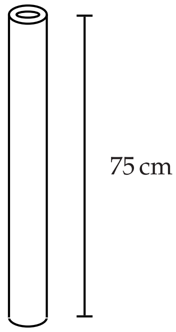
1) On considère un cube dont la surface totale extérieure mesure $576\,\text{cm}^2$.
   Affirmation 1 : Son volume est inférieur à 1 litre.
2) **Affirmation 2 :** Les dimensions de mon échantillon de parfum sont cinq fois plus petites que celles de mon flacon habituel. Il y a donc 25 fois moins de parfum dans l'échantillon que dans le flacon habituel.

9 **CRPE blanc 2019 Réunion**

La nuit dernière, un crime s'est déroulé au *Gîte des hauts*, gîte spécialisé dans les tentes atypiques : monsieur Mathrice a été assassiné dans sa tente puis déplacé à l'accueil.

Tente 1	**Tente 2**
	
Base carrée de centre O, la hauteur h est perpendiculaire à la base. $c = 3{,}7\,\text{m}$ et $\ell = 3{,}2\,\text{m}$.	Toutes les faces sont des carrés, deux faces consécutives sont orthogonales. $c = 1{,}9\,\text{m}$.
Tente 3	**Tente 4**
	
Patron d'un solide, les hexagones sont réguliers, les rectangles sont identiques. $a = 1{,}8\,\text{m}$ et $b = 4\,\text{m}$.	Base circulaire de centre O, la hauteur h est perpendiculaire à la base. $r = 1{,}5\,\text{m}$ et $\alpha = 35°$.

1) Nommer les quatre solides formant les quatre tentes.
2) a) Donner la hauteur des tentes 2 et 3.
   b) Déterminer la hauteur de la tente 4 (arrondir au cm).
   c) Déterminer la hauteur de la tente 1 (arrondir au cm).
3) Donner le volume de chaque tente au mètre cube près.
4) Monsieur Mathrice mesurait 1 m 92, il avait donc demandé une tente suffisamment grande pour qu'il puisse tenir debout en son centre. En déduire le lieu où il a été assassiné.



10 **CRPE 2009 G4**

On a représenté ci-contre un tube creux en aluminium en perspective.
Son diamètre intérieur est 8 cm, son diamètre extérieur est 12 cm.
L'aluminium a une masse volumique de 2,7 g/cm^3. On veut transporter un certain nombre de ces tubes dans un camion dont la charge utile ne peut dépasser 14 tonnes.
En supposant que le volume du camion est suffisant, combien peut-on transporter de tubes au maximum ? *On utilisera 3,14 comme valeur approchée de π.*

TRANSVERSAL 15

Algorithmes et programmation

Scratch

Un peu d'histoire

Le numérique fait maintenant partie intégrante des programmes de mathématiques. L'introduction dans les programmes de mathématiques à tous niveaux du codage et de l'algorithmique a transformé petit à petit l'utilisation de langages de programmation vers des logiciels utilisant des pseudo-langages et des langages visuels. Les premiers langages de programmation sont antérieurs aux ordinateurs modernes : dès 1801, les cartes perforées du *métier Jacquard* font figure d'algorithmes puisqu'elles permettent de générer les mouvements du métier à tisser de manière automatique.

À l'école et au collège on utilise régulièrement le logiciel scratch, et d'autres applications qui y ressemblent : il s'agit de déplacer des blocs qui s'imbriquent en se suivant ou les uns dans les autres afin de former des programmes.

Cours

1. Algorithmes et langages de programmation

DÉFINITION : Algorithme

Un **algorithme** est une liste ordonnée et logique d'instructions permettant de réaliser une tâche de manière automatisée.

Généralement, un algorithme se compose en trois parties : les données de départ (entrées), la liste des instructions (traitement), le résultat (sortie).

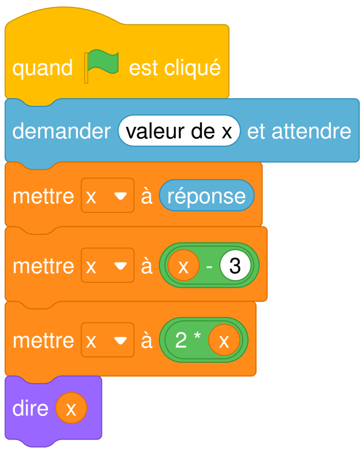
Exemple Les recettes de cuisine sont des d'algorithmes.

Étape 1 : données	Étape 2 : instructions	Étape 3 : résultat
3 oeufs 150 g de farine 100 g de sucre 125 g de beurre 4 bananes péi rhum et vanille	1 - mélanger les oeufs et le sucre 2 - ajouter le beurre fondu, puis la farine 3 - couper les bananes en morceaux et les ajouter au mélange 4 - aromatiser avec le rhum et la vanille 5 - verser le tout dans un moule à cake beurré et fariné 6 - laisser cuire environ 30 mn au four thermostat 6	on obtient un succulent gâteau-banane !

Un algorithme peut-être traduit, grâce à un langage de programmation, en un programme exécutable par un ordinateur. Ce langage peut être un langage formel, un langage textuel, un langage visuel (il s'agit en fait d'un pseudo-code qui est traduit par un logiciel en langage compréhensible par l'ordinateur).

Exemple Programmation d'un algorithme qui calcule $2(x-3)$ pour un réel x donné.

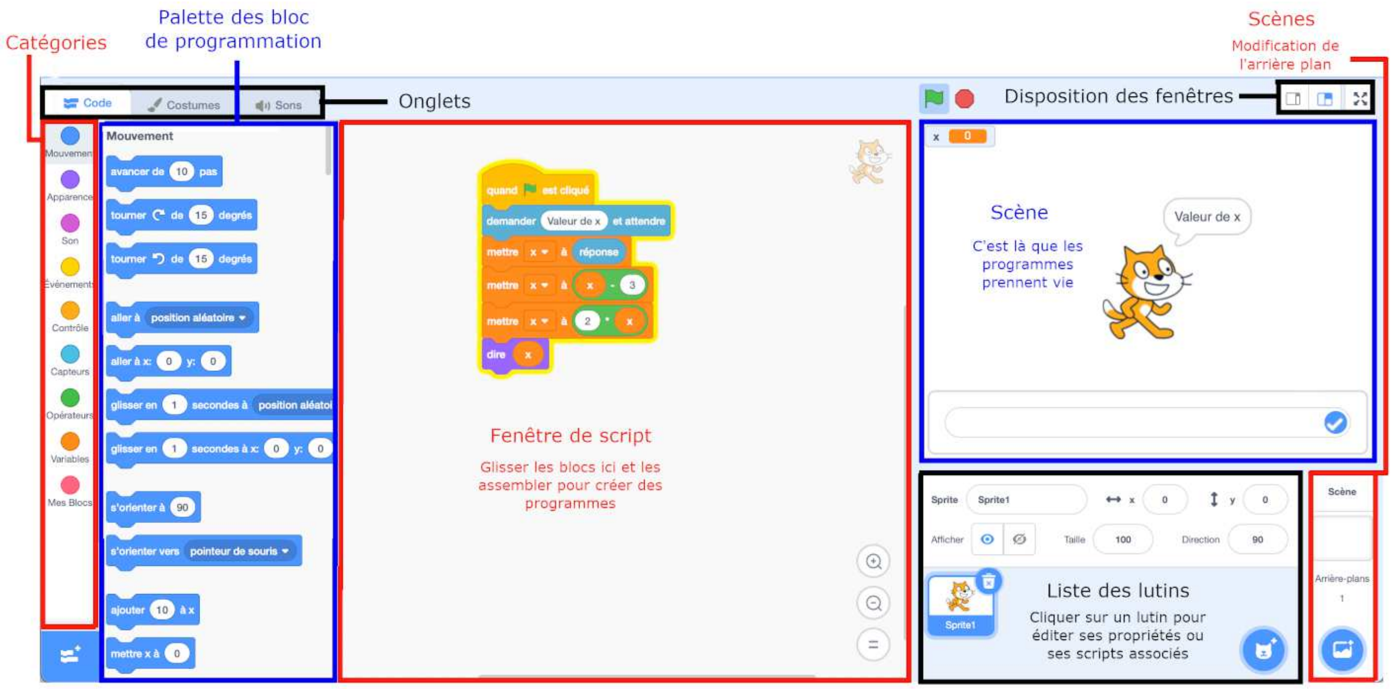
Langage courant	Langage python 3	Langage scratch

Choisir un nombre x
lui soustraire 3
multiplier le résultat par 2
donner le résultat
	`x=input('x=')`
	`x=x-3`
	`x=2*x`
	`print(x)`
		

Actuellement, les logiciels préconisés dans le secondaires sont Scratch au collège et Python (après des années d'Algobox) au lycée. Les sessions relativement récentes (à partir de 2015) du DNB et du CRPE ont vu apparaître de multiples exercices basés sur Scratch.

2. Utilisation de Scratch

Scratch est téléchargeable gratuitement. Développé par le MIT, c'est un langage de programmation qui facilite la création d'histoires interactives, de dessins animés, de jeux, de simulations numériques... La version actuelle est la 3.0 qui offre une inetrface graphique légèrement différente à sa prédécesseur, la 2.0.



Tout le code est directement inscrit dans la langue choisie sous forme de blocs de couleur permettant d'exécuter une action précise. Il existe plusieurs catégories de blocs :

Blocs de mouvement	Permettent de déplacer et positionner les lutins.
Bloc d'apparence	Servent à modifier l'apparence des lutins.
Blocs de son	Permettent de jouer des sons.
Blocs d'événements	Permettent de lancer des scripts ou déclencher des événements.
Blocs de contrôle	Servent à contrôler l'exécution du script (pause, conditions, répétitions, arrêt).
Capteurs	Servent à mesurer ou détecter certaines valeurs et à poser des questions.
Blocs d'opérateurs	Servent à effectuer des opérations et à manipuler les chaînes de caractères.
Blocs de données	Permettent de stocker des informations en mémoire.
Blocs personnels	Création de blocs personnels permettant de répéter certaines actions.

Dans scratch 3.0, il est également possible d'ajouter des extensions comme le stylo ou des extensions pour programmer des robots éducatifs.
Au lieu d'écrire du texte, on manipule des blocs que l'on assemble de manière logique et ordonnée en suivant un algorithme.

Cours

Pour qu'un programme puisse démarrer, il faut un bloc de départ événementiel, qui peut être activé en cliquant sur le drapeau vert ou en pressant sur une touche : quand 🏁 est cliqué ou Quand espace ▾ est cliqué

Une boucle permet d'itérer une séquence indéfiniment ou un certain nombre de fois.

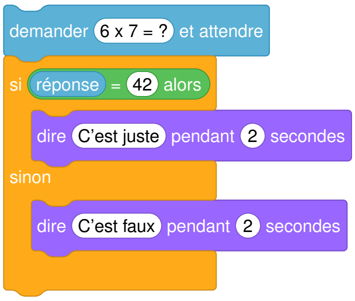
Exemple

Correction

Ce script propose d'utiliser le lutin « stylo » pour dessiner un carré de côté 10 pixels.
La boucle crée un segment de longueur 10 pixels puis fait tourner la direction d'écriture du crayon de 90° dans le sens horaire (ou sens indirect).
Cette boucle, itérée 4 fois, trace le carré.

Une instruction conditionnelle (si et si-sinon) permet d'engager une action suivant qu'une condition est réalisée ou non.

Exemple

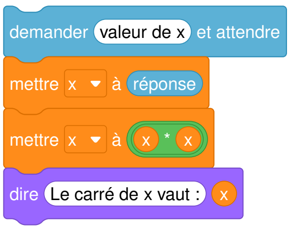


Correction

Le bloc de capteur demande le résultat de 6×7 et met en mémoire la réponse dans le bloc « réponse ».
Si la réponse est 42, alors le programme écrit que « c'est juste » pendant 2 secondes, et sinon (donc si la réponse est fausse), il dit que « c'est faux ».

Une variable est un nom donné à un emplacement en mémoire contenant une information.

Exemple

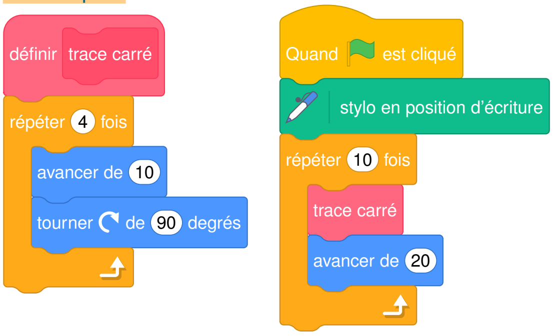


Correction

Une variable x a été crée.
On affecte la valeur demandée par le bloc capteur (stocké dans « réponse ») à la variable x.
Ensuite, on affecte la valeur de $x \times x$, c'est-à-dire x^2 à la variable x.
Le carré du nombre demandé est alors affiché.

Un bloc personnalisé permet de définir un programme annexe à utiliser dans le programme principal par exemple.

Exemple



Correction

Le premier script propose de définir un carré de côté 10 pixels comme dans le premier exemple. C'est un programme annexe.
Dans le second script, la boucle de répétition trace un carré de côté 10 pixels, puis avance de 20 pixels.
Cette boucle, répétée 10 fois, trace donc 10 carrés de côté 10 pixels sur une même ligne, séparés entre eux de 10 pixels.

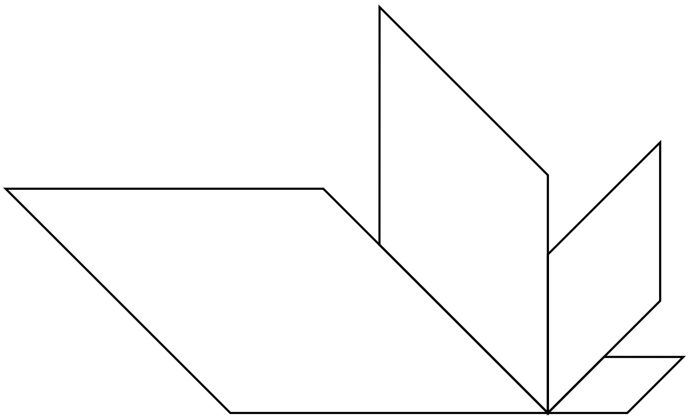
Groupement 1 - Exercice 4 : Scratch et géométrie

Le programme ci-contre (*programme 1*) a été écrit avec le logiciel Scratch.

1) En prenant $C = 50$ et 1 cm pour 10 pixels, tracer la figure construite en utilisant le *programme 1*.

2) Quelle est la nature de la figure tracée ? Justifier la réponse.

3) On écrit le *programme 2* en utilisant le bloc précédent, afin d'obtenir la figure représentée ci-après.

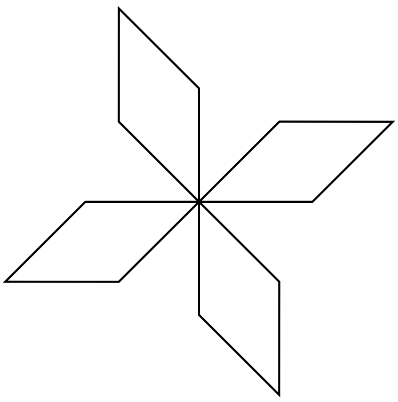


Rappel :

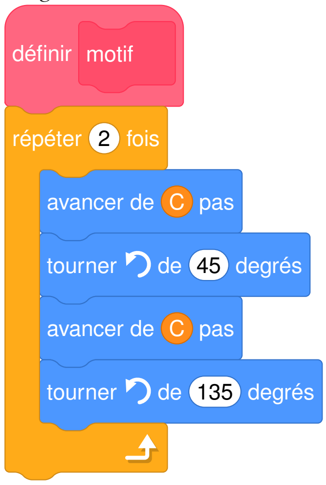
a) Quelles valeurs attribuer aux lettres A et N dans le programme 2 pour obtenir la figure correspondante ?

b) Quelle est la valeur de la variable C une fois le programme exécuté ?

4) Comment peut-on modifier le programme 2 pour obtenir la figure ci-contre pour laquelle chaque segment mesure 30 pixels ?



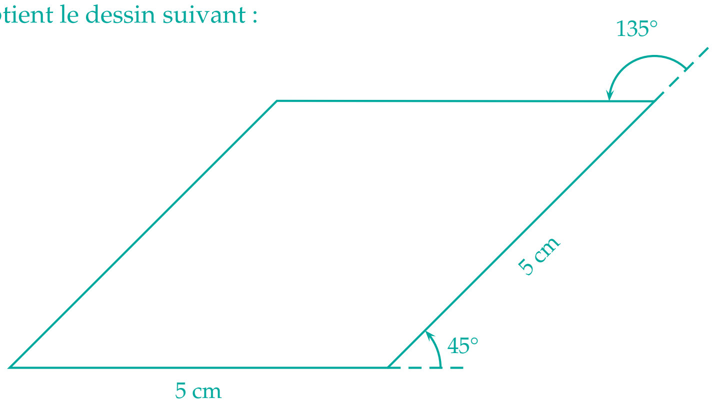
Programme 1



Programme 2

Exemple de corrigé.

1) On obtient le dessin suivant :



2) La première répétition fait tracer deux segments consécutifs. À la fin de la boucle, la rotation vers la gauche de 135° implique un angle de $45° + 135° = 180°$ entre le premier et le troisième segment. Ils sont donc parallèles.
Le dernier segment, après une rotation de 45°, est parallèle au deuxième puisqu'ils forment un angle de $135° + 45° = 180°$.
On a donc un quadrilatère ayant ses côtés opposés parallèles deux à deux, c'est un parallélogramme.
De plus, les quatre côtés sont de même mesure (50 pixels), c'est un losange de côté 50 pixels.

3) **a)** A correspond à l'angle de rotation du motif dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, il est ici de 45° et N correspond au nombre de répétitions du motif, c'est-à-dire 4.
On peut choisir $A = 45$ et $n = 4$ pour obtenir la figure donnée.

b) C vaut initialement 30, et il est augmenté de 30 à chaque fin de répétition. En fin de programme, il vaut donc $30 + 4 \times 30 = 150$ (cependant, le côté du dernier losange tracé vaut 120).

4) Il suffirait de donner la valeur de 90 à A et de supprimer la ligne « ajouter 30 à C ».

Vu au CRPE en 2022

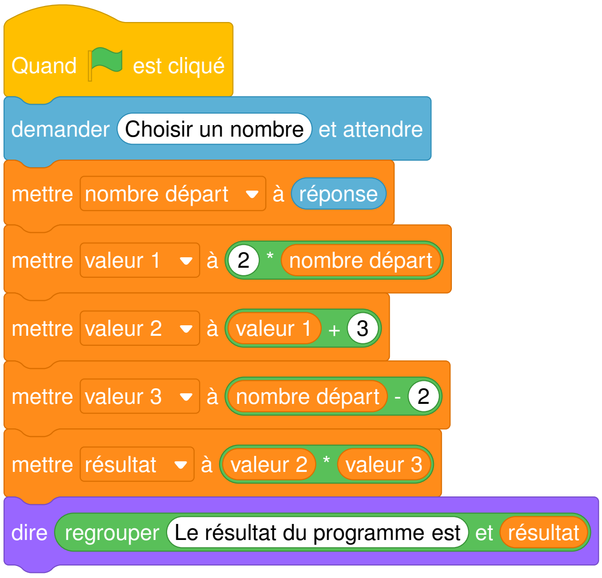
Groupement 2 - Exercice 4 - Question 1 : Scratch et calculs

Adam a réalisé le programme ci-contre à l'aide du logiciel Scratch.

1) Montrer que si le nombre de départ est 3, le résultat est égal à 9.

2) Quel est le résultat donné par le programme si le nombre de départ est 2,4 ?

3) Soit x le nombre de départ. Montrer que le programme d'Adam retourne le nombre $2x^2 - x - 6$.



Exemple de corrigé.

1) On obtient les valeurs suivantes :

nombre départ $\leftarrow 3$

valeur 1 $\leftarrow 2 \times 3 = 6$

valeur 2 $\leftarrow 6 + 3 = 9$

valeur 3 $\leftarrow 3 - 2 = 1$

résultat $\leftarrow 9 \times 1 = 9$

Si le nombre de départ est 3, alors le résultat est 9.

2) On obtient les valeurs suivantes :

nombre départ $\leftarrow 2,4$

valeur 1 $\leftarrow 2 \times 2,4 = 4,8$

valeur 2 $\leftarrow 4,8 + 3 = 7,8$

valeur 3 $\leftarrow 2,4 - 2 = 0,4$

résultat $\leftarrow 7,8 \times 0,4 = 3,12$

Si le nombre de départ est 2,4, alors le résultat est 3,12.

3) On obtient les valeurs suivantes :

nombre départ $\leftarrow x$

valeur 1 $\leftarrow 2 \times x = 2x$

valeur 2 $\leftarrow 2x + 3$

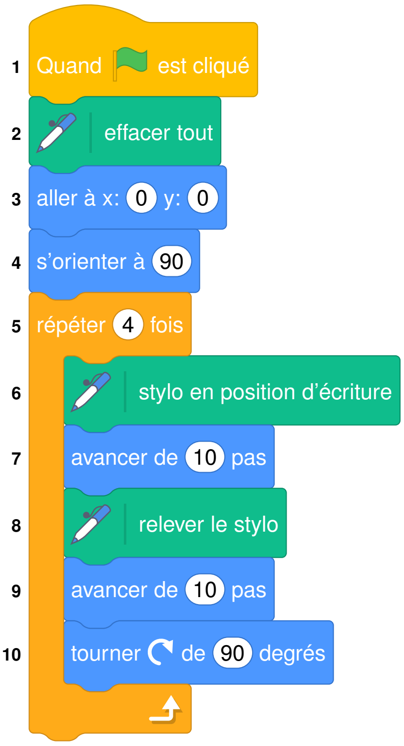
valeur 3 $\leftarrow x - 2$

résultat $\leftarrow (2x + 3) \times (x - 2)$

Si le nombre de départ est x, alors le résultat est $(2x + 3)(x - 2)$.

Groupement 3 - Exercice 4 : Scratch et géométrie

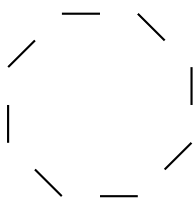
Voici un programme écrit avec le logiciel Scratch.



1) Représenter la figure obtenue lorsque le programme est exécuté. On prendra 1 mm pour 1 pixel (correspondant à 1 pas).

2) Marie souhaite obtenir la figure ci-dessous où chaque tiret mesure 10 pixels et est séparé du précédent de 10 pixels. Quelle(s) modification(s) doit-elle apporter au programme ?

3) **a)** Léo souhaite modifier le programme donné pour que l'on obtienne la figure ci-dessous.
Quelle(s) modification(s) doit-il apporter au programme de départ ?



b) Quel type de transformation géométrique permet de passer d'un tiret à un autre ?

Exemple de corrigé.

1) On obtient la figure suivante :

2) Il y a 8 tirets, donc il faut 8 répétitions, et les tirets sont alignés, ce qui signifie qu'il n'y a pas de rotation. Par conséquent, en ligne 5, il fait « répéter 8 fois » et supprimer le ligne 10.

3) **a)** Il y a 8 tirets, donc il faut 8 répétitions, et la rotation à droite est de 45°. En ligne 5, on remplace 4 par 8 et en ligne 10, il faut changer 90 en 45.

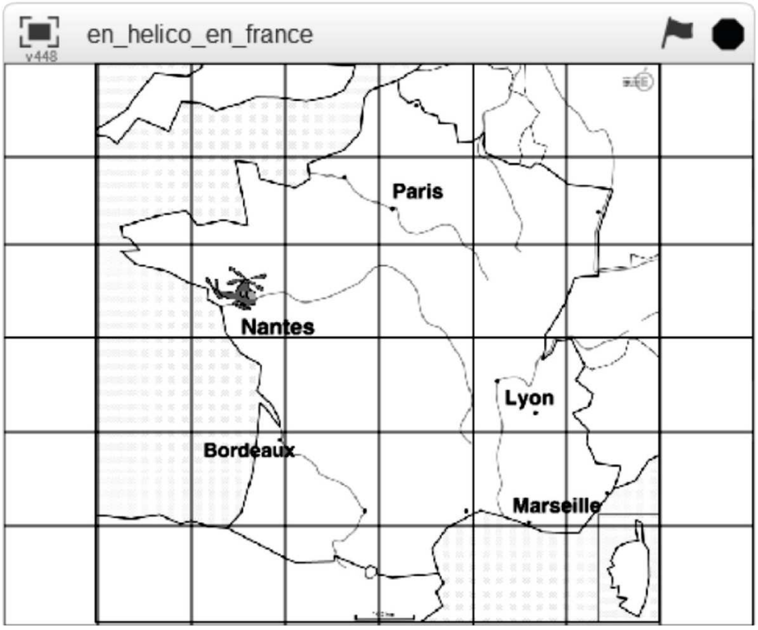
b) On passe d'un tiret à l'autre par rotation de centre le centre de la figure et d'angle 45°.

Maîtriser les bases avec MathenPoche

Classe	N°	Thème	Dans le cours
6e	A1	Algorithme et programmation	1. et 2.
5e	A1	Algorithme et programmation	1. et 2.
4e	A1	Algorithme et programmation	1. et 2.
3e	A1→A8	Algorithme et programmation	1. et 2.

1 **CRPE 2018 G2**

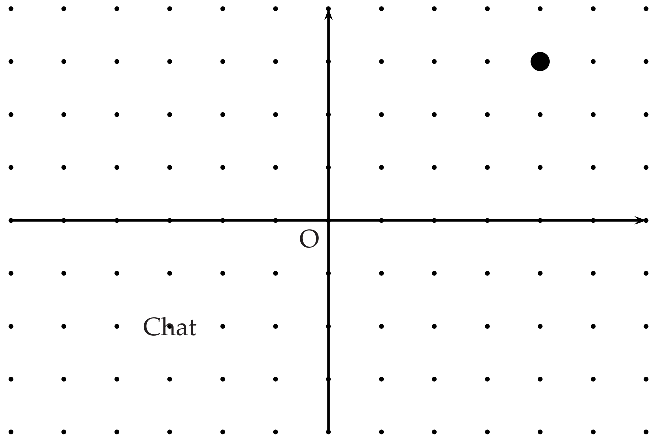
Le programme ci-dessous a été écrit avec le logiciel Scratch pour faire se déplacer le lutin « hélicoptère » de la case « Nantes » à la case « Paris » sur l'arrière-plan ci-dessOus, c'est-à-dire pour « avancer » de deux cases et « monter » d'une case.



Un élève souhaite modifier le programme pour que l'hélicoptère se déplace de la case « Nantes » à la case « Lyon ». Par quels nombres doit-il remplacer les nombres « 120 », « 270 » et « 60 » ? Justifier votre réponse.

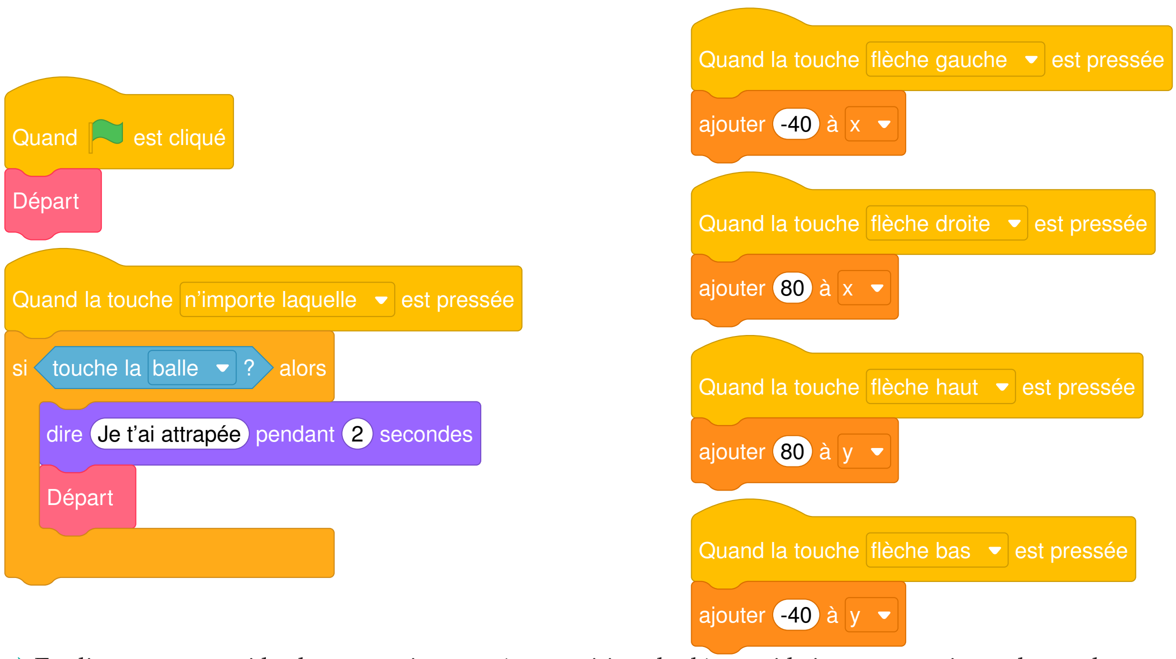
2 **DNB 3017**

L'image suivante représente la position obtenue au déclenchement du bloc « Départ » d'un programme.
L'arrière-plan est constitué de points espacés de 40 unités. Le chat a pour coordonnées $(-120\,;\,-80)$.
Le but du jeu est de positionner le chat sur la balle représentée par le petit disque.



1) Quelles sont les coordonnées du centre de la balle représentée dans cette position ?

2) Dans cette question, le chat est dans la position obtenue au déclenchement du bloc départ.
Voici le script du lutin « chat » qui se déplace.



a) Expliquer pourquoi le chat ne revient pas à sa position de départ si le joueur appuie sur la touche → puis sur la touche ←.

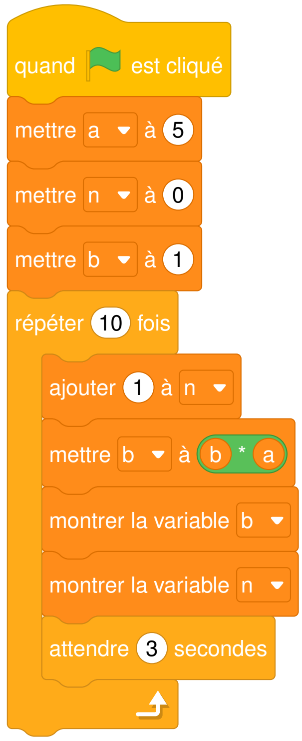
b) Le joueur appuie sur la succession de touches suivante : → → ↑ ← ↓. Quelles sont les coordonnées x et y du chat après ce déplacement ? Justifier.

c) Parmi les propositions ci-dessous, laquelle permet au chat d'atteindre la balle ?

déplacement 1	déplacement 2	déplacement 3
→ → → → → → → ↑ ↑↑ ↑ ↑	→ → → ↑ ↑ ↑ → ↓ ←	↑ → ↑ → ↑ → → ↓ ↓

3) Que se passe-t-il quand le chat atteint la balle ?

3 CRPE 2018 G1



Voici une copie d'écran d'un algorithme réalisé à l'aide du logiciel Scratch.

1) Quelles sont les valeurs des variables a, b et n à la fin du premier passage dans la boucle, puis à la fin du second passage ?
2) Que réalise ce programme ?

4 CRPE 2017 G2

Déterminer, sans justifier, quelle figure géométrique est tracée lorsque l'on exécute les programmes suivants.

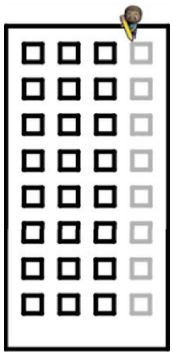
Entraînement

5 **CRPE 2018 G3**

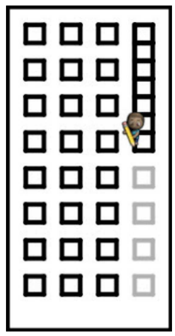
Un élève qui utilise le site « code.org » doit écrire un programme pour repasser au crayon noir les petits carrés en gris sur le *dessin 1*. Il propose le programme ci-dessous :

Quand il lance le programme, il obtient le *dessin 2*.

Que faut-il modifier dans le programme pour obtenir le dessin attendu ?



dessin 1



dessin 2

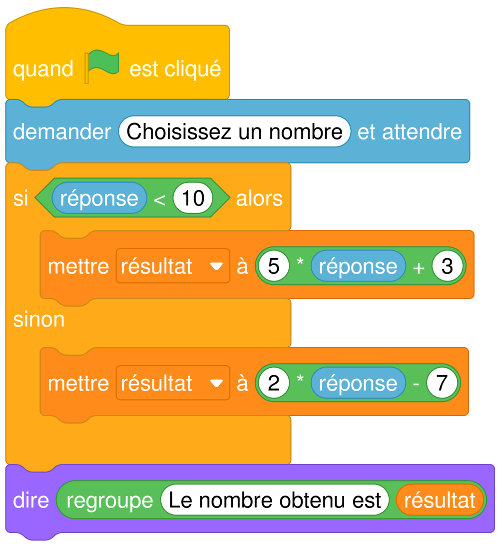
6 **CRPE 2017 G1**

On utilise le programme ci-dessous.

1) Quel résultat s'affiche si l'on choisit d'entrer le nombre 7 ?

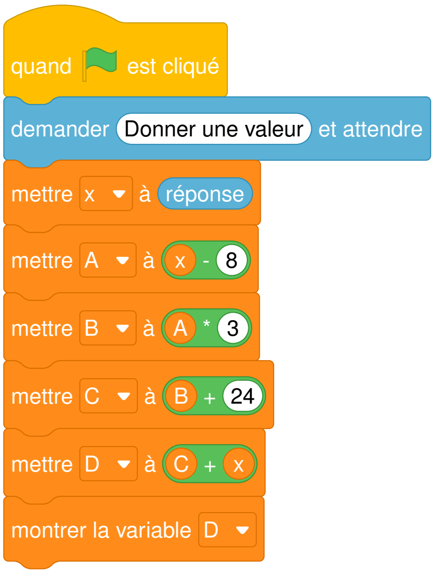
2) Quel résultat s'affiche si l'on choisit d'entrer le nombre 12,7 ?

3) Quel résultat s'affiche si l'on choisit d'entrer le nombre -6 ?



7 **CRPE 2017 G4**

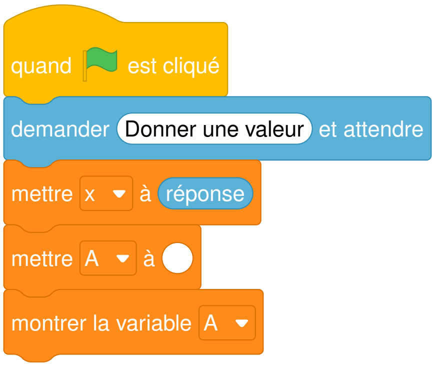
Voici un programme de calcul :



1) **a)** On applique ce programme de calcul au nombre 10. Montrer que le résultat affiché à la fin est 40.

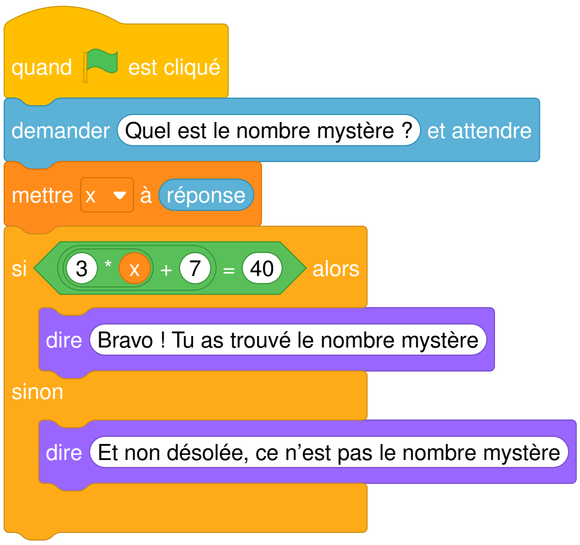
b) On applique ce programme de calcul au nombre -2. Quel va être le résultat affiché à la fin ? Justifier.

2) Une modification possible de l'algorithme est copiée ci-dessous, mais il manque une instruction à la 4$^{\text{ème}}$ ligne.



Comment compléter la 4$^{\text{ème}}$ ligne, là où il y a un carré blanc, par l'expression la plus simple possible pour que cet algorithme affiche le même résultat que l'algorithme précédent quel que soit le nombre entré ?

8 **CRPE 2017 G3**



Un élève utilise le programme ci-contre.

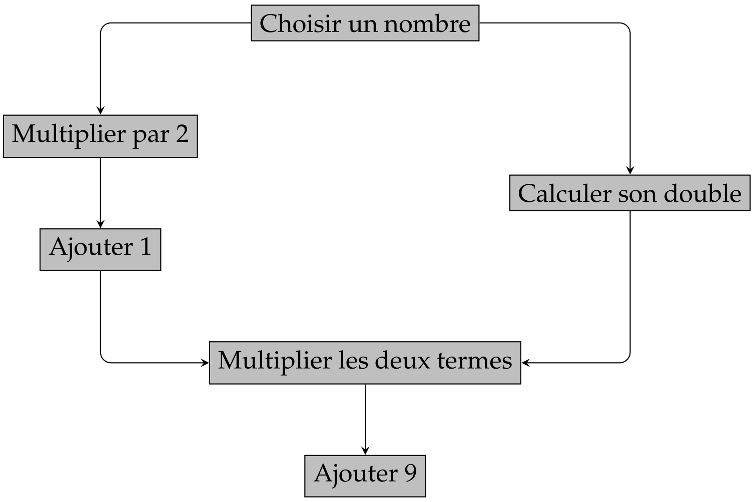
1) Quelle réponse le logiciel va-t-il afficher si l'élève entre la valeur 5 ? Expliquer pourquoi.

2) Quel nombre l'élève doit-il rentrer pour obtenir en retour le message « Bravo ! Tu as trouvé le nombre mystère. » ?

Entraînement

9 CRPE 2020 G4

1) Voici un programme de calcul :

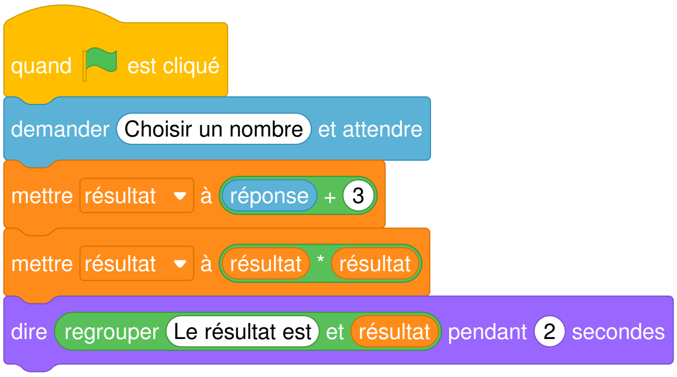


a) Effectuer le programme de calcul en choisissant 2 comme nombre de départ et montrer qu'on obtient 29.

b) Quel résultat obtient-on en choisissant $\dfrac{2}{3}$ comme nombre de départ ?

c) Exprimer le résultat obtenu avec ce programme de calcul en prenant x comme nombre de départ.

2) On teste un autre programme de calcul avec le logiciel Scratch :



a) Effectuer le programme de calcul en choisissant 2 comme nombre de départ et montrer qu'on obtient 25.

b) Quel résultat obtient-on en choisissant 1,5 comme nombre de départ ?

c) Exprimer le résultat obtenu avec ce programme de calcul en prenant x comme nombre de départ.

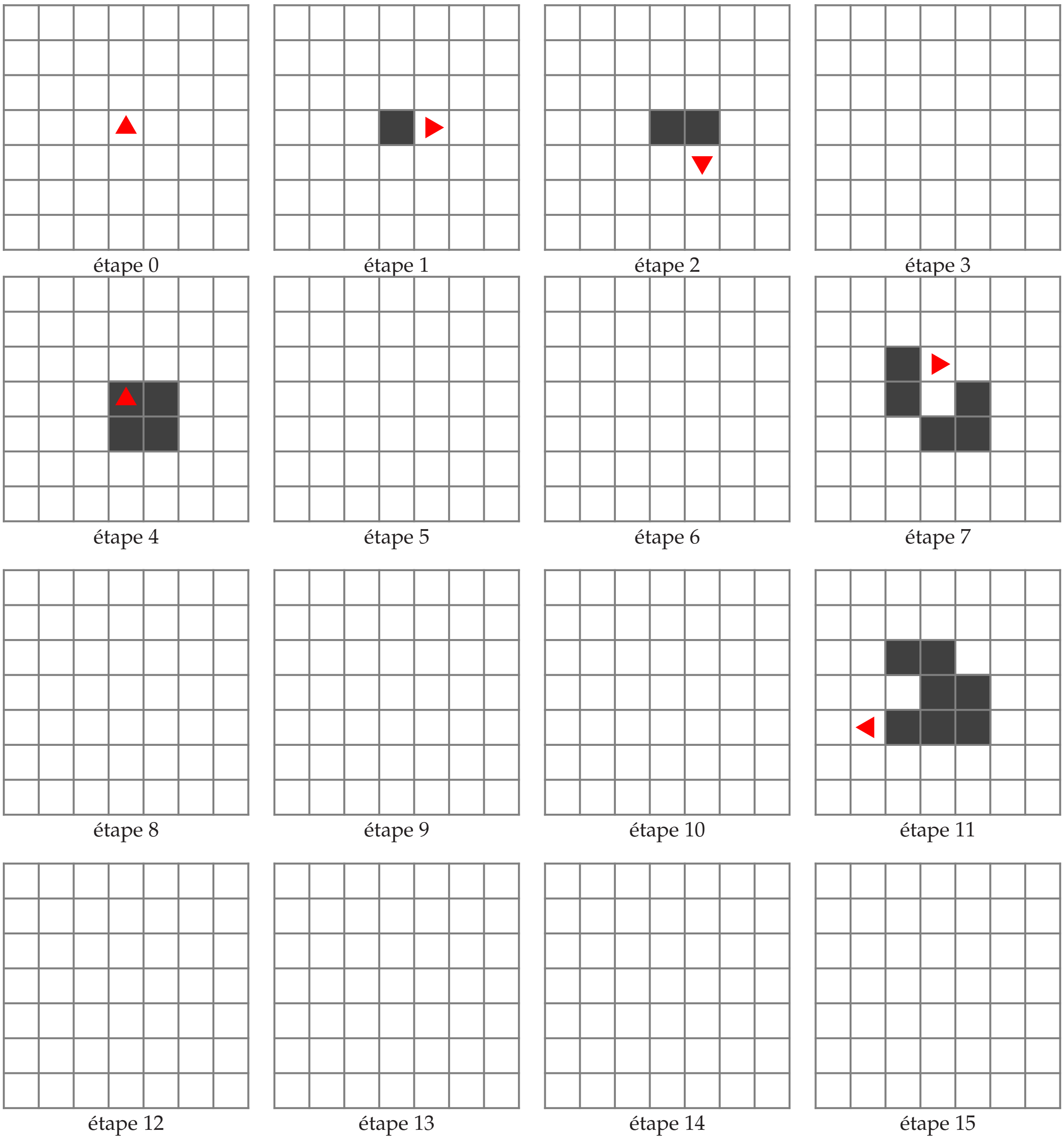
3) Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de x les deux programmes donnent le même résultat. Justifier la réponse.

10 **La fourmi de Langton**

La fourmi de Langton, du nom de son inventeur scientifique américain *Christopher Langton*, est un petit programme informatique inventé vers la fin des années 1980. Il consiste en un automate qui se déplace dans un quadrillage suivant des règles suivantes :

- au départ, toutes les cases sont de la même couleur, ici blanches ;
- si la fourmi est sur une case blanche, elle tourne de 90 ° vers la droite, change la couleur de la case en noir et avance d'une case ;
- si la fourmi est sur une case noire, elle tourne de 90 ° vers la gauche, change la couleur de la case en blanc et avance d'une case.

Compléter dans les quadrillages ci-dessous les quinze premières étapes du déplacement de la fourni.



Ce programme modélise le fait qu'un ensemble de comportements élémentaires peut donner lieu à un comportement complexe. Pour voir ce qu'il se passe ensuite : *La fourmi de Langton, chaîne YouTube Science étonnante*.

RESSOURCES...

Ressources institutionnelles

édu1 J'enseigne au cycle 1. Programme, recommandations pédagogiques, ressources d'accompagnement, évaluation et infothèque.

édu2 J'enseigne au cycle 2. Programme, à consulter, évaluation, ressources d'accompagnement et infothèque.

édu3 J'enseigne au cycle 3. Programme, à consulter, évaluation, ressources d'accompagnement et infothèque.

con22 Sujets de concours.

crp22 Le concours CRPE : s'informer, s'inscrire.

Bibliographie et articles

abi13 Abiteboul (2013). *Proposition d'orientations générales pour un programme d'informatique à l'école primaire*. EPI

asp15 Aspinall B. (2015). *Page de Brian Aspinall*.

bou12 Boule F. (2012). *Le calcul mental au quotidien*. Cycles 2 et 3 (nouvelle édition mise à jour). Canopé, CRDP.

bri98 Brissiaud R. (1998). *Les fractions et les décimaux au CM1*. Actes du XXV^{e} colloque des formateurs de mathématiques, IREM Brest.

bri03 Brissiaud R. (2003). *Comment les enfants apprennent à calculer* (nouvelle édition). Retz.

bri07 Brissiaud R. (2007). *Premiers pas vers les maths*. Les chemins de la réussite à l'école maternelle. Retz.

bri13 Brissiaud R. (2013). *Apprendre à calculer à l'école* – Les pièges à éviter en contexte francophone. Retz.

bro87-1 Brousseau G. et N. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*. IREM Bordeaux.

bro87-2 Brousseau G. (1987). *Le puzzle de Brousseau*, Recherche en didactique, n°2.1.

bro00 Brousseau G. (2000). *Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire*. Séminaire de Didactique des Mathématiques, Rethymon.

cer10 Cerclé V. (2010). *Un puzzle de Lewis Caroll*. Plot n°29, APMEP.

cha13-1 Charnay R, Mante M. (2013). *Mathématiques tome 1*. Professeur des écoles, admissibilité. Hatier concours.

cha13-2 Charnay R, Mante M. (2013). *Mathématiques tome 2*. Professeur des écoles, admissibilité. Hatier concours.

cuc09 Cuchin D. (2009). *Construire des rituels à la maternelle*. Collection Découvertes Gallimard.

dav14 Daval N. (2014). *Les abaques, outils de numération et de calcul* - IREM Réunion.

dav16 Daval N. (2016). *Codage et mathématiques : du langage aux algorithmes, des ressources pour débuter à l'école.* IREM Réunion.

dav18 Daval N, Tournès D. (2018). *De l'abaque à jetons au calcul posé*. Passerelles : Enseigner les mathématiques par leur histoire au cycle 3, Moyon et Tournès. IREM.

dow Dowek G. *Sciences, langages et langues*.

gue96 Guedj D. (1996). *L'empire des nombres*. Retz.

hou17 Houdement C. (2017), *Résolution de problèmes arithmétiques à l'école*, Grand N, n°100, IREM de Grenoble.

mar15 Margolinas, C. (2015), *Des mathématiques à l'école maternelle*, actes du colloque « Des mathématiques à l'école maternelle », ENSC Ho Chi Minh.

mar16 Martin Y. (2016). *Curvica*, activités mathématiques ludiques. IREM Réunion.

mot10-1 Motteau D, Chernak S. (2010). *Mathématiques épreuve écrite*. Concours professeur des écoles. Nathan.

mot10-2 Motteau D, Chernak S. (2010). *Mathématiques épreuve orale*. Concours professeur des écoles. Nathan.

sav19 Savary A. (2019). *L'appel, un rituel pour construire le nombre*. Centre Alain-Savary, Ifé.

ver86 Vergnaud G. (1986). *Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques : un exemple, les structures additives*. Grand N n°38.

ver88 Vergnaud G., Brousseau G., Hulin M. (1988). *Didactique et Acquisition des Connaissances Scientifiques*. Actes du Colloque de Sèvres, Mai 1987, Grenoble, La Pensée Sauvage.

ver08 Verschaffel L., De Corte E. (2008). *Enseignement et apprentissage des mathématiques. Que disent les recherches psychopédagogiques*. De Boeck Supérieur.

vil18 Vilani C., Torossian, C. (2018). *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques*. Ministère de l'éducation nationale.

Sitographie et logiciels

ARPEME Annales corrigées des concours depuis 1997 - COPIRELEM.

Code studio Cours progressifs pour débuter en programmation.

GeoGebra Logiciel de géométrie dynamique.

La main à la pâte Fondation La main à la pâte : 1, 2, 3... codez !

Les fondamentaux Des films agités pour bien cogiter - Canopé.

Mathenpoche Site de l'association Sésamath qui propose des ressources pour le collège.

Mathématiques et CRPE Site de Dominique Pernoux, ex-formateur à l'IUFM d'Alsace.

Nath et matiques Site de Nathalie Daval, formatrice à la FDE de Montpellier.

Parimaths Site de Catherine Marchetti-Jacques, retraitée passionnée de l'Éducation Nationale.

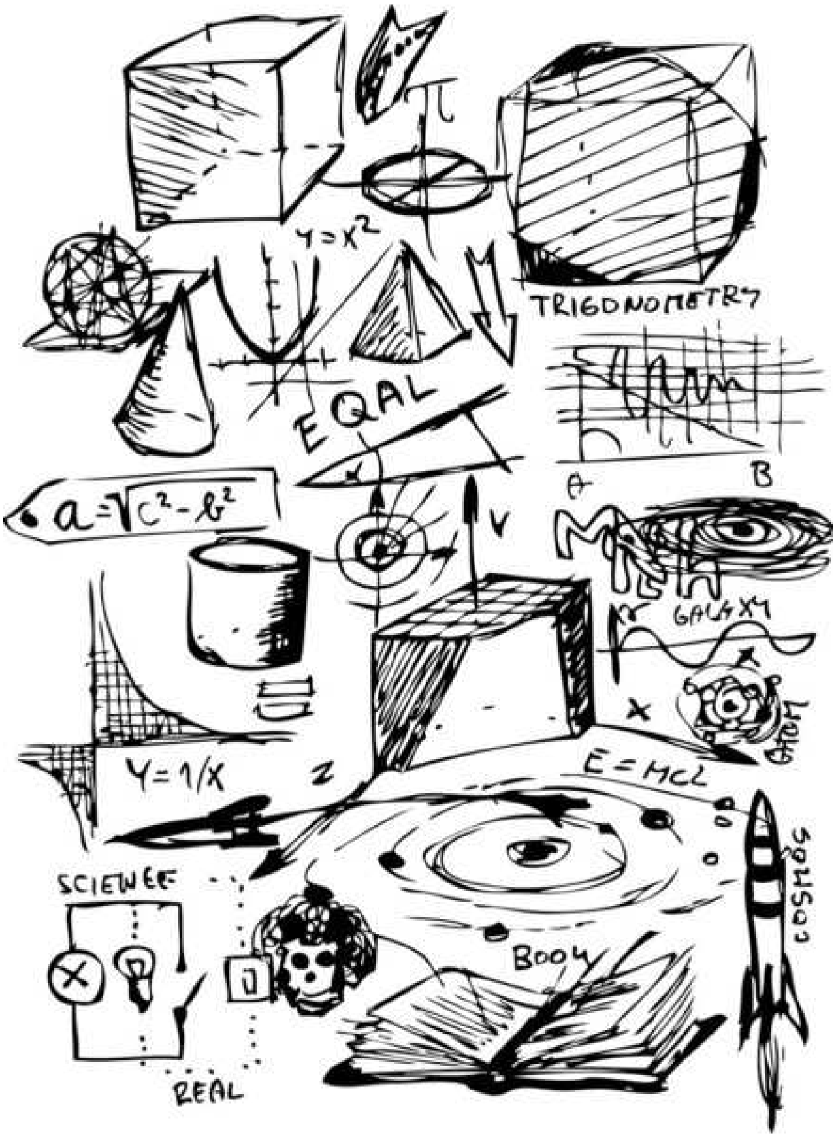
Primaths Site d'Yves Thomas, formateur à l'ESPE des Pays de la Loire.

Scratch Logiciel de programmation, cycles 3 et 4.

ScratchJr Application de programmation pour tablette, cycles 1, 2 et 3.

TFM Téléformation en mathématiques - Université Paris Descartes.

SOLUTIONS



Chapitre N1
Numérations et bases

1 **1)** $\overline{3241}^5 = 3 \times 5^3 + 2 \times 5^2 + 4 \times 5^1 + 1 \times 5^0 = 3 \times 125 + 2 \times 25 + 4 \times 5 + 1 \times 1 = 446$.

2) Le nombre qui précède $\overline{1200}^5$ est $\overline{1144}^5$.

Le nombre qui suit $\overline{4214}^5$ est $\overline{4220}^5$.

3) On peut effectuer les divisions successives par 5 :

$$\begin{array}{r|l} 442 & 5 \\ \hline 42 & 88 \\ 2 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 88 & 5 \\ \hline 38 & 17 \\ 3 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 17 & 5 \\ \hline 2 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 3 & 5 \\ \hline 3 & 0. \end{array}$$

Donc, 442 s'écrit $\overline{3232}^5$.

2 **1)** On effectue les divisions successives par 2 :

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ \hline 0 & 30 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ \hline 10 & 15 \\ 0 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 15 & 2 \\ \hline 1 & 7 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 7 & 2 \\ \hline 1 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 3 & 2 \\ \hline 1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 1 & 2 \\ \hline 1 & 0. \end{array}$$

Donc, 60 s'écrit $\overline{111100}^2$ en base 2.

2) $b = 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$, ce qui donne $b = 85$.

3) L'écriture de b en base 2 se termine par 1 donc, b est impair.

4) Lorsque l'on multiplie ce nombre par 2, il suffit de lui ajouter un 0 à la fin de son écriture :

$2b = \overline{10101010}^2$

$4b = \overline{101010100}^2$

$8b = \overline{1010101000}^2$.

5) On effectue l'addition posée de manière classique, tout en sachant que l'on est en base 2.

$$\begin{array}{cccccccc} & {\scriptstyle +1} & {\scriptstyle +1} & {\scriptstyle +1} & {\scriptstyle +1} & {\scriptstyle +1} & & \\ & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ + & & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Ce qui donne $a + b = \overline{10010001}^2$.

3 **1)** Il s'agit d'un système positionnel de base 3.

2) Le premier nombre ayant quatre symboles est ▲★★★ qui correspond à $1 \times 3^3 = 27$.

3) ●▲★▲★ correspond au nombre $2 \times 3^4 + 1 \times 3^3 + 0 \times 3^2 + 1 \times 3^1 + 0 \times 3^0 = 192$.

4) On commence par écrire 143 en base 3, par exemple grâce aux divisions euclidiennes successives :

$$\begin{array}{r|l} 143 & 3 \\ \hline 23 & 47 \\ 2 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 47 & 3 \\ \hline 17 & 15 \\ 2 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ \hline 0 & 5 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 5 & 3 \\ \hline 2 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 1 & 3 \\ \hline 1 & 0 \end{array}$$

On a donc $143 = \overline{12022}^3$ ce qui correspond à ▲●★●● en numération trimontoise.

5) On peut effectuer la soustraction suivante :

$$\begin{array}{ccccc} & & & \scriptstyle\blacktriangle & \scriptstyle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle \\ & \blacktriangle & \bigstar & \cancel{\bullet} & \bigstar \\ - & & & & \blacktriangle \\ \hline & \blacktriangle & \bigstar & \blacktriangle & \bullet \end{array}$$

Donc, le nombre qui vient juste avant ▲★●★ est ▲★▲●

4 **1) a)** Le système Cincofile est un système de numération positionnel de base 5.

Dans notre système positionnel de base 10, ■ ■ ■ est représenté par le nombre

$4 \times 5^2 + 4 \times 5^1 + 4 \times 5^0 = 4 \times 25 + 4 \times 5 + 4 = 124$.

b) On effectue les divisions euclidiennes successives par 5 :

$$\begin{array}{r|l} 273 & 5 \\ \cline{2-2} 23 & 54 \\ 3 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 54 & 5 \\ \cline{2-2} 4 & 10 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 10 & 5 \\ \cline{2-2} 0 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 5 \\ \cline{2-2} 2 & 0. \end{array}$$

Donc, 273 s'écrit $\overline{2043}^5$ en base 5, ce qui est codé par ✖ ● ■ ▼

2) a) On doit enlever une unité au nombre ▼ ■ ●

Or, le chiffre du premier rang (rang des unités) est nul, on va donc « prendre » une unité au rang 2 (que l'on pourrait appeler rang des quinaires) que l'on va ajouter au rang 1, auquel on peut cette fois-ci supprimer une unité, il restera donc ■ alors qu'au deuxième rang, ■ sera devenu ▼

Le nombre recherché est donc ▼ ▼ ■

b) On ajoute une unité au premier rang ■ qui nous donne « 5 », donc une unité de rang 1 et une unité des quinaires (la retenue) en plus.

Le chiffre de ce rang devient alors ● avec une unité supplémentaire au rang 3 : ✖ devient ▼

Le nombre suivant « ✖ ■ ■ » est donc ▼ ● ●

5 **1)** Le premier nombre mystère est 43 125.

2) Le second nombre mystère est 15 348.

6 **1)** La proposition A est vraie

Soit n un nombre se terminant par 2, il s'écrit $n = 10k + 2$ où k est le nombre de dizaines de n.

On a alors : $n^2 = (10k+2)^2$

$= 100k^2 + 40k + 4$

$= 10(10k^2 + 4k) + 4.$

On reconnait l'écriture d'un nombre décimal où le chiffre des unités est 4.

La proposition B est fausse.

Il suffit de donner un contre-exemple : $14^2 = 196$ ne se termine pas par 16.

2) $n = \overline{a5} = 10a + 5$. Donc, $n^2 = (10a+5)^2$

$= 100a^2 + 100a + 25$

$= 100(a^2 + a) + 25.$

On en déduit les choses suivantes :

- le maximum de n^2 est $100(9^2 + 9) + 25 = 9025$ qui s'écrit avec 4 chiffres ;
- n^2 est composé de $a^2 + a = a(a+1)$ centaines additionné de 25, donc il se termine par 25.

7 **1)** 45 est composé de 4 dizaines et de 5 unités.

- Étape 1 : on calcule $4 \times 5 = 20$ ce qui correspond au nombre de centaines.
- Étape 2 : on écrit 25 à droite de 20.

On a donc $45^2 = 2\,025$.

2) $n^2 = (10d+5)^2$

$= (10d)^2 + 2 \times 10d \times 5 + 5^2$

$= 100d^2 + 100d + 25$

$n^2 = 100d(d+1) + 25.$

3) Le terme « $d(d+1)$ » correspond à la multiplication du nombre de dizaines d par l'entier qui le suit $(d+1)$. Le résultat obtenu est multiplié par 100 ce qui signifie que $d(d+1)$ est le nombre de centaines (étape 1) ; à ce nombre, on ajoute 25 qui est un nombre inférieur à 100 c'est la raison pour laquelle il suffit d'écrire 25 à droite du nombre de centaines pour obtenir le résultat (étape 2).

4) Un nombre décimal n' de partie décimale 5 peut s'écrire sous la forme de la fraction décimale $n' = \frac{n}{10}$ où n est un nombre entier qui se termine par 5.

On a alors $n' = \frac{n^2}{100} = \frac{100d(d+1)+25}{100} = d(d+1)+0,25$.

Par analogie avec ce qui a été vu pour les entiers, il suffit donc de multiplier la partie entière par son successeur pour obtenir la partie entière et de prendre 25 comme partie décimale.

Si on applique ce procédé à 3,5, on effectue le produit de 3 par 4 qui donne 12 (partie entière) et 25 est la partie décimale donc : $3,5^2 = 12,25$.

8 **1)** On a $M = 34$ et $N = 36$, donc $d = 3$; $u = 4$ et $v = 6$.

- $d \times (d+1) = 3 \times 4 = 12$.
- $u \times v = 4 \times 6 = 24$.
- $100 \times d(d+1) + uv = 100 \times 12 + 24 = 1\,224$.

D'un autre côté, $34 \times 36 = 1\,224$. Donc, l'algorithme fonctionne pour 34×36.

2)
$$\begin{aligned} M \times N &= (10d+u) \times (10d+v) \\ &= 10d \times 10d + 10d \times v + u \times 10d + u \times v \\ &= 100d^2 + 10d(v+u) + uv \\ &= 100d^2 + 10d \times 10 + uv \\ &= 100d^2 + 100d + uv \end{aligned}$$

$M \times N = 100d(d+1) + uv$.

3) $4,2 \times 4,8 = \frac{42}{10} \times \frac{48}{10} = \frac{42 \times 48}{100}$.

On applique l'algorithme à 42×48 avec $d = 4$; $u = 2$ et $v = 8$:

- $d \times (d+1) = 4 \times 5 = 20$.
- $u \times v = 2 \times 8 = 16$.
- $100 \times d(d+1) + uv = 100 \times 20 + 16 = 2\,016$.

Donc : $4,2 \times 4,8 = \frac{2\,016}{100} = 20,16$.

9 Soit N $= \overline{cdu}$ le nombre recherché.

- La somme de ses chiffres est 16 donc, $c + d + u = 16$. *(1)*
- Si l'on intervertit le chiffre des centaines et celui des dizaines, le nombre augmente de 450 :

$$\begin{aligned} \overline{dcu} = \overline{cdu} + 450 &\iff 100d + 10c + \cancel{u} = 100c + 10d + \cancel{u} + 450 \\ &\iff 100d - 10d - 100c + 10c = 450 \\ &\iff 90d - 90c = 450 \\ &\iff 9d - 9c = 45 \\ &\iff d - c = 5 \\ &\iff d = c + 5 \quad (2) \end{aligned}$$

• Si l'on intervertit le chiffre des centaines et celui des unités, il augmente de 198 :

$$\begin{aligned}
\overline{udc} = \overline{cdu} + 198 &\iff 100u + \cancel{10d} + c = 100c + \cancel{10d} + u + 198 \\
&\iff 100u - u - 100c + c = 198 \\
&\iff 99u - 99c = 198 \\
&\iff u - c = 2 \\
&\iff u = c + 2 \quad (3)
\end{aligned}$$

Dans *(1)*, on remplace d et u obtenus en *(2)* et *(3)* :

$$\begin{aligned}
c + (c+5) + (c+2) = 16 &\iff c + c + 5 + c + 2 = 16 \\
&\iff 3c = 9 \\
&\iff c = 3
\end{aligned}$$

On a alors d'après *(2)* : $d = 3 + 5 = 8$ et d'après *(3)* : $u = 3 + 2 = 5$.
Le nombre recherché est $N = 385$.

10

	12	40	248	3 019	1 002	1 003
Égyptien	𓎆𓏺𓏺	𓎆𓎆𓎆𓎆	𓍢𓍢 𓎆𓎆𓎆𓎆 𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺	𓆼𓆼𓆼 𓎆𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺	𓆼𓏺𓏺	𓆼𓏺𓏺𓏺
Romain	XII	XL	CCXLVIII	MMMXIX	MII	MIII
Chinois	十 二	四 十	二 百 四 十 八	三 千 十 九	千 二	千 三
Maya	𝋬	𝋢 𝋠	𝋬 𝋨	𝋧 𝋪 𝋳	𝋢 𝋪 𝋢	𝋢 𝋪 𝋣
Binaire	1100	101000	11111000	10111100101	1111101010	1111101011

REMARQUE : la numération Maya n'utilisait pas strictement une base 20, il existait en effet une irrégularité où le passage de l'ordre 2 à l'ordre 3 nécessitait une multiplication par 18 au lieu de 20. Dans le cadre du CRPE, il est très probable que cette irrégularité ne soit pas prise en compte et c'est pour ce cas que le corrigé a été fait.

Chapitre N2
Ensembles de nombres et calculs

1 **1)** $A = |123,45| = 123,45$.

2) $B = 123,2 + 12,32 + 1,232 = 136,752$.

3) $C = (-2) \times (-8) = 16$.

4) $D = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{4}{7} = \dfrac{8}{21}$.

5) $E = -5 \times \dfrac{-2}{3} = \dfrac{10}{3}$.

6) $F = \dfrac{3}{4} + \dfrac{7}{6} = \dfrac{9}{12} + \dfrac{14}{12} = \dfrac{23}{12}$.

7) $G = 3,728 \times 15,12 = 56,36736$.

8) $H = (+2) + (-13) = -11$.

9) $I = 13\,235 - 788 = 12\,447$.

10) $J = |-12| = 12$.

11) $K = (-5) + (-14) = -19$.

12) $L = \left|-\dfrac{1}{4}\right| = \dfrac{1}{4}$.

2 **1)** Il s'agit de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

2) **a)** $43 \times 69 = 2\,967$.

	40	3	
60	60×40 $= 2\,400$	60×3 $= 180$	2 580
9	9×40 $= 360$	9×3 $= 27$	387

Écriture en lignes :

$$\begin{aligned} 43 \times 69 &= (40+3) \times (60+9) \\ &= 40 \times 60 + 40 \times 9 + 3 \times 60 + 3 \times 9 \\ &= 2\,400 + 360 + 180 + 27 \\ &= 2\,967 \end{aligned}$$

Écriture en colonnes :

$$\begin{array}{rrrr} & & 4 & 3 \\ \times & & 6 & 9 \\ \hline & 3 & 8 & 7 \\ 2 & 5 & 8 & 0 \\ \hline 2 & 9 & 6 & 7 \end{array}$$

b) $234 \times 75 = 17\,750$.

	200	30	4	
70	70×200 $= 14\,000$	70×30 $= 2\,100$	70×4 $= 280$	16 380
5	5×200 $= 1\,000$	5×30 $= 150$	5×4 $= 20$	1 170

Écriture en lignes :

$$\begin{aligned} & 234 \times 75 \\ &= (200+30+4) \times (70+5) \\ &= 200 \times 70 + 200 \times 5 + 30 \times 70 \\ &\quad +30 \times 5 + 4 \times 70 + 4 \times 5 \\ &= 14\,000 + 1\,000 + 2\,100 + 150 + 280 + 20 \\ &= 17\,550 \end{aligned}$$

Écriture en colonnes :

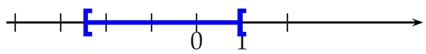
$$\begin{array}{rrrrr} & & 2 & 3 & 4 \\ \times & & & 7 & 5 \\ \hline & 1 & 1 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & 3 & 8 & 0 \\ \hline 1 & 7 & 7 & 5 & 0 \end{array}$$

3 **1)** **a)** $x \in [-3\,;4]$ et $-3 \leqslant x \leqslant 4$.

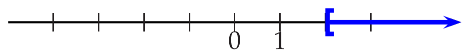
b) $x \in]-\infty\,;3]$ et $x \leqslant 3$.

c) $x \in]-1\,;+\infty[$ et $x > -1$.

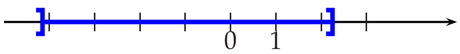
d) $x \in]-1,5\,;1,5[$ et $-1,5 < x < 1,5$.

2) **a)** 

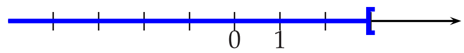
$x \in [-2,5\,;1[$

b) 

$x \in [2\,;+\infty[$

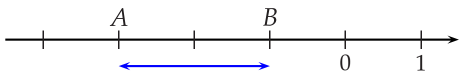
c) 

$x \in]-4,2\,;2,3]$

d) 

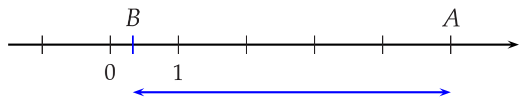
$x \in]-\infty\,;3[$

4 **1)**



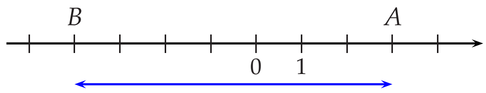
$AB = |-3-(-1)| = |-2| = 2$

3)



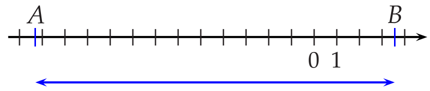
$AB = \left|5 - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{14}{3}\right| = \frac{14}{3}$

2)



$AB = |3-(-4)| = |7| = 7$

4)



$AB = |-12,3 - 3,56| = |-15,86| = 15,86$

5 On a $27\,086 \leqslant R \leqslant 72\,617$ donc : $0,3 \times 27\,086 \leqslant 0,3 \times R \leqslant 0,3 \times 72\,617$

$\iff 8\,125,8 \leqslant 0,3R \leqslant 21\,785,1$

Donc : $8\,125,8 - 5\,706,74 \leqslant 0,3R - 5\,706,74 \leqslant 21\,785,1 - 5\,706,74$

$\iff 2\,419,06 \leqslant I \leqslant 16\,078,36.$

Mme Mathics paiera entre 2 419,06 € et 16 078,36 € d'impôt.

6

	$\frac{17}{8}$	$\frac{8}{17}$	$\frac{2\,794}{55}$	$\frac{1096}{52}$	$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2209}$	$3,14$	π
$\mathbb{N}$							✓		
$\mathbb{Z}$							✓		
$\mathbb{D}$	✓		✓				✓	✓	
$\mathbb{Q}$	✓	✓	✓	✓			✓	✓	
$\mathbb{R}$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

7 • Énoncé 1 : faux.

Contre-exemple : $2x = 1$ est un entier naturel, mais $x = 0,5$ n'en est pas un (la moitié d'un entier naturel n'est pas forcément un entier naturel. Pour cela, il faudrait qu'il soit pair).

• Énoncé 2 : vrai.

Démonstration : $\frac{x}{2} = n \in \mathbb{N}$, donc, $x = 2n \in \mathbb{N}$ (le double d'un entier naturel reste un entier naturel).

• Énoncé 3 : faux.

Contre-exemple : $x + 1 = 0$ est un entier naturel, mais $x = -1$ est un entier relatif, non naturel (c'est donc vrai pour tout nombre entier naturel non nul).

8 On remarque que $85 = 5 \times 17$. L'objectif est donc, suivant le cas, de pouvoir simplifier par 85, par 17 ou par 5. On peut choisir, par exemple :

un entier naturel	un décimal non naturel	un rationnel non décimal
$\frac{85}{85} = 1$	$\frac{17}{85} = \frac{\cancel{17} \times 1}{\cancel{17} \times 5} = \frac{1}{5}$	$\frac{5}{85} = \frac{\cancel{5} \times 1}{\cancel{5} \times 17} = \frac{1}{17}$
$\frac{85}{1} = 85$	$\frac{85}{850} = \frac{\cancel{85} \times 1}{\cancel{85} \times 10} = \frac{1}{10}$	$\frac{85}{3} = \frac{5 \times 17}{3}$

9 **1) a)** $0,127 = \dfrac{127}{1\,000} = \dfrac{127}{10^3}$.

b) $\dfrac{1}{4} = \dfrac{25}{100} = \dfrac{25}{10^2}$.

2)

- Élève A : le nombre $\dfrac{1}{3} = 1,333\ldots$ qui s'écrit avec une virgule suivie d'un nombre infini de 3 n'est pas un nombre décimal.
- Élève B : le nombre $0,127 = \dfrac{127}{1\,000}$ est un nombre décimal dont le numérateur vaut 1 000.
- Élève C : le nombre entier 1 peut s'écrire $\dfrac{10}{10}$, c'est donc aussi un nombre décimal.

3)

- $2,48 = \dfrac{248}{100} = \dfrac{248}{10^2}$ est un nombre décimal.
- $\dfrac{7}{25} = \dfrac{28}{100} = \dfrac{28}{10^2}$ est un nombre décimal.
- $12 = \dfrac{12}{1} = \dfrac{12}{10^0}$ est un nombre décimal.
- $\dfrac{7}{9} = \dfrac{7}{3^2}$ est sous une forme irréductible et comporte uniquement une puissance de 3 au dénominateur, ce n'est pas un nombre décimal.
- $\dfrac{49}{14} = \dfrac{7 \times 7}{7 \times 2} = \dfrac{7}{2} = \dfrac{35}{10}$ est un nombre décimal.

4) Le produit de deux nombres décimaux est un nombre décimal.

Justification : soit $a = \dfrac{p}{10^n}$ et $b = \dfrac{q}{10^m}$ avec p et q des nombres entiers et n et m des nombres entiers positifs.

$a \times b = \dfrac{p}{10^n} \times \dfrac{q}{10^m} = \dfrac{p \times q}{10^n \times 10^m} = \dfrac{pq}{10^{n+m}}$ est bien un nombre décimal puisque pq est un entier comme produit d'entiers et $n + m$ un entier naturel positif comme somme d'entiers positifs.

5) Le quotient de deux nombres décimaux n'est pas toujours un nombre décimal.

Contre-exemple : $\dfrac{\frac{1}{10}}{\frac{3}{10}} = \dfrac{1}{10} \times \dfrac{10}{3} = \dfrac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal puisque son dénominateur ne comporte pas uniquement des puissances de 2 et de 5.

10 **1)**

On trouve :

$$\begin{array}{l|l} 22 & 7 \\ \cline{2-2} \quad 10 & 3{,}142857 \\ \quad\; 30 & \\ \quad\;\; 20 & \\ \quad\;\;\; 60 & \\ \quad\;\;\;\; 40 & \\ \quad\;\;\;\;\; 50 & \\ \quad\;\;\;\;\;\; 1 & \end{array}$$

Étant donné que l'on obtient 1 comme reste à l'ordre 7, tout comme au premier ordre, la suite des décimales va se répéter de manière identique toutes les 6 décimales. Donc, $\dfrac{22}{7} = 3,\overline{142857}$

2) a) D'une part, $100x - x = 99x$ et d'autre part, $100x - x = 27,\overline{27} - 0,\overline{27} = 27$.

b) Donc, $99x = 27$, soit $x = \dfrac{27}{99}$ ou encore : $x = \dfrac{3}{11}$.

3) Soit $y = 19,\overline{78}$, alors $100y - y = 1978,\overline{78} - 19,\overline{78} = 1959$. Donc, $99y = 1959$, soit $y = \dfrac{1959}{99} = \dfrac{653}{33}$.

4) Soit $z = 0,999\cdots = 0,\overline{9}$, alors $10z - z = 9,\overline{9} - 0,\overline{9} = 9$. Donc, $9z = 9$, soit : $z = 0,999\cdots = 1$.

Chapitre N3

Calcul littéral

1 **1)** $8^2 \times 8^4 = 8^{2+4} = 8^6$.

2) $10^{-2} \times 10^{-5} = 10^{-2-5} = 10^{-7}$.

3) $\dfrac{13^5}{13^3} = 13^{5-3} = 13^2$.

4) $(-3)^2 \times (-3)^5 = (-3)^{2+5} = (-3)^7 = -3^7$.

5) $\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

6) $\sqrt{\dfrac{49}{100}} = \dfrac{\sqrt{49}}{\sqrt{100}} = \dfrac{7}{10}$.

7) $\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$.

8) $-6\sqrt{72} + 4\sqrt{2} - 11\sqrt{8} = -6 \times \sqrt{36} \times \sqrt{2} + 4 \times \sqrt{2} - 11 \times \sqrt{4} \times \sqrt{2} = -36\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 22\sqrt{2} = -54\sqrt{2}$.

9) $\sqrt{\dfrac{81}{25}} \times \sqrt{\dfrac{50}{27}} = \dfrac{\sqrt{81}}{\sqrt{25}} \times \dfrac{\sqrt{25} \times \sqrt{2}}{\sqrt{9} \times \sqrt{3}} = \dfrac{9}{5} \times \dfrac{5\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = 3\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 3 \times \dfrac{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = 3 \times \dfrac{\sqrt{6}}{3} = \sqrt{6}$.

2 **1)** $5(x-2) = 5 \times x - 5 \times 2 = 5x - 10$.

$(-8) \times (k+5) = -8 \times k - 8 \times 5 = -8k - 40$.

$(x+5)(4x-1) + (3x+7)(2x-9) = (4x^2 - x + 20x - 5) + (6x^2 - 27x + 14x - 63) = 10x^2 + 6x - 68$.

$(5x+3)(x-1) - (7x+9)(2x-5) = (5x^2 - 5x + 3x - 3) - (14x^2 - 35x + 18x - 45) = -9x^2 + 15x + 42$.

2) $7x + 21 = 7 \times x + 7 \times 3 = 7(x+3)$.

$36 + 42a = 6 \times 6 + 6 \times 7a = 6(6+7a)$.

$6y + 7y = 13y$.

$\underline{(x+7)}(4x+5) + \underline{(x+7)}(2x-1) = \underline{(x+7)}[(4x+5) + (2x-1)] = (x+7)(6x+4)$.

$\underline{(7x-8)}(4x+3) - \underline{(7x-8)}(5x+2) = \underline{(7x-8)}[(4x+3) - (5x+2)] = (7x-8)(-x+1)$.

3 **1)** Si on multiplie le chiffre des unités de chaque terme, on trouve $6 \times 8 = 48$, donc, le chiffre des unités de A est 8. Or, le résultat trouvé sur la calculatrice donne 3 500 000 820 000 000 et se termine par 0, d'où :
la valeur affichée sur la calculatrice n'est pas la valeur exacte.

2) On a : $50\,000\,000 < 50\,000\,006 < 60\,000\,000$ et $70\,000\,000 < 70\,000\,008 < 80\,000\,000$

Donc, ces nombres étant positifs, on peut écrire :$(5 \times 10^7) \times (7 \times 10^7) < \text{A} < (6 \times 10^7) \times (8 \times 10^7)$:
$35 \times 10^{14} < \text{A} < 48 \times 10^{14}$, ce qui veut dire que A possède 16 chiffres.

3)
$$\begin{aligned}
\text{A} &= (5 \times 10^7 + 6) \times (7 \times 10^7 + 8) \\
&= (5 \times 10^7) \times (7 \times 10^7) + (5 \times 10^7) \times 8 + 6 \times (7 \times 10^7) + 6 \times 8 \\
&= 5 \times 7 \times 10^{7+7} + 5 \times 8 \times 10^7 + 6 \times 7 \times 10^7 + 6 \times 8 \\
&= 35 \times 10^{14} + 40 \times 10^7 + 42 \times 10^7 + 48 \\
&= 3\,500\,000\,000\,000\,000 + 820\,000\,000 + 48
\end{aligned}$$

$\text{A} = 3\,500\,000\,820\,000\,048$.

4) $48\,506 \times 505 = 24\,495\,530$; $557 \times 505 = 281\,285$; $48506 \times 149 = 7\,227\,394$; $557 \times 149 = 82\,993$.

$$\begin{aligned}
\text{Donc, } 48\,506\,557 \times 505\,149 &= (48\,506 \times 10^3 + 557) \times (505 \times 10^3 + 149) \\
&= 48\,506 \times 505 \times 10^3 \times 10^3 + 48\,506 \times 149 \times 10^3 + 557 \times 505 \times 10^3 + 557 \times 149 \\
&= 24\,495\,530 \times 10^6 + 7\,227\,394 \times 10^3 + 281\,285 \times 10^3 + 82\,993 \\
&= 24\,495\,530\,000\,000 + 7\,227\,394\,000 + 281\,285\,000 + 82\,993
\end{aligned}$$

$\text{B} = 24\,503\,038\,761\,993$.

4 **1) a)** $(x+1)(x-1) = x^2 - 1$ et $(x+2)(x-2) = x^2 - 4$ donc,

$$\begin{aligned}(x+1)(x-1)-(x+2)(x-2) &= (x^2-1)-(x^2-4)\\ &= x^2-1-x^2+4 = 3.\end{aligned}$$

b) pour calculer $297 \times 295 - 298 \times 294$, on utilise le résultat précédent appliqué à $x = 296$ et on trouve $297 \times 295 - 298 \times 294 = 3$.

2) Si l'on observe les quatre résultats, il semble que la proposition 1 soit exacte, prouvons-le :
a et b sont deux nombres consécutifs (supposons $a < b$), donc $b = a + 1$.
Leur somme est égale à $a + b = a + (a+1) = 2a + 1$;
la différence de leurs carrés est égal à $b^2 - a^2 = (a+1)^2 - a^2 = a^2 + 2a + 1 - a^2 = 2a + 1$,
la proposition est donc vérifiée.
Si a et b sont deux nombres consécutifs, alors leur somme est égale à la différence de leurs carrés.

5 • L'affirmation 1 est fausse :

$$\begin{aligned}(x-7)(x+4) = (x-7)(16-x) &\iff \underline{(x-7)}(x+4) - \underline{(x-7)}(16-x) = 0\\ &\iff \underline{(x-7)}[(x+4)-(16-x)] = 0\\ &\iff (x-7)(2x-12) = 0\\ &\iff x-7 = 0 \text{ ou } 2x-12 = 0\\ &\iff x = 7 \text{ ou } x = 6.\end{aligned}$$

• L'affirmation 2 est vraie :
les trois quarts des adhérents ont moins de 18 ans, donc un quart a plus de 18 ans.
Parmi ceux-ci, le tiers a plus de 25 ans, donc deux tiers ont entre 18 et 25 ans.
Or, deux tiers d'un quart, c'est deux douzièmes, soit un sixième.
Ce qui correspond au calcul : $\left(1-\frac{1}{3}\right) \times \left(1-\frac{3}{4}\right) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

• L'affirmation 3 est fausse :
Prenons les nombres 1 et 1. L'inverse de la somme de ces deux nombres vaut $\frac{1}{2}$ et la somme des inverses de ces deux nombres 2. Ceci constitue un contre-exemple.

6 **1)** En descente, le batelier parcourt 120 km en n jours, donc $\frac{120}{n}$ km en un jour.
En remontée, le batelier parcourt 120 km en $n+1$ jours, donc $\frac{120}{n+1}$ km en un jour.

2) Comme la distance parcourue quotidiennement lors de la remontée est inférieure de 6 km à celle parcourue quotidiennement lors de la descente, on a bien $\frac{120}{n+1} = \frac{120}{n} - 6$.

3)
$$\begin{aligned}\frac{120}{n+1} = \frac{120}{n} - 6 &\iff \frac{120}{n+1} = \frac{120-6n}{n}\\ &\iff (120-6n)(n+1) = 120n\\ &\iff \cancel{120n} + 120 - 6n^2 - 6n = \cancel{120n}\\ &\iff 6n^2 + 6n = 120\\ &\iff n^2 + n = 20 \iff n(n+1) = 20.\end{aligned}$$

4) n est un nombre entier, il faut donc trouver deux nombres consécutifs dont le produit vaut 20.
On trouve $n = 4$ puisque $4 \times 5 = 20$.
Le batelier descend la rivière en 4 jours et la remonte en 5 jours.

7 **1) a)** $\begin{cases} \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{6} \\ \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{6} \end{cases}$ donc, $\dfrac{1}{2} < \dfrac{2}{3}$.

$\begin{cases} \dfrac{12}{13} = \dfrac{12 \times 14}{13 \times 14} = \dfrac{168}{182} \\ \dfrac{13}{14} = \dfrac{13 \times 13}{14 \times 13} = \dfrac{169}{182} \end{cases}$ donc, $\dfrac{12}{13} < \dfrac{13}{14}$.

$\begin{cases} \dfrac{176}{177} = \dfrac{176 \times 178}{177 \times 178} = \dfrac{31\,328}{31\,506} \\ \dfrac{177}{178} = \dfrac{177 \times 177}{178 \times 177} = \dfrac{31\,329}{31\,506} \end{cases}$ donc, $\dfrac{176}{177} < \dfrac{177}{178}$.

On peut conjecturer que pour tout entier naturel non nul, $\dfrac{n-1}{n} < \dfrac{n}{n+1}$.

b) $\dfrac{n-1}{n} = \dfrac{(n-1)(n+1)}{n(n+1)} = \dfrac{n^2-1}{n(n+1)}$ et $\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{n \times n}{(n+1)n} = \dfrac{n^2}{n(n+1)}$.

On a $\dfrac{n^2-1}{n(n+1)} < \dfrac{n^2}{n(n+1)}$, d'où la conjecture.

c) On choisit $n = 987\,654\,322$ et on applique le résultat démontré à la question précédente :

$\dfrac{987\,654\,322}{987\,654\,323} > \dfrac{987\,654\,321}{987\,654\,322}$.

1) On a $1,117 < \dfrac{p}{1789} < 1,118 \iff 1998,313 < p < 2000,102$ et p est un entier donc,

les valeurs possibles pour p sont 1999 et 2000.

8 **1)** Ce problème se modélise par l'équation suivante :

$(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 = (n+1)^2 + (n+2)^2$

$\iff \cancel{n^2} - 4n + \cancel{4} + \cancel{n^2} - 2n + \cancel{1} + n^2 = \cancel{n^2} + 2n + \cancel{1} + \cancel{n^2} + 4n + \cancel{4}$

$\iff n^2 - 12n = 0.$

Résoudre ce problème revient à résoudre l'équation $n^2 - 12n = 0$.

2) $n^2 - 12n = 0 \iff n(n-12) = 0$.

Les solutions de cette équation sont les solutions de $n = 0$ et $n - 12 = 0$ soit :

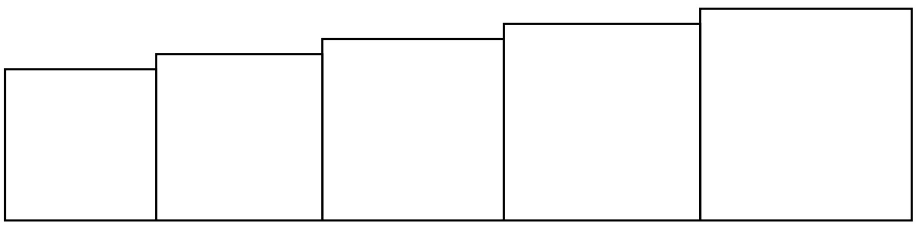
les solutions de l'équation $n^2 - 12n = 0$ sont 0 et 12.

3) n est la mesure en centimètre du côté du carré du milieu, donc 0 ne peut pas être une solution valable puisqu'alors la mesure de chacun des côtés des carrés gris serait négative ou nulle.

Seule la solution 12 peut être retenue comme solution à ce problème.

4) Avec $n = 12$, les mesures successives en centimètres des côtés des carrés sont $10, 11, 12, 13$ et 14.

À l'échelle $\dfrac{1}{5}$, on divise chaque mesure par 5 et on obtient les mesures : 2 cm ; 2,2 cm ; 2,4 cm ; 2,6 cm et 2,8 cm ce qui donne la figure suivante :



9 **1)** x peut prendre toutes les valeurs entre 0 et 8 inclus.

2) L'aire de la surface grisée, notée $\mathcal{A}_G$ est égale à $\mathcal{A}(\text{DEFM}) + \mathcal{A}(\text{BGFH})$.

$\mathcal{A}_G = x^2 + (20 - x)(8 - x) = x^2 + 160 - 20x - 8x + x^2$, soit :

$\mathcal{A}_G = 2x^2 - 28x + 160$.

3) $2(x-7)^2 + 62 = 2(x^2 - 14x + 49) + 62$

$= 2x^2 - 28x + 98 + 62$

$= 2x^2 - 28x + 160.$

D'où $2x^2 - 28x + 160 = 2(x-7)^2 + 62$

4) L'aire de la partie grisée est minimale lorsque l'expression $2(x-7)^2 + 62$ est minimale.

Le minimum est atteint lorsque $2(x-7)^2 = 0$, c'est à dire lorsque $x - 7 = 0$, soit $x = 7$.

L'aire de la partie grisée est minimale pour $x = 7\,\text{cm}$.

5) L'aire de la partie grisée est égale à $112\,\text{cm}^2$ lorsque $2(x-7)^2 + 62 = 112$

$\iff 2(x-7)^2 = 50 \iff (x-7)^2 = 25 \iff x - 7 = 5$ ou $x - 7 = -5 \iff x = 12$ ou $x = 2$.

Or, x est compris entre 0 et 8, donc : l'aire de la partie grisée est égale à $112\,\text{cm}^2$ lorsque $x = 2\,\text{cm}$.

10 **1) a)** La Figure 1 possède 3×4 côtés $=$ 12 côtés et la Figure 2 possède $3 \times 4 \times 4 = 3 \times 4^2$ côtés $=$ 48 côtés.

b) La Figure 3 possède $3 \times 4 \times 4 \times 4 = 3 \times 4^3$ côtés $=$ 192 côtés.

c) La Figure n possède 3×4^n côtés.

2) a) La longueur d'un côté de la Figure 1 mesure un tiers de la mesure d'un côté de la Figure 0 qui vaut 1 cm.

Or, $\frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$ donc $L_1 = \frac{1}{3}$.

La longueur d'un côté de la Figure 2 mesure un tiers de la mesure d'un côté de la Figure 1 qui vaut $\frac{1}{3}$.

Or, $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ donc $L_2 = \frac{1}{9}$.

La longueur d'un côté de la Figure 3 mesure un tiers de la mesure d'un côté de la Figure 2 qui vaut $\frac{1}{9}$.

Or, $\frac{1}{3} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{27}$ donc $L_3 = \frac{1}{27}$.

b) À chaque étape, la longueur du côté est multipliée par $\frac{1}{3}$ donc, $L_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3^n}$.

3) a) On obtient les valeurs de P_n en multipliant le nombre de côtés à la longueur d'un côté, donc :

$P_1 = 12 \times L_1 = 12 \times \frac{1}{3} = 4$.

$P_2 = 48 \times L_2 = 48 \times \frac{1}{9} = \frac{48}{9} = \frac{16}{3}$.

$P_3 = 192 \times L_3 = 192 \times \frac{1}{27} = \frac{192}{27} = \frac{64}{9}$.

b) On a $P_n = 3 \times 4^n \times \frac{1}{3^n} = \frac{4^n}{3^{n-1}}$.

4) On cherche s'il existe un entier n tel que $p_n > 100\,000 = 1 \times 10^5$ (il faut convertir 1 km en cm).

Il suffit de chercher, à l'aide d'une calculatrice, une telle valeur sachant que les valeurs de P_n sont croissantes.

- Pour $n = 10$, on a $P_{10} = \frac{4^{10}}{3^9} \approx 53{,}3$.
- Pour $n = 100$, on a $P_{100} = \frac{4^{100}}{3^{99}} \approx 9{,}3 \times 10^{12}$.

$n = 100$ convient, on peut aussi trouver la valeur minimale convenant.

$P_{36} \approx 94\,388$ et $P_{37} \approx 125\,850$, donc, tout nombre n supérieur ou égal à 37 convient.

Chapitre N4

Arithmétique

1 $\dfrac{27}{45} = \dfrac{\cancel{3} \times \cancel{3} \times 3}{\cancel{3} \times \cancel{3} \times 5} = \dfrac{3}{5} = \dfrac{6}{10}$ est un nombre décimal.

L'affirmation 1 est vraie.

Si $a = 10$ et $b = 0,5$ alors $a \div b = 10 \div 0,5 = 20$. Or, $20 > 10$.

L'affirmation 2 est fausse.

Soit n le premier des entiers consécutifs, alors la somme de trois entiers consécutifs s'écrit :

$n + (n+1) + (n+2) = 3n + 3 = 3(n+1)$ qui est bien un multiple de 3.

L'affirmation 3 est vraie.

$42 = 2^1 \times 3^1 \times 7^1$ possède $(1+1) \times (1+1) \times (1+1) = 8$ diviseurs qui sont 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 7 ; 14 ; 21 et 42.

L'affirmation 4 est fausse.

2 **1)** 117 est divisible au moins par 9 puisque la somme de ses chiffres est égale à 9, donc, 117 n'est pas un nombre premier.

L'affirmation est fausse.

2)
$$\begin{aligned}(n+2)^2 - (n-2)^2 &= (n^2 + 4n + 4) - (n^2 - 4n + 4)\\ &= \cancel{n^2} + 4n + \cancel{4} - \cancel{n^2} + 4n - \cancel{4}\\ &= 8n.\end{aligned}$$

a) D'après le résultat obtenu après développement et réduction,

l'affirmation est vraie.

b) Pour $n = 1$ par exemple, $(n+2)^2 - (n-2)^2 = 8$ qui n'est pas un multiple de 32 donc,

l'affirmation est fausse.

3) Le nombre recherché est multiple de 2 et de 3, mais pas de 2^2 et 3^2. Il suffit donc de choisir un nombre dont la décomposition en produit de facteurs premiers commence par $2 \times 3 \times \ldots$. Par exemple : $2 \times 3 \times 5 = 30$.

L'affirmation est vraie.

4) Une série de perles « jaune-rouges-blanches » comporte 6 perles. Or, $147 = 6 \times 24 + 3$ donc, la 147$^{\text{e}}$ perle sera de la même couleur que la 3$^{\text{e}}$ perle de la série, soit rouge.

L'affirmation est vraie.

5) $126 = 2^1 \times 3^2 \times 7^1$ donc, 126 possède $(1+1) \times (2+1) \times (1+1)$ diviseurs, soit 12 diviseurs qui sont : 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 7 ; 9 ; 14 ; 18 ; 21 ; 42 ; 63 ; 126.

L'affirmation est fausse.

3 **1)** **a)** $N = a \times 100 + b \times 10 + c$. Si le nombre formé par le chiffre des dizaines et le chiffre des unités est divisible par 4, alors il existe un entier m tel que $b \times 10 + c = 4 \times m$.

On a alors $N = a \times 100 + b \times 10 + c = a \times 4 \times 25 + 4 \times m = 4 \times (a \times 25 + m)$ qui est bien un multiple de 4.

Si le nombre formé par le chiffre des dizaines et le chiffre des unités est divisible par 4, N est multiple de 4.

b) Prenons le nombre 116 : il se termine par « 16 » qui est divisible par 8, mais $116 = 8 \times 14 + 4$ n'est pas divisible par 8 donc, cette règle ne fonction pas pour 8.

2) $N - (a+b+c) = a \times 100 + b \times 10 + c - a - b - c = a \times 99 + b \times 9 = 9 \times (a \times 11 + b)$.

Si $a + b + c$ est divisible par 9, alors il existe un entier m tel que $a + b + c = 9 \times m$.

On a alors $N = 9 \times (a \times 11 + b) + (a + b + c) = 9 \times (a \times 11 + b) + 9 \times m = 9 \times (11a + b + m)$.

Si $a + b + c$ est divisible par 9, N l'est aussi.

4 **1)** $30n+25 = 5\times 6n + 5\times 5 = 5\times(6n+5)$ est divisible par 5.

2) **a)** $8 \xrightarrow{\times 3} 24 \xrightarrow{+5} 29 \xrightarrow{\times 29} 841 \xrightarrow{-9\times 8^2} 265$.

b) $-56 \xrightarrow{\times 3} -168 \xrightarrow{+5} -163 \xrightarrow{\times(-163)} 26\,569 \xrightarrow{-9\times(-56)^2} -1\,655$.

c) $n \xrightarrow{\times 3} 3n \xrightarrow{+5} 3n+5 \xrightarrow{\times(3n+5)} 9n^2+30n+25 \xrightarrow{-9n^2} 30n+25$.

Or, $30n+25$ est divisible par 5 d'après la première question donc, le résultat est toujours divisible par 5.

5 **1)** L'associé de 768 492 est 7 684 902.

2) L'entier 2 005 est l'associé du nombre 205.

3) **a)** Si n est un entier divisible par 9, alors la somme de ses chiffres est divisible par 9. Si l'on rajoute 0 à cette somme, celle-ci ne change pas et le nombre obtenu est donc divisible par 9.

Si n est un entier divisible par 9, alors son associé l'est également.

b) La réciproque de la propriété précédente s'écrit :

si l'associé d'un nombre n est divisible par 9, alors n est divisible par 9.

c) La démonstration s'effectue à l'identique que dans la question 3) a) : si l'associé de n est un entier divisible par 9, alors la somme de ses chiffres est divisible par 9. Si l'on enlève 0 à cette somme, celle-ci ne change pas et n est donc divisible par 9. La réciproque est vraie.

4) Un nombre entier est divisible par 4 si et seulement si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4. Or, les deux derniers chiffres de l'associé sont 0 et c où c est un nombre compris entre 0 et 9. Il suffit donc que c soit égal à 0, 4 et 8. Réciproquement, tout nombre associé terminant par 00, 04 ou 08 est divisible par 4.

Donc, l'associé de n est divisible par 4 si et seulement si n se termine par 0, 4 ou 8.

5) Soit $n = d\times 10 + u$ où d est le nombre de dizaines de n. Son associé s'écrit $n' = d\times 100 + u$.

Or, $n = 5\times(2d)+u$ et $n' = 5\times(20d)+u$, donc, n et n' ont le même reste de la division euclidienne par 5.

6 **1)** Pour déterminer les entiers naturels jusqu'à 99 divisibles par 7, il suffit de prendre les multiples de 7 : on trouve 0 ; 7 ; 14 ; 21 ; 28 ; 35 ; 42 ; 49 ; 56 ; 63 ; 70 ; 77 ; 84 ; 91 et 98.

2) **a)** On procède de la même manière que les exemples :

$\begin{array}{r\|l} 40 & 6 \\ -\ 12 & \times 2 \\ \hline 28 & \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} 89 & 5 \\ -\ 10 & \times 2 \\ \hline 79 & \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} 390 & 6 \\ -\ 12 & \times 2 \\ \hline 378 & \end{array}$
28 est divisible par 7 donc, 406 l'est aussi.	79 n'est pas divisible par 7 donc, 895 non plus.	378 est divisible par 7 donc, 3 906 l'est aussi.

Les nombres 406 et 3 906 sont divisibles par 7, mais 895 ne l'est pas.

b) Soit E le nombre dont on souhaite savoir s'il est divisible par 7. On soustrait le double de la valeur du chiffre des unités de E au nombre de dizaines de E. Si le nombre obtenu est divisible par 7, alors E est divisible par 7. Si le nombre obtenu n'est pas divisible par 7, alors E n'est pas divisible par 7.

3) **a)** $273 = 10\times 27+3$ et $1\,856 = 10\times 185+6$.

b) Soit n le nombre obtenu après procédure, alors $n = v - 2u$.

c) Si n est divisible par 7, alors il existe un entier k tel que $n = 7k$, c'est-à-dire $v-2u = 7k$, ou encore $v = 2u+7k$. Or, $E = 10v+u = 10(2u+7k)+u = 21u+70k = 7(3u+10k)$ qui est multiple de 7.

Si le nombre n est divisible par 7, alors le nombre E de départ est divisible par 7.

7 **1)** Soit $N = \overline{cdu}$. Si l'un des chiffres vaut 0, alors le produit vaudra 0, ce qui est impossible.
Si l'un des chiffres est 1, alors le produit vaudra au maximum $9 \times 9 = 81$, alors qu'il devrait être de 120.
Si l'un des chiffres est 2, le produit des deux autres chiffres doit valoir 60. Or, 60 est le produit de 2 par 30, ou 3 par 20, ou 4 par 15, ou 5 par 12 ou 6 par 10. Toutes ces décompositions sont impossibles puisque l'un des deux nombres est supérieur à 9. Conclusion : N ne peut contenir ni 0, ni 1, ni 2.

2) 120 n'est pas divisible par 7, pas plus que par 9 donc, N ne peut contenir ni 7, ni 9.

3) On peut chercher une décomposition de 120 en produit de trois facteurs, tous différents de 0, 1, 2, 7 et 9 : la décomposition en produit de facteurs premiers de 120 est $120 = 2^3 \times 3 \times 5$.
Donc, par exemple, $120 = 8 \times 3 \times 5$, et $8 + 3 + 5 = 16$. Le nombre 835 est une solution du problème.
Pour trouver d'autres solutions, il suffit de faire des permutations des trois chiffres 8, 3 et 5 ce qui donne :
853, 538, 583, 358, 385.

4) On détermine les autres décompositions de 120 en produit de trois facteurs, tous inférieurs à 10 et différents de 0, 1, 2, 7, 9 : seul $120 = 4 \times 6 \times 5$ convient mais $4 + 6 + 5 = 15 \neq 18$.
Il y a six solutions au problème : 835, 853, 538, 583, 358 et 385.

8 Étudions une à une les données de l'exercice :

- 111 est un multiple du nombre entier positif A.

Autrement dit, A est un diviseur de 111. Or, $111 = 3 \times 37$ et les diviseurs positifs de 111 sont 1, 3, 37 et 111.
A peut donc prendre les valeurs de 1, 3, 37 ou 111.

- $A - B$ est un nombre entier positif ou nul divisible par 10.

Il existe un entier n positif ou nul tel que $A - B = 10\,n$, soit $B = A - 10\,n$ avec $B \geqslant 0$, c'est à dire $A - 10\,n \geqslant 0$ ou encore $0 \leqslant n \leqslant \dfrac{A}{10}$. Résumons dans un tableau les possibilités pour A, n et B :

A	inégalité	n	B
1	$0 \leqslant n \leqslant 0,1$	0	1
3	$0 \leqslant n \leqslant 0,3$	0	3
37	$0 \leqslant n \leqslant 3,7$	0	37
		1	27
		2	17
		3	7

A	inégalité	n	B
111	$0 \leqslant n \leqslant 11,1$	0	111
		1	101
		2	91
		3	81
		4	71
		5	61
		6	51
		7	41
		8	31
		9	21
		10	11
		11	1

- B est le cube d'un nombre entier.

Les cinq premiers cubes sont $0, 1, 8, 27$ et 256. Parmi les solutions trouvées dans le deuxième item, on a trois couples de solutions : $(A, B) = (1, 1)$; $(A, B) = (37, 27)$ et $(A, B) = (111, 1)$.

Les valeurs possibles pour A et B sont donc $\begin{cases} A = 1 \text{ et } B = 1 \\ A = 37 \text{ et } B = 27 \\ A = 111 \text{ et } B = 1 \end{cases}$

9 **1)** • 7 et 13 sont des nombres premiers ;

• $57 = 3 \times 19$ est divisible par 1, 3, 19 et 57, ce n'est pas un nombre premier ;

• 61 n'est divisible que par 1 et 61, c'est un nombre premier.

Parmi ces quatre nombres, seul 57 n'est pas un nombre premier.

2) a) $3\,737 = 37 \times 100 + 37 = 37 \times 101$, donc il est divisible par d'autres nombres que 1 et lui même.

3 737 n'est pas un nombre premier.

b) $\overline{abab} = \overline{ab} \times 100 + \overline{ab} = \overline{ab} \times 101$, il est donc divisible par d'autres nombres que 1 et lui même.

Un nombre du type $\overline{abab}$ n'est pas un nombre premier.

3) a) $\overline{abc} + \overline{abb} + \overline{acc} = (100a + 10b + c) + (100a + 10b + b) + (100a + 10c + c)$

$= 300a + 21b + 12c$

$= 3(100a + 7b + 4c)$

La somme de $\overline{abc}, \overline{abb}$ et $\overline{acc}$ est un nombre divisible par 3.

b) Soit $\overline{mnp}$ le nombre recherché.

$\overline{cba} + \overline{bba} + \overline{mnp} = (100c + 10b + a) + (100b + 10b + a) + (100m + 10n + p)$

$= 100c + 120b + 2a + 100m + 10n + p$

$= 3(33c + 40b + 33m + 3n) + (c + 2a + m + n + p)$

Il reste à choisir m, n et p pour que $c + 2a + m + n + p$ soit divisible par 3 : on a déjà deux a et un c, on peut donc prendre un a supplémentaire et deux autres c. On choisit un nombre comportant les chiffes a, c et c, par exemple $\overline{cac}$ (mais on pourrait également choisir $\overline{acc}$ ou $\overline{cca}$) et on vérifie qu'il convient :

$\overline{cba} + \overline{bba} + \overline{cac} = (100c + 10b + a) + (100b + 10b + a) + (100c + 10a + c)$

$= 201c + 120b + 12a$

$= 3(67c + 40b + 4a)$ qui est bien multiple de 3.

La somme de $\overline{cba}, \overline{bba}$ et de $\overline{cac}$ est un nombre divisible par 3.

10 **1)** La mesure de la taille des dalles doit diviser à la fois la largeur de l'allée de 120 cm, la longueur totale du sol de 1 040 cm (800 cm + 2×120 cm) et la largeur totale du sol de 740 cm (500 cm + 2×120 cm). Or,

• $120 = 2^3 \times 3 \times 5$ • $1\,040 = 2^4 \times 5 \times 13$ • $740 = 2^2 \times 5 \times 37$

Les diviseurs communs à ces trois nombres sont 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 10 ; 20.

Les longueurs possibles des dalles sont 1 cm ; 2 cm ; 4 cm ; 5 cm ; 10 cm et 20 cm.

2) a) On peut considérer que l'on a deux types d'allées : deux allées A de 1 040 cm par 120 cm et deux allées B de 500 cm par 120 cm.

• A : on peut poser 1 040 cm $\div$ 20 cm/dalle = 52 dalles dans la longueur et 120 cm $\div$ 20 cm/dalle = 6 dalles dans la largeur, ce qui donne donc 312 dalles sur toute la surface (52×6).

• B : on peut poser 500 cm $\div$ 20 cm/dalle = 25 dalles dans la longueur et 120 cm $\div$ 20 cm/dalle = 6 dalles dans la largeur, ce qui donne donc 150 dalles sur toute la surface (25×6).

Au total, on a donc 2×312 dalles + 2×150 dalles = 924 dalles.

M. Durand aura besoin de 924 dalles de 20 cm de côté pour couvrir son pourtour de piscine.

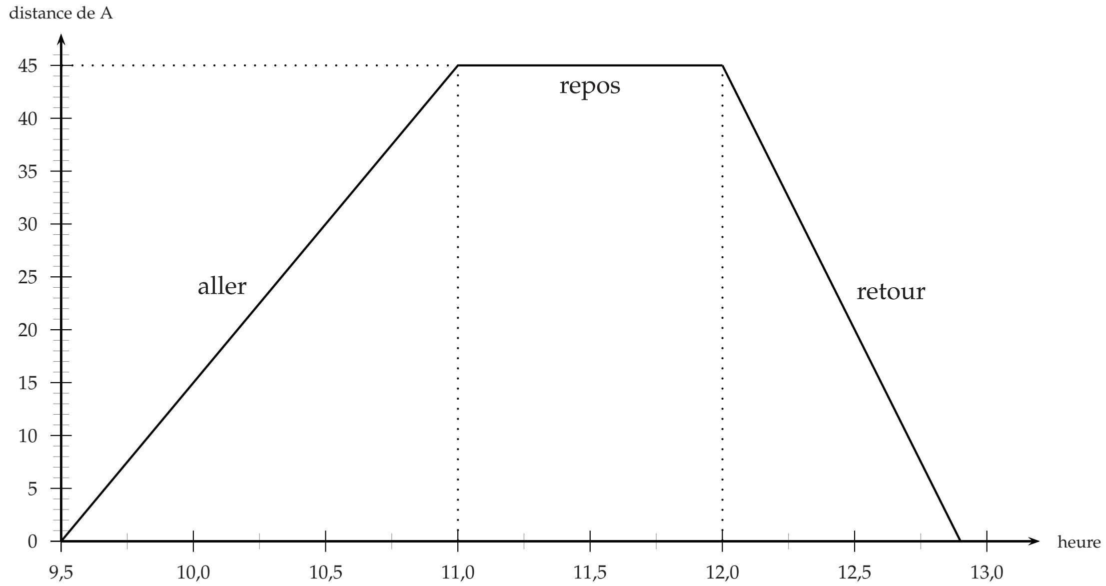
b) On a besoin de 16 dalles de 5 cm de côté pour couvrir une dalle de 20 cm de côté (la longueur du côté étant divisée par 4, son aire est divisée par 4^2). Il faut donc 16 fois plus de dalles de 5 cm pour couvrir la même surface. Or, $924 \times 16 = 14\,784$, d'où :

M. Durand aura besoin de 14 784 dalles de 5 cm de côté pour couvrir son pourtour de piscine.

Chapitre D5
Fonctions et tableurs

1 **1)** Le cycliste parcourt en moyenne 30 km en une heure. Donc, il parcourra 45 km en une heure et trente minutes. Le cycliste arrivera à 11 heures dans la ville B.

2) Représentation graphique du parcours.



3) Il est 12 heures lorsque le cycliste repart (11h + 1h). Sa vitesse est de 50 km/h et il lui faut parcourir 45 km.

D'après la formule $v = \dfrac{d}{t}$, on a $t = \dfrac{d}{v} = \dfrac{45\,\text{km}}{50\,\text{km/h}} = 0,9$ h.

Or, $0,9 \times 60 = 54$, donc le cycliste va mettre 54 minutes pour rentrer.

Le cycliste sera de retour à la ville A à 12 heures et 54 minutes.

2 **1)** Une vitesse de 90 km/h correspond à : $\dfrac{90\,\text{m}}{3\,600\,\text{s}} = 25$ m/s.

Sachant que la constante vaut $k = 0,14$, en utilisant la formule donnée on obtient en mètre :

$d_A = 25 \times 0,75 + 0,14 \times 25^2 = 106,25$.

Un véhicule circulant sur route mouillée à 90 km/h mettra 106,25 mètres pour s'arrêter.

2) Pour un conducteur vigilant sur route sèche, on a $t_R = 0,75$ et $k = 0,14$, d'où :

$d_A = 0,75\,v + 0,073\,v^2$.

L'expression de la distance en fonction de la vitesse n'est pas une fonction linéaire à cause de la présence du « v^2 » (il s'agit d'une fonction du second degré représentée par une parabole) donc,

la distance d'arrêt sur route sèche n'est pas proportionnelle à la vitesse.

3) **a)** Un véhicule roulant à 110 km/h s'arrête en 101 m.

b) La distance de freinage à 80 km/h est de 41 m.

c) Un véhicule qui roule à 130 km/h met 6,76 s pour s'arrêter.

d) Un distance de réaction de 25 m correspond à une vitesse de 120 km/h.

e) Un conducteur roulant à 27,8 m/s mettra 85,4 m pour s'arrêter, donc il évitera l'obstacle.

3

1)

Récipient	R1	R2	R3	R4	R5	R6
Jauge	E	C	F	A	B	D
Courbe	2	1	5	4	6	3

2) Le volume d'un cylindre de hauteur h et de rayon de base r est : $\mathcal{V} = \pi \times r^2 \times h$.
Le diamètre de R2 est de 16 cm, donc son rayon vaut 8 cm ;
le volume est de 10 litres, soit 10 dm^3, ou encore 10 000 cm^3. On a alors :
$10\,000\,\text{cm}^3 = \pi \times 8^2 \times h\,\text{cm}^3 \iff h = \dfrac{10\,000\,\text{cm}^3}{64\pi\,\text{cm}^2} \approx 49{,}74\,\text{cm}$.
Le récipient R2 mesure environ 50 centimètres de haut.

3) Le cylindre R2 se remplit de manière homogène, donc, $\mathcal{V}' = \dfrac{2}{3} \times \mathcal{V} = \dfrac{2}{3} \times 10\,\text{L} \approx 6{,}67$ L.
À l'instant t, le récipient R2 contient environ 6,7 litres d'eau.

4) La courbe correspondant à R2 est la courbe 1 : c'est une fonction linéaire puisque le débit est constant.
Sur l'axe des abscisses, 15 carreaux représentent le temps pour remplir les réservoirs en entier, donc 10 carreaux représentent les deux tiers du temps $\left(\dfrac{2}{3} \times 15 = 10\right)$.
À cet endroit, la courbe représentative de R2 est au dessus de la courbe représentative de R6 d'où :
aux deux tiers du temps, la hauteur d'eau dans le récipient R2 est supérieure à celle du récipient R6.

4 **1) a)** Les deux fonctions sont affines, donc représentées par des droites. On peut lire l'ordonnée à l'origine de chacune des droites :
- l'ordonnée à l'origine de f vaut 284, qui correspond à l'ordonnée à l'origine de la droite C_1 ;
- l'ordonnée à l'origine de g vaut 115, qui correspond à l'ordonnée à l'origine de la droite C_2.

La fonction f est représentée par la courbe C_1 et g par C_2.

b) Pour 6 palettes, c'est la courbe C_2 qui a l'ordonnée la plus petite, donc la fonction g, ce qui correspond à la société B.

c) Graphiquement, la courbe représentative de g est située en dessous de celle de f pour un nombre de palettes inférieur à 10. Donc, entre 0 et 9 palettes, il est préférable de choisir la société B, et à partir de 10 palettes il vaut mieux choisir la société A.

2)
$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\iff 12x + 284 = 29x + 115 \\ &\iff 284 - 115 = 29x - 12x \\ &\iff 169 = 17x \\ &\iff x = \frac{169}{17}x \approx 9{,}94 \end{aligned}$$
x étant un nombre entier, la société B est bien préférable pour un nombre de palettes compris entre 0 et 9.

5 **1) a)** Pour l'abscisse $r = 1{,}5$ cm, on lit une aire environ égale à 450 cm^2.
b) Pour une ordonnée $\mathcal{A} = 300$ cm^2, on lit deux valeurs pour le rayon : $r_1 \approx 2{,}5$ cm et $r_2 \approx 5{,}25$ cm.
c) Pour une canette classique de rayon 3,3 cm, on lit une aire d'environ 270 cm^2 et pour une canette slim de rayon 2,8 cm, on lit une aire d'environ 285 cm^2. Donc, c'est la canette classique qui demande le moins de surface de métal.
d) La surface minimale est atteinte pour un rayon d'environ 3,75 cm.
2) a) Dans `B2`, on peut écrire : `=2*PI()*B1^2+660/B1`
b) Les valeurs minimales pour l'aire dans le tableau sont 264,40 et 264,41, elles correspondent à un rayon compris entre 3,7 cm et 3,8 cm.

6 **1)** En D4, on entre : `=B4*C4`

2) en D11, on entre : `=SOMME(D4:D9)`

3) Cette formule est une formule conditionnelle : si le total HT est inférieur à 5 000 €, la remise sera de 5 % (0,05), sinon, la remise sera de 10 % (0,10).

4) En D12, on entre `=D11*B12`

5) Non, car sinon, le calcul de la TVA se ferait sur la remise. En D13, on entre `=D11*B13`

Remarque : la recopie aurait été possible si on avait fixé la cellule D11, au moins au niveau de la ligne avec par exemple la formule `=D$11*B12`

6) En D15, on entre `=D11-D12+D13`

7) Si on réduit le nombre d'ordinateurs à 3, les cellules suivantes changent : D7 (somme payée pour les ordinateurs), D11 (prix HT), B12 (pourcentage de la remise), D12 (remise), D13 (montant de la TVA) et D15 (prix total). Le prix à payer est de 5 684,16 €.

7 **1)** Pour le cas 1, l'aire de la partie blanche est égale à la somme des aires des carrés 2 et 3. Il suffit donc de regarder dans quelle feuille de calcul c'est également le cas en regardant les valeurs des colonnes C, D et G :

Pour la feuille A, en ligne 2, on a $4 + 9$ qui est bien égal à 13.

Pour la feuille B, en ligne 2, on a $4 + 9$ qui n'est pas égal à 16.

La feuille de calcul A correspond au cas 1 et la feuille B correspond au cas 2.

2) a) En E2, on a pu saisir la formule : `=(A2+3)^2`

b) En F2, on a pu saisir la formule : `=B2+E2`

3) – Pour la feuille de calcul A, on remarque que la valeur de chaque cellule de la colonne F est augmentée de 4 par rapport à sa cellule voisine de la colonne G, et si cela se vérifie pour toutes les valeurs, alors les deux aires ne pourront jamais être égales.

– Pour la feuille de calcul B, les valeurs des cellules de la colonne F augmentent plus vite que celles de la colonne G tout en étant supérieures à partir de 2. Pour 1, les aires ne sont pas égales et comme les valeurs des côtés sont des nombres entiers naturels, il semble impossible de trouver une solution au problème.

D'après les copies d'écran, on peut conjecturer qu'il n'y a aucune solution au problème quelle que soit la configuration.

4) On appelle n la mesure, en centimètre, du côté du carré le plus petit.

• Le cas 1 se modélise par l'équation suivante :

$$n^2 + (n+3)^2 = (n+1)^2 + (n+2)^2 \iff \cancel{n^2} + \cancel{n^2} + 6n + 9 = \cancel{n^2} + 2n + 1 + \cancel{n^2} + 4n + 4$$
$$\iff \cancel{6n} + 9 = \cancel{6n} + 5$$
$$\iff 9 = 5.$$ Cette équation n'est donc pas possible.

• Le cas 2 se modélise par l'équation suivante :

$$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = (n+3)^2 \iff \cancel{n^2} + n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4 = \cancel{n^2} + 6n + 9$$
$$\iff 2n^2 + \cancel{6n} + 5 = \cancel{6n} + 9$$
$$\iff 2n^2 = 4$$
$$\iff n^2 = 2.$$ Les solutions de cette équation sont $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ qui ne sont pas des nombres entiers, donc le cas 2 n'a pas de solution.

Conclusion : Cette situation n'a pas de solution.

8 **1)** La valeur 18 correspond à l'espacement minimal en mètre entre deux véhicules à une vitesse de 3 m/s pour 4 sièges par véhicule.

2) On peut choisir les formules suivantes : `=$B3*(4+E$2/2)` ou `=B3*(4+4/2)`

3) La cellule E3 nous indique que, pour un véhicule à 4 places se déplaçant à 2,3 m/s, l'espacement minimal est de 13,8 m. Avec la formule, on obtient alors : $D = 3\,600 \times 4 \times \dfrac{2,3}{13,8} = 2\,400$.

L'affirmation est cohérente avec les données de l'énoncé.

4) – La cellule E6 nous indique que, pour un véhicule à 4 places se déplaçant à 2 m/s, l'espacement minimal est de 12 m. Avec la formule, on obtient alors : $D = 3\,600 \times 4 \times \dfrac{2}{12} = 2\,400$.

– La cellule E13 nous indique que, pour un véhicule à 4 places se déplaçant à 3 m/s, l'espacement minimal est de 18 m. Avec la formule, on obtient alors : $D = 3\,600 \times 4 \times \dfrac{3}{18} = 2\,400$.

Pour des véhicules à 4 sièges, le débit est identique que la vitesse soit de 2 m/s ou de 3 m/s.

5) On a $D = 3\,600\,n\dfrac{V}{E}$ où $E = V\left(4 + \dfrac{n}{2}\right)$ soit $\dfrac{E}{V} = 4 + \dfrac{n}{2}$

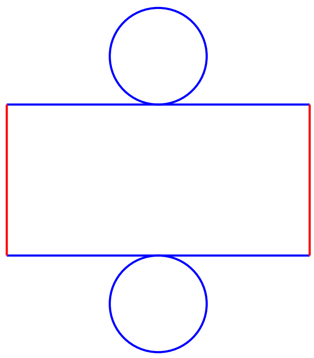
En prenant l'inverse de cette expression, on obtient $\dfrac{V}{E} = \dfrac{1}{4 + \dfrac{n}{2}}$.

Alors, $D = \dfrac{3\,600\,n}{4 + \dfrac{n}{2}} = \dfrac{7\,200\,n}{8 + n}$.

Le débit D s'exprime donc uniquement en fonction du nombre de sièges n.

Ce qui confirme le résultat trouvé dans la question 4 : en effet, avec $n = 4$, on trouve $D = \dfrac{7\,200 \times 4}{8 + 4} = 2\,400$.

9 **1)** Patron à main levée d'un cylindre :



2) On a $\mathcal{V} = \pi \times r^2 \times h = 908$ donc, $h = \dfrac{908}{\pi\, r^2}$ avec des longueurs exprimées en cm.

3) **a)** La formule de l'aire d'un disque de rayon r étant $\mathcal{A} = \pi \times r^2$, la formule entrée en C2 puis recopiée vers le bas correspond à la proposition 2.

b) L'aire totale de la boite de conserve est la somme de l'aire des deux disques et de l'aire latérale donc, on peut proposer la formule : `=2*C2+D2`.

c) En analysant la colonne E, on observe que les valeurs de l'aire totale sont décroissantes pour des valeurs entières du rayon allant de 2 à 6, puis sont croissantes pour des valeurs de r allant de 6 à 16 donc : on peut conjecturer que la valeur du rayon est dans l'intervalle $]5\,;7[$.

10 **1)** 0,5 litre de boisson A contient $\frac{10}{100} \times 0,5$ L $= 0,05$ L de jus d'orange.

1,25 litres de boisson B contient $\frac{5}{100} \times 1,25$ L $= 0,0625$ L de jus d'orange.

C'est la bouteille B qui contient la plus grande quantité de jus d'orange.

2) Dans 20 cL de boisson A, on a $0,1 \times 20$ cL $= 2$ cL de jus d'orange.

Dans 30 cL de boisson B, on a $0,05 \times 30$ cL $= 1,5$ cL de jus d'orange.

Donc, dans le mélange de 20 cL + 30 cL = 50 cL de boisson, il y a 2 cL + 1,5 cL = 3,5 cL de jus d'orange.

Ce qui représente un pourcentage de $\frac{3,5 \text{ cL}}{50 \text{ cL}} \times 100 = 7\,\%$.

D'où : il y a 7 % de jus d'orange dans le mélange.

3) Les capacités sont données en cL.

Soit x la contenance de la boisson A et $(40 - x)$ la contenance de la boisson B.

La quantité de jus d'orange dans le mélange est de :

$$\begin{aligned} 0,1 \times x + 0,05 \times (40 - x) &= 0,1x + 2 - 0,05x \\ &= 0,05x + 2, \end{aligned}$$

soit un taux en pourcentage de :

$$\begin{aligned} \frac{0,05x + 2}{40} \times 100 &= (0,05x + 2) \times 2,5. \\ &= 0,125x + 5. \end{aligned}$$

Ce taux doit être égal à 8 %, d'où l'équation :

$$\begin{aligned} 0,125x + 5 = 8 &\iff 0,125x = 8 - 5 = 3 \\ &\iff x = \frac{3}{0,125} = 24. \end{aligned}$$

On a alors $40 - x = 40 - 24 = 16$.

Pour avoir 8 % de jus d'orange dans le mélange, il faut 24 cL de boisson A et 16 cL de boisson B.

4) Dans la case C14, on a la formule `=(0,1*A14+0,05*B14)/40`.

On a A14 = 12 et B14 = 28 donc, le nombre obtenu dans la cellule C14 représente le taux de jus d'orange dans un mélange composé de 12 cL de boisson A et de 28 cL de boisson B.

On obtient $(0,1 \times 12 + 0,05 \times 28) \div 40 = 2,6 \div 40 = 0,065$, soit 6,5 %.

Si on mélange 12 cL de boisson A avec 28 cL de boisson B, on obtient une concentration de 6,5 % de jus d'orange dans le mélange.

Chapitre D6

Proportionnalité

1 **1) a)** Entre 32 °F et 212 °F, il y a 180 °F et 10 intervalles réguliers, donc, un intervalle correspond à 18 °F.

b) S'il y avait proportionnalité, les « 0 » coïncideraient, ce qui n'est pas le cas, donc, les deux suites de nombres ne sont pas proportionnelles.

2) Pour $t = 0$, on a $T = 32$, donc $32 = a \times 0 + b \iff b = 32$.

Pour $t = 100$, on a $T = 212$, donc :

$$212 = a \times 100 + 32 \iff a \times 100 = 212 - 32$$
$$\iff a = \frac{180}{100} = 1{,}8.$$

On a alors $T = 1{,}8t + 32$.

3) a) On a $t = 25$, donc $T = 1{,}8 \times 25 + 32 = 77$.

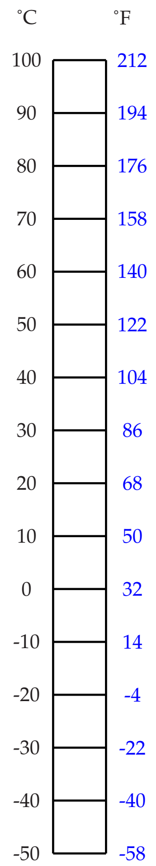
Lorsqu'il fait 25 °C, cela correspond à 77 °F.

b) On regarde sur le dessin, 25 °C est le centre de l'intervalle [20 °C ; 30 °C], cela correspond au centre de l'intervalle [68 °F ; 86 °F], ce qui donne $\frac{68 + 86}{2} = 77$, donc la température est bien de 77 °F.

4) On doit avoir $t = T$, soit :

$$t = 1{,}8t + 32 \iff t - 1{,}8t = 32$$
$$\iff -0{,}8t = 32$$
$$\iff t = \frac{32}{-0{,}8} = -40.$$

L'échelle des températures donne la même valeur à la température de -40 degrés.



2 **1)** On remarque que, sur la graduation supérieure, une graduation correspond à une unité, donc, la graduation 12 correspond à la 12[e] graduation à partir du 0. On se retrouve alors sur la graduation 18 de la graduation inférieur.

2) La graduation supérieure 2 007 est la 2 007[e] graduation. Or, pour la graduation inférieure, 5 intervalles correspondant à 2 graduations.

On a également que $2\,007 = 5 \times 401 + 2$, on a donc 401 fois 5 graduations à partir de la graduation 2 supérieure, donc 401 fois 2 unités pour la graduation inférieure à partir de 14.

$14 + 401 \times 2 = 816$. Donc,

le nombre 816 de la graduation inférieure correspond au nombre 2 007 de la graduation supérieure.

3) Inversement, $14 = 7 \times 2$, donc il faut revenir vers la gauche de $7 \times 5 = 35$ graduations.

Et $2 - 35 = -33$, donc

le nombre 0 de la graduation inférieure correspond au nombre -33 de la graduation supérieure.

4) Pour $y = 0$, on a $x = -33$, donc $-33 = a \times 0 + b \iff b = -33$.

Pour $x = 2$, on a $y = 14$, donc $2 = a \times 14 - 33 \iff 2 + 33 = 14a \iff a = \frac{35}{14} = 2{,}5$.

La correspondance entre x et y est donnée par l'égalité $x = 2{,}5y - 33$.

3 **1)** L'image de 7 est d'environ 7,5. Pour 7 litres d'eau liquide, on obtient environ 7,5 litres de glace.

2) On lit l'antécédent de 9, qui est environ 8,3 (avec la précision permise par le graphique).
Il faut environ 8,3 litres d'eau liquide pour obtenir 9 litres de glace.

3) On observe sur le graphique que le volume de glace en fonction du volume d'eau liquide est représenté par un segment de droite passant par l'origine. Le volume de glace est proportionnel au volume d'eau liquide.

4) Le volume de l'eau passant de l'état liquide à l'état solide augmente de 0,8 litres pour 10 litres. Donc, il augmenterait de 8 litres pour 100 litres. L'augmentation due à la solidification est de 8%.

5) Pour un jour de nettoyage, la ville fournit un volume de $20\ \text{m}^3 = 20\,000\ \text{dm}^3$, soit une capacité de 20 000 L.
Donc, pour 30 jours de nettoyage, la capacité est de $30 \times 20\,000\ \text{L} = 600\,000\ \text{L}$.
La transformation à l'état solide augmente de 8 % la capacité initiale, ce qui correspond à un coefficient multiplicateur de $1 + \dfrac{8}{100} = 1,08$. On obtient alors $1,08 \times 600\,000\ \text{L} = 648\,000\ \text{L}$.
Le volume d'eau fourni par la ville de Lyon pour 30 jours correspond à 648 000 L de glace.

4 **1)** Pour une masse de 70 g, le ressort du peson s'allongera de $7 \times 0,5$ cm = 3,5 cm.
Sa longueur totale sera alors de 14 cm + 3,5 cm = 17,5 cm.

2) Si le ressort mesure 28 cm, il s'est allongé de 14 cm. Or, $14\ \text{cm} = 28 \times 0,5$ cm.
Ce qui correspond à une masse de 28×10 g = 280 g.

3) Si la longueur du ressort était proportionnelle à la masse suspendue, elle serait nulle pour une masse nulle.
Ce n'est pas le cas puisque pour une masse nulle, le ressort mesure 14 cm.
Ces deux grandeurs ne sont pas proportionnelles.

5 **1)** On a $\pi \times \text{diamètre} = 54\,\pi\ \text{cm} \approx 169,646$ cm. La circonférence de la roue vaut environ 169,6 cm.

2) **a)** La voiture parcourt :

$$\begin{array}{rl} 110\ \text{km} & \text{en une heure ;} \\ 11\,000\,000\ \text{cm} & \text{en 3 600 secondes ;} \\ \dfrac{11\,000\,000}{3\,600}\ \text{cm} = \dfrac{27\,500}{9}\ \text{cm} & \text{en une seconde.} \end{array}$$

Or, le périmètre de la roue fait 54π cm donc en une seconde, on a $\dfrac{\frac{27\,500}{9}}{54\pi}$ tours $\approx 18,01$ tours.
La roue fait environ 18 tours par seconde.

b) En une seconde, la caméra fait 24 images et la roue 18 tours, donc entre deux images la roue fait $\dfrac{18}{24}$ tour = 0,75 tour. Le pneu aura fait 0,75 tour entre deux images.

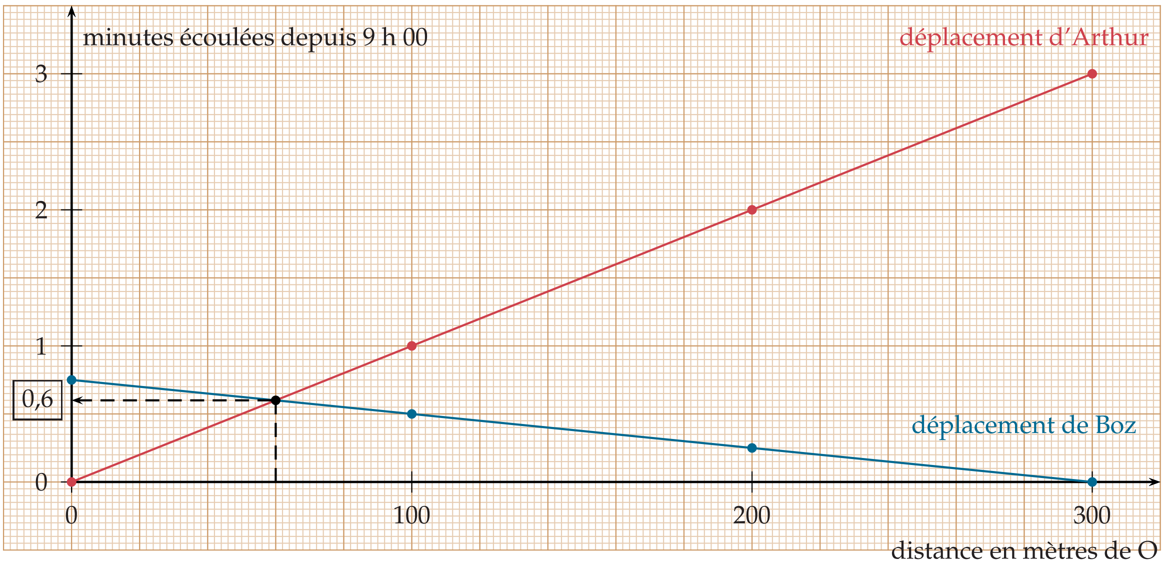
2) Le nombre de tours est proportionnel à la vitesse, pour s'en convaincre, on peut d'écrire la formule du nombre de tours T en fonction de la vitesse v en km/h :

$$T = \frac{\dfrac{\text{vitesse en m/s}}{\text{périmètre en m}}}{\text{vitesse de défilement en images/s}} = \frac{\dfrac{\frac{100\,000\,v}{3\,600}}{54\pi}}{24} = \frac{100\,000\,v}{3\,600 \times 54\pi \times 24} \approx 0,0068\,v.$$

La roue semble ne pas tourner lorsqu'elle fait un cinquième de tour complet puisque, dans l'énoncé, il est précisé que la roue possède cinq rayons (on considère qu'elle contient cinq rayons identiques et que de plus, les portions entre deux rayons sont aussi identiques, ce qui semble être un implicite de l'énoncé).
On sait d'après la question précédente qu'une vitesse de 110 km/h correspond à 0,75 tour entre deux images, donc pour avoir 0,2 tour, on effectue le calcul $\dfrac{110 \times 0,2}{0,75} \approx 29,3$.
La roue semble immobile à une vitesse d'environ 29 km/h ou tout multiple de 29 km/h. cohérent avec la réalité.

6 **1)** Arthur parcourt 6 kilomètres en 1 heure, soit 6 000 mètres en 60 minutes, ou encore 100 mètres en 1 minute.
Arthur avance à une vitesse de 100 m/min.
Boz parcourt 24 kilomètres en 1 heure, soit 24 000 mètres en 60 minutes, ou encore 400 mètres en 1 minute.
Boz avance à une vitesse de 400 m/min.

2) a) On note O, origine du repère, l'endroit où se trouve Arthur au départ, à 9 heures.
- Sur l'axe des abscisses, on représente la distance des robots au point O. À 9 heures, Arthur est en O alors que Boz est à 300 mètres du point O. On choisit (par exemple) une échelle de 1 cm pour 20 mètres en abscisse.
- Sur l'axe des ordonnées, on représente le temps écoulé, en minutes, à partir de 9 h 00. Pour parcourir les 300 mètres, le robot le plus lent : Arthur, mettra 3 minutes. On choisit 1 cm pour 30 secondes en ordonnée.
- Courbe d'Arthur : sa vitesse est uniforme, sa courbe est donc une droite passant par l'origine et par le point de coordonnées (100 ;1) puisqu'il a une vitesse de 100 m/min.
- Courbe de Boz : sa vitesse est uniforme également, sa courbe est donc une droite passant par son point de départ représenté en (300 ;0). Sa vitesse est de 400 m/min, il aura donc parcouru 200 mètres en 0,5 minute, graphiquement, cela correspond au point de coordonnées (100 ;0,5).



b) Graphiquement, il suffit de trouver le point d'intersection des courbes de déplacement des deux robots, puis de lire son ordonnée : on trouve 0,6 minutes, soit 36 secondes.
Les deux robots se rencontreront à 9 h 00 min 36 s.

3) On sait que $v = \dfrac{d}{t}$, donc $d = v \times t$ où on exprimera v en mètre par minute, d en mètre et t en minute.
Pour Arthur, on a $d_A = 100\,t_A$; pour Boz, on a $d_B = 400\,t_B$.
Au point de rencontre, le même temps se sera écoulé, donc $t = t_A = t_B$;
de plus, la distance totale parcourue par les deux robots sera de 300 mètres, soit :

$$\begin{aligned} d_A + d_B = 300 &\iff 100t + 400t = 300 \\ &\iff 500t = 300 \\ &\iff t = \frac{300}{500} = 0,6. \end{aligned}$$

On obtient un temps écoulé de 0,6 minute, soit $0,6 \times 60\,\text{s} = 36\,\text{s}$.

Les deux robots se rencontreront à 9 h 00 min 36 s.

7 **1)** D'après le document 3, étant donnée la vitesse moyenne calculée supérieure à 100 km/h, il faut diminuer la vitesse de 5 %, soit appliquer un coefficient multiplicateur de $1 - \dfrac{5}{100} = 0,95$.

Or, $123 \times 0,95 = 116,85$. Donc, La vitesse retenue est de 116,85 km/h.

2) L'automobiliste parcourt 5,1 km (document 1) en 4 min.

$$\begin{aligned}\text{On a } v = \frac{d}{t} &= \frac{5{,}1\,\text{km}}{4\,\text{min}}\\ &= \frac{5{,}1\,\text{km}}{\frac{4}{60}\text{h}}\\ &= 5,1 \times \frac{60}{4}\,\text{km/h}\\ &= 76,5\,\text{km/h}.\end{aligned}$$

D'après le document 3, étant donnée la vitesse moyenne calculée inférieure à 100 km/h, il faut diminuer la vitesse de 5 km/h, soit 76,5 km/h − 5 km/h = 71,5 km/h.

Conclusion : la vitesse retenue est de 71,5 km/h.

3) À une vitesse retenue de 114 km/h, la vitesse calculée était nécessairement supérieure, donc supérieure à 100 km/h, ce qui signifie qu'une réduction de 5 % a été appliquée à la vitesse calculée.

Soit v la vitesse calculée, on a alors $v \times 0,95 = 114\,\text{km/h} \iff v = \dfrac{114\,\text{km/h}}{0,95} = 120\text{km/h}$.

La vitesse moyenne calculée était de 120 km/h.

4) Entre 9 h 17 min 56 s et 9 h 22 min 07, il s'est écoulé 4 min 11 s, soit 251 s.

Il a donc parcouru 5,1 km en 251 s.

En 1 h, soit 3 600 s, il aurait donc parcouru $\dfrac{5{,}1\,\text{km} \times 3\,600\,\text{s}}{251\,\text{s}} \approx 73{,}15\,\text{km}$, d'où une vitesse de 73,15 km/h environ.

La correction appliquée est un retrait de 5 km/h, soit 68,15 km/h.

La vitesse étant limitée à 70 km/h, d'après le document 1, le conducteur ne sera pas verbalisé.

8 **1)** $\text{vitesse} = \dfrac{\text{distance}}{\text{temps}}$ donc :

$$v = \frac{200\text{ m}}{19,19\text{ s}} = \frac{0,2\text{ km}}{\frac{19,19}{3\,600\text{ h}}} \approx 37,52\text{ km/h}.$$

La vitesse d'Usain Bolt sur 200 m est d'environ 37,5 km/h.

2) $v = \dfrac{d}{t} \iff t = \dfrac{d}{v} = \dfrac{42,195\text{ km}}{37,52\text{ km/h}} \approx 1,125\text{ h}.$

Or, 1,125 h = 1 h + 0,125 h

= 1 h + 0,125×60 min

= 1 h + 7,5 min

= 1h + 7 min + 30 s.

À cette allure, Usain Bolt mettrait 1 h 7 min 30 s pour arriver au bout d'un marathon.

3) $$\begin{aligned}p &= \frac{t_{\text{Bolt}} - t_{\text{Johnson}}}{t_{\text{Johnson}}} \times 100\\ &= \frac{19,19\text{ s} - 19,32\text{ s}}{19,32\text{ s}} \times 100 \approx -0,67.\end{aligned}$$

Usain Bolt a réduit le temps de Michael Johnson de 0,67 %.

9 **1)** On note $\mathcal{A}_i$ l'aire initiale et $\mathcal{A}_f$ l'aire finale après transformation. Soit ℓ et L respectivement la largeur et la longueur d'un rectangle. L'aire initiale du rectangle est $\mathcal{A}_i = \ell L$.

Une réduction de 20% correspond à un coefficient multiplicateur de $1 - \dfrac{20}{100} = 0,8$ et une réduction de 10% correspond à un coefficient multiplicateur de $1 - \dfrac{10}{100} = 0,9$.

D'où $\mathcal{A}_f = 0,8\ell \times 0,9L = 0,72\ell L = \left(1 - \dfrac{28}{100}\right)\mathcal{A}_i$ ce qui correspond à une diminution de 28%.

L'affirmation est vraie.

2) On note P_i le périmètre initial et P_f le périmètre final après transformation. En reprenant les coefficients multiplicateurs de l'item précédent, on trouve :

$P_i = 2(6\text{ cm} + 9\text{ cm}) = 30\text{ cm}$ et $P_f = 2(0,8 \times 6\text{ cm} + 0,9 \times 9\text{ cm}) = 25,8\text{ cm}$.

Or, une diminution de 15% donnerait un périmètre $P_f = 0,85 \times 29\text{ cm} = 24,65\text{ cm}$ ce qui n'est pas le cas.

L'affirmation est fausse.

3) Un baisse de 30 % suivie d'une baisse de 20 % correspond à un coefficient multiplicateur de $\left(1 - \dfrac{30}{100}\right) \times \left(1 - \dfrac{20}{100}\right) = 0,7 \times 0,8 = 0,56 = 1 - \dfrac{44}{100}$. Soit une baisse de 44 %.

L'affirmation est fausse.

4) Une baisse de 30 % correspond à un coefficient multiplicateur de $1 - \dfrac{30}{100} = 0,7$ et une hausse de 50 % correspond à un coefficient de $1 + \dfrac{50}{100} = 1,5$. Le coefficient résultant de ces deux variations vaut $0,7 \times 1,5 = 1,05 = 1 + \dfrac{5}{100}$ ce qui correspond à une augmentation de 5 %.

L'affirmation est vraie.

5) Une augmentation de 5 % correspond à un coefficient multiplicateur de $1 + \dfrac{5}{100} = 1,05$.

Au bout de 15 ans, le coefficient sera de $1,05^{15} \approx 2,08 > 2$.

L'affirmation est vraie.

6) Soit x le prix initial, $x \times \dfrac{30}{100} = 48 \iff x = 160$. Le prix initial est de 160 €, auquel on enlève la réduction de 48 € ce qui donne bien 112 €.

L'affirmation est vraie.

10 **1)** **a)** Pour le rugby, le ratio gains - pertes est de 9 : 6, ou encore 3 : 2.

Pour le judo, le ratio gains - pertes est de 12 : 8, soit 3 : 2.

Pour le handball, le ratio gains - pertes de 10 : 5, ou 2 : 1.

Conclusion : le rugby et le judo ont le même ratio gains - pertes.

b) Pour le handball, le ratio gains - matchs joués est de 10 : 15 équivalent à 2 : 3.

La fraction de matchs gagnés est de $\dfrac{10}{15} = \dfrac{2}{3}$.

Le pourcentage de matchs gagnés est de $\dfrac{10}{15} \times 100 \approx 67\,\%$.

2) Le ratio 3 : 5 signifie que lorsqu'un joueur gagne 3 €, l'autre gagne 5 € pour une somme de 8 €.

S'ils gagnent 64 €, c'est à dire 8 fois plus, l'un gagnera 24 € et l'autre 40 €.

3) Le jus d'orange, d'ananas et de pomme sont dans le ratio 2 : 3 : 4. Donc, pour 2 L de jus d'orange, il faut 3 L de jus d'ananas et 4 L de jus de pomme ce qui donne 9 L de cocktail.

Pour 45 L, soit 5 fois plus, il faut 10 L de jus d'orange, 15 L de jus d'ananas et 20 L de jus de pomme.

Chapitre D7

Probabilités

1 Toutes ces situations sont des situations d'équiprobabilité.

1) La probabilité d'obtenir pile est toujours la même, quel que soit le nombre de lancer donc, l'affirmation 1 est vraie.

2) On obtient deux boules vertes en tirant une boule verte dans la première urne, et une autre boule verte dans la deuxième urne. Or, la probabilité d'obtenir une boule vert est de $\frac{1}{4}$ pour chacune des urnes donc, la probabilité d'obtenir deux boules vertes est de $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$.

L'affirmation 2 est fausse.

3) On obtient une somme de 3 en ayant soit « 1 » sur un dé et « 2 » sur l'autre dé, soit deux possibilités (1 et 2 ou 2 et 1) alors qu'il y a une seule possibilité pour obtenir 2 (1 et 1) donc, les probabilités ne sont pas égales.

L'affirmation 3 est fausse.

2 **1)** On obtient le tableau suivant :

	15-25 ans	26-44 ans	45-60 ans	+60 ans	Total
Pas du tout	22	82	415	147	666
Une fois	682	3 794	1 243	589	6 308
Deux fois	413	634	552	138	1 737
Trois fois	174	95	384	1 254	1 907
Quatre fois ou plus	251	418	923	317	1 909
Total	1 542	5 023	3 517	2 445	12 527

2) Nous sommes dans une situation d'équiprobablité puisque l'on effectue un tirage « au hasard ».
On note Ω l'ensemble des personnes interrogées.

a) Soit A l'événement « La personne est allée deux fois au restaurant en janvier 2017 ».

$$\mathcal{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{1\,737}{12\,527} \approx 0,14.$$

La probabilité que le numéro corresponde à une personne qui est allée exactement deux fois au restaurant pendant le mois de janvier 2017 est d'environ 0,14.

b) Soit B l'événement « La personne a moins de 45 ans ».

$$\mathcal{P}(B) = \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{1\,542 + 5\,023}{12\,527} = \frac{6\,565}{12\,527} \approx 0,52.$$

La probabilité que le numéro corresponde à une personne qui a moins de 45 ans est d'environ 0,52.

c) Soit C l'événement « La personne a plus de 60 ans et est allée au moins trois fois au restaurant pendant le mois de janvier 2017 ».

$$\mathcal{P}(C) = \frac{\text{Card}(C)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{1\,254 + 317}{12\,527} = \frac{1\,571}{12\,527} \approx 0,13.$$

La probabilité que le numéro corresponde à une personne de plus 60 ans qui est allée au moins trois fois au restaurant en janvier 2017 est d'environ 0,13.

3 **1)** Les dés sont équilibrés, nous sommes donc dans une situation d'équiprobabilité.

a) Avec le dé à six faces, la probabilité d'obtenir un 3 est $\mathcal{P}_1 = \frac{1}{6}$ alors que pour le dé tétraédrique, elle est de $\mathcal{P}_2 = \frac{1}{4}$. Or, $\frac{1}{4} > \frac{1}{6}$ donc, il est plus probable d'obtenir un 3 avec le dé tétraédrique.

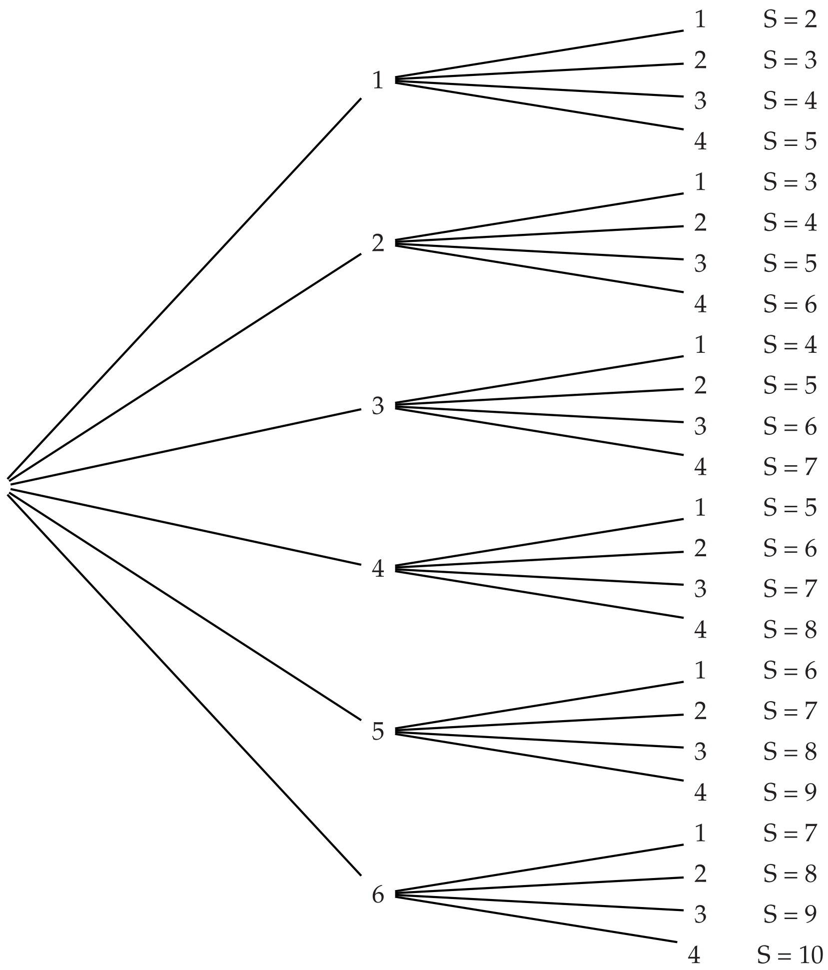
b) Avec le dé à six faces, la probabilité d'obtenir un multiple de 3 (donc 3 ou 6) est $\mathcal{P}_3 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ alors que pour le dé tétraédrique, elle est de $\mathcal{P}_4 = \frac{1}{4}$. Or, $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$ donc, il est plus probable d'obtenir un multiple de 3 avec le dé à six faces.

c) D'après l'arbre ci-dessous, on a 10 issues menant à un résultats favorable sur un total de 24 issues (6×4).
Donc, la probabilité d'obtenir avec le dé à 4 faces un nombre supérieur ou égal au nombre obtenu avec le dé à 6 faces est de $\frac{10}{24} = \frac{5}{12}$.

2) **a)** On a 12 issues menant à une somme paire sur un total de 24 issues possibles.
Donc, la probabilité d'obtenir une somme paire est de $\frac{12}{24} = \frac{1}{2}$.

b) On a 3 issues menant à une somme inférieure ou égale à 3 sur une total de 24 issues possibles.
Soit $24 - 3 = 21$ issues menant à une somme supérieure strictement à 3, donc, la probabilité d'obtenir une somme strictement supérieures à 3 est de $\frac{21}{24} = \frac{7}{8}$.

Arbre (non pondéré) modélisant la situation.



4 **1)** Les boules sont indiscernables au toucher, nous sommes donc dans un cas d'équiprobabilité.
Il y a 7 boules bleues pour un total de 25 boules ($3+4+5+7+6=25$). D'où : $\mathcal{P}=\dfrac{7}{25}$.
La probabilité de tirer une boule bleue est de $\dfrac{7}{25}$.
2) Soit n le nombre de boules bleues à ajouter, la probabilité de tirer une boule bleue est alors de $\mathcal{P}=\dfrac{7+n}{25+n}$.
$\dfrac{7+n}{25+n}\geqslant 0,4 \iff 7+n\geqslant 10+0,4n \iff n-0,4n\geqslant 10-7 \iff 0,6n\geqslant 3 \iff n\geqslant \dfrac{3}{0,6} \iff n\geqslant 5.$
Il faut ajouter au minimum 5 boules bleues avant le tirage pour que la probabilité de tirer une boule bleue soit supérieure ou égale à 0,4.
3) Soit m le nombre de boules rouges à ajouter, la probabilité de tirer une boule bleue est alors de $\mathcal{P}=\dfrac{7}{25+m}$.
$\dfrac{7}{25+m}\leqslant 0,2 \iff 7\leqslant 5+0,2m \iff -0,2m\leqslant 5-7 \iff -0,2m\leqslant -2 \iff m\geqslant \dfrac{-2}{-0,2} \iff m\geqslant 10.$
Il faut ajouter au minimum 10 boules rouges avant le tirage pour que la probabilité de tirer une boule bleue soit inférieure ou égale à 0,2.

5 **1)** La probabilité d'atteindre la couronne extérieure est proportionnelle à l'aire de cette zone. On peut, par exemple, déterminer l'aire de la couronne ainsi que l'aire de la cible.
- Aire de la cible en cm^2 : $\mathcal{A}=\pi\times 15^2=225\,\pi$.
- Aire cumulée de la couronne blanche et du disque noir en cm^2 : $\mathcal{A}_1=\pi\times 10^2=100\,\pi$.
- Aire de la couronne extérieure en cm^2 : $\mathcal{A}_2=\mathcal{A}-\mathcal{A}_1=225\,\pi-100\,\pi=125\,\pi$.

Probabilité d'atteindre la couronne quadrillée : $\mathcal{P}_q=\dfrac{125\,\pi}{225\,\pi}=\dfrac{125}{225}=\dfrac{5}{9}$.
La probabilité d'atteindre la couronne extérieure est de $\dfrac{5}{9}$.
2) Calculons la probabilité d'atteindre le coeur de la cible : $\mathcal{P}_c=\dfrac{25\,\pi}{225\,\pi}=\dfrac{25}{225}=\dfrac{1}{9}$.
Un tireur débutant atteint la cible une fois sur deux, et dans le cas où il l'atteint, il atteint le cœur une fois sur 9.
On a donc $\mathcal{P}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{9}=\dfrac{1}{18}$.
La probabilité que le tireur débutant atteigne le cœur de la cible est donc de $\dfrac{1}{18}$.

6 **1)** Les valeurs ordonnées sont : 6 - 6 - 6 - 6 - 8 - 10 - 10 - 11 - 11 - 12 - 12 - 14 - 14 - 16 - 16 - 17 - 20 - 25 - 25 - 30.
- $30-6=24$ donc, l'étendue est de 24.
- La médiane est une valeur entre la 10^{e} (qui est 12) et la 11^{e} (qui est 12 aussi), la médiane est donc égale à 12.
- $(4\times 6+8+2\times 10+2\times 11+2\times 12+2\times 14+2\times 16+17+20+2\times 25+30)\div 20=275\div 20=13,75$.

La moyenne est de 13,75.
2) Les boules sont indiscernables au toucher, il y a donc équiprobabilité.
a) La probabilité de « tirer un nombre pair » est de $\dfrac{15}{20}=\dfrac{3}{4}$.
b) La probabilité de « tirer une voyelle ou un nombre pair » est de $\dfrac{16}{20}=\dfrac{4}{5}$.
c) La probabilité de « tirer une voyelle et un nombre pair » est de $\dfrac{8}{20}=\dfrac{2}{5}$.
3) La probabilité d'obtenir grâce au cinquième tirage le mot « M A T H S » correspond au cas ou le cinquième tirage est un « S » alors qu'on a déjà tiré un « M », un « A », un « T » et un « H ». On a donc 2 possibilités pour le « S » sur un total de 16 boules restantes, soit une probabilité de $\dfrac{2}{16}=\dfrac{1}{8}$.

7 Dans cet exercice, on suppose que les billets sont vendus au hasard, et donc que nous sommes dans une situation d'équiprobabilité.

1) $p_1 = \dfrac{\text{nombre de billets permettant de gagner une télévision}}{\text{nombre total de billets}} = \dfrac{2}{300} = \dfrac{1}{150}$.

La probabilité de gagner une télévision est de $\dfrac{1}{150}$.

2) $p_2 = \dfrac{\text{nombre de billets permettant de gagner un bon de réduction}}{\text{nombre total de billets}} = \dfrac{5+10}{300} = \dfrac{15}{300} = \dfrac{1}{20}$.

La probabilité de gagner un bon de réduction est de $\dfrac{1}{20}$.

3) a) Calcul des dépenses D de l'organisateur :

$D = 2 \times 500\,€ + 5 \times 100\,€ + 10 \times 50\,€ + 20 \times 0{,}50\,€ = 2\,010\,€$.

Or, $2\,010 \div 300 \approx 6{,}7$ donc, si l'organisateur vend 300 billets,

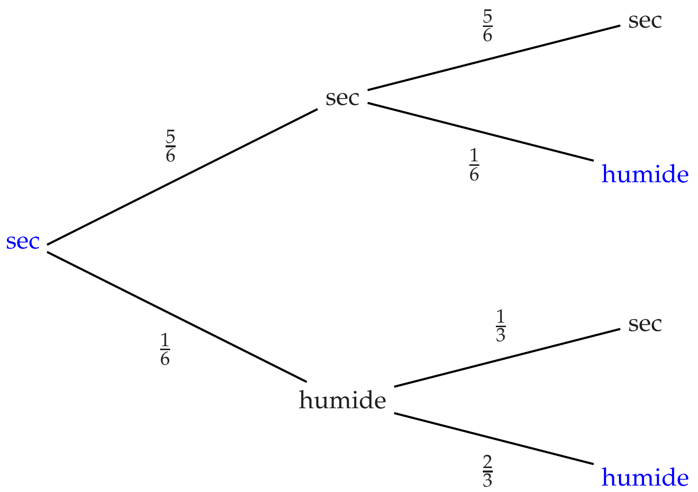
il devra les vendre au minimum à 6,70 € pour ne pas perdre d'argent.

b) Soit n le nombre de billets à ajouter aux 300 billets. On a l'équation suivante :

$$\begin{aligned}(300+n) \times 2\,€ \geqslant 2\,010\,€ &\iff 600 + 2n \geqslant 2\,010\\ &\iff 2n \geqslant 1410\\ &\iff n \geqslant 705.\end{aligned}$$

À 2 €, l'organisateur doit ajouter au moins 705 billets pour ne pas perdre d'argent.

8 On peut matérialiser la situation par un arbre pondéré :



Dans un arbre pondéré, la probabilité d'une issue est calculée en multipliant les probabilités de chaque éventualité. On obtient deux branches, donc

$\mathcal{P} = \dfrac{5}{6} \times \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{36} + \dfrac{2}{18} = \dfrac{5}{36} + \dfrac{4}{36} = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4}$.

On trouve bien une probabilité de $\dfrac{1}{4} = 0{,}25$ donc, l'affirmation est vraie.

9 Il y a équiprobabilité des faces du dé.

1) La probabilité d'obtenir 3 avec le dé vert est de $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

2) On peut modéliser la situation par un tableau à double entrée pour obtenir les 36 résultats possibles :

bleu\vert	0	1	1	2	3	3
0	0	1	1	2	3	3
1	1	2	2	3	4	4
2	2	3	3	4	5	5
2	2	3	3	4	5	5
3	3	4	4	5	6	6
3	3	4	4	5	6	6

a) On peut obtenir les sommes suivantes : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6.

b) L'élève passe son tour s'il obtient une face vide sur chacun des dés, donc une somme égale à 0.
La probabilité qu'il doive passer son tour est de $\frac{1}{36}$.

c) La probabilité qu'il doive avancer de 3 cases est de $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.

d) Il suffit de compter les occurrences dans le tableau. Pour chaque valeur, on obtient :
$\mathcal{P}(0) = \frac{1}{36}$; $\mathcal{P}(1) = \frac{3}{36}$; $\mathcal{P}(2) = \frac{5}{36}$; $\mathcal{P}(3) = \frac{9}{36}$; $\mathcal{P}(4) = \frac{8}{36}$; $\mathcal{P}(5) = \frac{6}{36}$; $\mathcal{P}(6) = \frac{4}{36}$.

e) Le résultat du dé vert est strictement supérieur à celui du dé bleu avec une probabilité de $\frac{12}{36}$.

3) Après deux tours on s'arrête sur la case $\boxed{10}$ après s'être arrêté sur la case $\boxed{4}$ si on a une somme de 6 donc,
$\mathcal{P} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

10 Dans cet exercice, la personne est choisie au hasard, nous sommes donc dans une situation d'équiprobabilité.

1) Un donneur universel est un donneur de groupe O et de rhésus négatif. Or, cela concerne 6 % de la population française donc, la probabilité d'être donneur universel est de 0,06.

2) Un receveur universel est un receveur de groupe AB et de rhésus positif. Or, cela concerne 3 % de la population française donc, la probabilité d'être receveur universel est de 0,03.

3) Pour être donneur à une personne de groupe B et de rhésus positif, il faut être O+, O−, B+ ou B−, ce qui représente 36 % + 6 % + 9 % + 1 % soit 52 % de la population française donc, la probabilité de pouvoir donner a une personne de groupe B rhésus positif est de 0,52.

4) Parmi les personnes de groupe O, seules les personnes de rhésus négatif sont donneurs universels, ce qui représente du probabilité de $\frac{6\,\%}{36\,\% + 6\,\%} = \frac{1}{7} \approx 0,143$.

Pour une personne du groupe O, la probabilité d'être donneur universel est d'environ 0,14.

5) 43 217 325 personnes peuvent donner leur sang, et parmi elles, 6 % sont donneurs universels, soit $0,06 \times 43\,217\,325$ personnes $= 2\,593\,039,5$ personnes.
Au 1er janvier 2016, il y avait environ 2 593 040 donneurs universels.

6) $\frac{43\,217\,325}{66\,627\,602} \times 100 \approx 64,86$.
Au 1er janvier 2016, environ 65 % de la population pouvait donner son sang.

Chapitre D8

Statistiques

1 Dans une série statistique, ajouter une valeur égale à la moyenne ne change pas la moyenne donc, l'affirmation est vraie.

2 • $1\,250 + 1\,400 + 1\,600 + 3\,200 = 7\,450$. Donc, la somme des salaires des hommes est de 7 450 €.

• $3 \times 1\,700 = 5\,100$. La somme des salaires des femmes est de 5 100 €.

• Le nombre de femmes sera égal au nombre d'hommes, donc la somme des salaires doit également être la même. Or, $7\,450 - 5\,100 = 2\,350$.

L'entreprise devra donner un salaire de 2 350 € à cette femme pour respecter l'équité.

3 **1)** Le salaire minimal est 1 488,11 € et le salaire maximal est 2 192,48 €. Or, $2\,192,48 - 1\,488,11 = 704,37$ donc, l'étendue de cette série est de 704,37 €.

2) La série comporte 13 valeurs, le salaire médian est donc le 7e lorsqu'on les ordonne, par exemple du plus petit au plus grand. On a : $1\,488,11 < 1\,539,45 < 1\,593,38 < 1\,593,38 < 1\,864,37 < 1\,864,37 < \boxed{1\,864{,}37} \ldots$

Le salaire médian est 1 864,37 €.

3) $$\frac{1\,938,36 + 1\,488,11 + 1\,994,38 + 2\,048,37 + 2\,192,48 + 1\,998,93 + 1\,539,45 + 1\,948,37 + 3 \times 1\,864,37 + 2 \times 1\,593,38}{13}$$

$= \dfrac{23\,928,32}{13} = 1\,840,64$. Donc, Le salaire moyen est de 1 840,64 €.

4) Coût global d'un salarié de l'emballage et de l'organisation des livraisons : $\dfrac{1\,864{,}37\,€}{0,78} \times 1,45 \approx 3\,465{,}82\,€$.

Le coût d'un tel salarié pour l'entreprise est de 3 465,82 €.

5) **a)** Une augmentation de 3 % correspond à un coefficient multiplicateur de $1 + \dfrac{3}{100} = 1,03$.

$1\,488{,}11\,€ \times 1,03 \approx 1\,532{,}75\,€$. Le salaire net après augmentation sera d'environ 1 532,75 €.

b) Coût global de ce salarié après augmentation : $\dfrac{1\,532{,}75\,€}{0,78} \times 1,45 \approx 2\,849{,}34\,€$.

Le coût d'un tel salarié après augmentation est de 2 849,34 €.

c) Coût global de ce salarié avant augmentation : $\dfrac{1\,488{,}11\,€}{0,78} \times 1,45 \approx 2\,766{,}36\,€$.

Pourcentage d'augmentation : $\dfrac{2\,849{,}34\,€ - 2\,766{,}36\,€}{2\,766{,}36\,€} \times 100 \approx 3\,\%$. Le coût a augmenté d'environ 3 %.

4 **1)** La médiane correspond à un âge compris entre le 400e et le 401e âge classés dans l'ordre croissant.
Il y a 243 chefs de moins de 45 ans ($11 + 84 + 148$), donc moins de 400 et 297 de plus de 55 ans, donc moins de 400 également. Par conséquent, la médiane se situe bien dans l'intervalle $[\,45\,;55\,[$.

2) Il y a 243 chefs de moins de 45 ans. Il faut donc déterminer la 157e valeur ($400 - 243$) et la 158e valeur ($401 - 243$) du tableau.

âge	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
effectif	18	21	24	31	30	31	30	27	28	20
e.c.c.	18	39	63	94	124	155	185	…		

La 157e et la 158e valeur correspondent à un âge de 51 ans donc, la médiane est de 51 ans.

On pouvait également déterminer la 400e et la 401e en considérant le tableau entier et en prenant en compte la répartition plus précise du tableau de la question 2).

5 **1) a)** La note minimale est 5 et l'étendue est 14 donc, la note maximale est $5 + 14 = 19 \neq 20$.
L'affirmation est fausse.
b) La moyenne entre la note minimale et la note maximale est $\dfrac{5+19}{2} = 12$ qui est exactement la moyenne de la classe donc, cette moyenne ne va pas changer.
L'affirmation est fausse.
c) La médiane est 11 donc, la moitié des élèves ont une note supérieure ou égale à 11.
L'affirmation est fausse.
2) $m_B = \dfrac{16 \times 11,7 + 11 \times 10,3}{16+11} = \dfrac{300,5}{27} \approx 11,13.$
La moyenne des notes des élèves de la classe B à ce contrôle est d'environ 11,1.

3) Soit m_C la moyenne de la classe C.

$$\begin{aligned}\frac{24 \times 12 + 32 \times m_C}{24+32} = 11,2 &\iff \frac{288 + 32m_C}{56} = 11,2\\ &\iff 288 + 32m_c = 11,2 \times 56 = 627,2\\ &\iff 32m_C = 627,2 - 288 = 339,2\\ &\iff m_C = \frac{339,2}{32} = 10,6.\end{aligned}$$

La moyenne des notes pour la classe C est de 10,6.

6 **1) a)** Soit n la note de Luc au devoir 6, elle correspond à la moyenne des cinq premiers, sa moyenne totale ne varie donc pas après ce sixième devoir.
$n = \dfrac{12+5+18+11+19}{5} = \dfrac{65}{5} = 13$. La moyenne de Luc est de 13.
b) Soit n' la note de Luc au devoir 6 pour obtenir 15 de moyenne, on a :

$$\begin{aligned}\frac{12+5+18+11+19+n'}{6} = 15 &\iff \frac{65+n'}{6} = 15\\ &\iff 65 + n' = 15 \times 6 = 90\\ &\iff n' = 90 - 65 = 25.\end{aligned}$$

Luc ne peut pas avoir 15 de moyenne après le sixième devoir.
2) a) Une augmentation de 25 % correspond à un coefficient multiplicateur de $1 + \dfrac{25}{100} = 1,25$.
Donc, on a $y = 1,25x$

b)
$$\begin{aligned}\frac{20+15+4+9+x+y}{6} = 12,5 &\iff \frac{48+x+1,25x}{6} = 12,5\\ &\iff \frac{48+2,25x}{6} = 12,5\\ &\iff 48 + 2,25x = 12,5 \times 6 = 75\\ &\iff 2,25x = 75 - 48 = 27\\ &\iff x = \frac{27}{2,25} = 12\end{aligned}$$

Dans ce cas, $y = 1,25 \times 12 = 15$.
Julie a obtenu les notes de 12 au devoir 5 et 15 au devoir 6.

7 **1)** $m = \dfrac{4\times 0+6\times 0,3+4\times 1,3+4\times 1,7+3\times 2,5+3\times 7+2\times 13+1\times 21+2\times 28+1\times 42}{4+6+4+4+3+3+1+1+2+1}$

$m = \dfrac{187,3}{30} \approx 6,2433.$

Il a plu en moyenne environ 6,2 mm au mois d'avril 2016.

2) Il y a 30 valeurs, il faut donc prendre un nombre entre la 15^{e} valeur (qui est 1,7 mm et la 16^{e} valeur (qui est également 1,7 mm donc, la médiane vaut 1,7 mm.

La moitié des précipitations journalière sont inférieures ou égales à 1,7 mm et la moitié des précipitations journalières sont supérieures ou égales à 1,7 mm.

3) $42 - 0 = 42$ donc, l'étendue vaut 42 mm.

4) La hauteur des précipitations est supérieure ou égale à 13 mm pendant 6 jours, ce qui correspond à un pourcentage de $\dfrac{6}{30} \times 100 = 20\,\%$.

5) Il a plu 187,3 mm d'eau durant le mois d'avril 2016. Ceci sur une surface totale de 3 200 m par 50 m, soit 3 200 m $\times$ 50 m $=$ 160 000 m^2.

Ce qui donne un volume de 160 000 m^2 $\times$ 0,187 3 m $=$ 29 968 m^3.

Or, pour transformer un volume en capacité, on utilise généralement la correspondance suivante : 1 dm^3 =1 L.

Soit 29 968 m^3 $=$ 29 968 000 dm^3 $\approx$ 30 000 000 L.

Au cours du mois d'avril, il est tombé 29 968 dm^3 soit près de 30 000 000 L d'eau sur l'aéroport de Rolland Garros.

8 **1) a)** On obtient le tableau suivant :

Durée en min	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
Effectif	1	3	2	2	4	7	5	4	3	2	0	3
Fréquence en %	2,8	8,3	5,6	5,6	11,1	19,4	13,9	11,1	8,3	5,6	0	8,3

b) $60 - 5 = 55$, donc, l'étendue vaut $e = 55$ minutes.

c) $m = \dfrac{1\times 5+3\times 10+2\times 15+2\times 20+4\times 25+7\times 30+5\times 35+4\times 40+3\times 45+2\times 50+3\times 60}{1+3+2+2+4+7+5+4+3+2+0+3}$

$m = \dfrac{1\,165}{36} \approx 32,35.$

Il y a 36 valeurs dans cette liste, la médiane est donc une valeur située entre la 18^{e} et la 19^{e} valeur lorsqu'elles sont ordonnées. Or, ces valeurs valent toutes les deux 30 min donc, la médiane est égale à 30 min.

La moyenne vaut 32,4 min et la médiane vaut 30 min.

2) a) Tableau par classes :

Durée en min	] 0 ; 15]	] 15 ; 30]	] 30 ; 45]	] 45 ; 60]
Effectif	6	13	12	5

b) On trouve $\overline{m} = \dfrac{6\times 7,5+13\times 22,5+12\times 37,5+5\times 52,5}{36} \approx 29,2$ minutes.

Ce résultats est assez différent de celui trouvé dans la question 2)c) car la moyenne est faite à partir de la répartition par classe, on perd donc en précision, puisqu'alors on ne s'occupe plus de la valeur exacte, mais de l'appartenance à un intervalle plus grand.

9 **1)** $4+3+1=8$ employés gagnent plus de 2 000 € à Toulouse, sur un total de $2+4+3+2+4+3+1=19$. Ce qui correspond à un pourcentage de $\frac{8}{19}\times 100 \approx 42{,}11\,\% > 40\,\%$.

L'affirmation de la cheffe d'entreprise est vraie.

2) a) Le salaire minimal est de 1 410 € et l'étendue de 1 890 € donc, le salaire maximal vaut 1 410 € + 1 890 € = 3 300 €.

b) Soit s le salaire recherché, en €. On a :

$$\frac{2\times 1\,410\,€+4\times 1\,590\,€+3\times 1\,760\,€+2\times 1\,920\,€+4\times 2\,100\,€+3\times s+1\times 3\,300\,€}{19}=1\,935\,€$$

$$\iff \frac{30\,000\,€+3s}{19}=1\,935\,€$$

$$\iff 30\,000\,€+3s=19\times 1\,935\,€=36\,765\,€$$

$$\iff 3s=36\,765\,€-30\,000\,€=6\,765\,€$$

$\iff s=\frac{6\,765\,€}{3}=2\,255\,€$. Donc, L'avant-dernière barre correspond à un salaire de 2 255 €.

3) Il y a 19 employés à Toulouse, donc le salaire médian est le 10^{e} salaire lorsqu'on les ordonne su plus petit au plus grand, par exemple. Par lecture sur le diagramme en bâtons, le 10^{e} salaire vaut 1 920 €.

Le salaire médian à Toulouse vaut 1 920 €.

4) $m=\frac{19\times 1\,935\,€+12\times 1\,520\,€}{19+12}=\frac{55\,005\,€}{31}\approx 1\,774{,}35\,€$.

Le salaire moyen de l'entreprise vaut environ 1 774 €.

5) a) Une augmentation de 10 % correspond à un coefficient multiplicateur de $1+\frac{10}{100}=1{,}1$.

Or, $1\,410\,€\times 1{,}1=1\,551\,€$.

Le montant du salaire minimum à Montauban en 2021 sera de 1 551 €.

b) On cherche le coefficient multiplicateur c_m qui permet de passe de 1 520 € à 1 935 € :

$1\,520\,€\times c_m=1\,935\,€ \iff c_m=\frac{1\,935\,€}{1\,520\,€}\approx 1{,}2730$.

Or, $1{,}2730=1+0{,}2730=1+\frac{27{,}30}{100}$ donc, il faudrait augmenter les salaires de Montauban d'environ 27,3 %.

10 **1) a)** 12 d'archers ont gagné exactement six points lors de ce championnat.

b) 75 d'archers ont gagné trois points ou plus lors de ce championnat.

c) L'effectif est de 80, le score médian correspond donc à une valeur comprise entre le 40^{e} et le 41^{e} archer, classés par ordre croissant du nombre de points par exemple.

Or, le 40^{e} et le 41^{e} archer ont tous deux marqué 7 points donc, le score médian est de 7 points.

2) a) Calculons le score moyen des archers du club A :

$$m=\frac{5\times 2+9\times 3+8\times 5+12\times 6+14\times 7+6\times 8+8\times 9+18\times 10}{80}=\frac{547}{80}=6{,}8375.$$

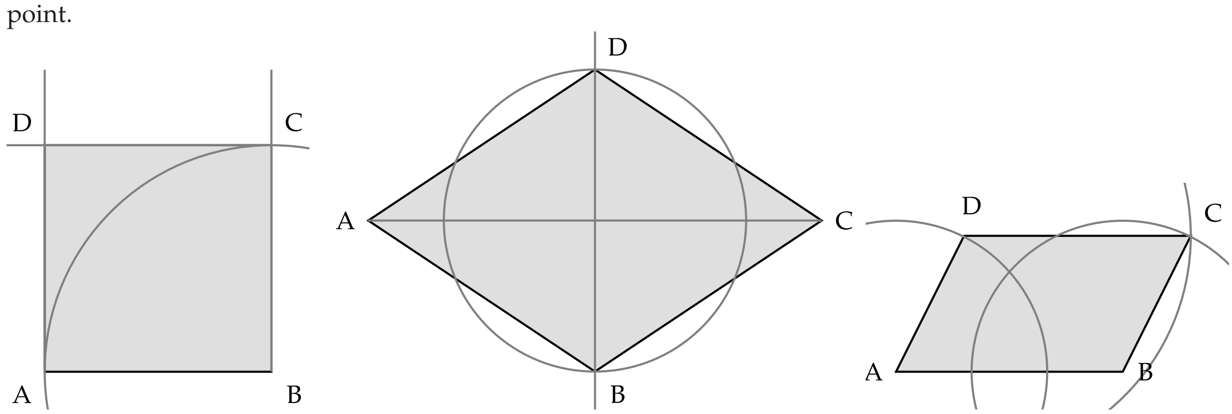
Or, le score moyen du club B est de 7 points donc, c'est le club B qui a le score moyen le plus élevé.

b) Les 10 meilleurs archers du club A ont tous marqué 10 points alors que la moyenne des 10 meilleurs archers du club B est de 9,9 points donc,

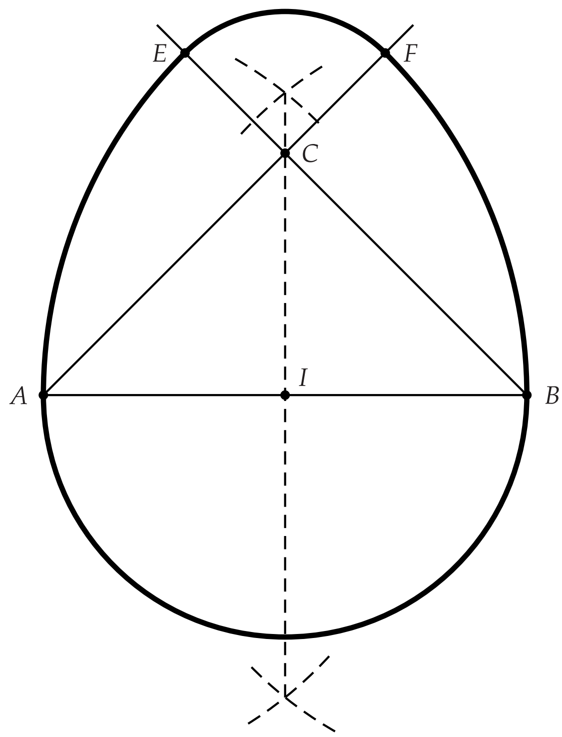
selon les scores de leurs dix meilleurs archers, c'est le club A qui l'emporte.

Chapitre G9
Géométrie plane

1 **1)** On peut pour cela utiliser un logiciel comme CarMetal ou GeoGebra, on construit pas à pas chacun des objets qui constituent les figures demandées en respectant les contrainte de mesure et d'orientation.
L'aspect « dynamique » permet de vérifier sa construction : en effet, si l'un des objets est mal construit et que l'on déplace l'un des points de la figure, celle-ci va se transformer.
2) Pour les figures 1 et 2, il y a une seule configuration possible, à isométries près.
Pour la figures 3, il y a une infinité de configurations qui dépendant de l'endroit où l'on place le troisième point.



2



3 **2)** La figure construite est un pentagone régulier.

3) Étape 1 : tracer un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et un rayon $[OM]$.

Tracer le cercle de diamètre $[OM]$ de centre I.

Étape 2 : tracer le diamètre $[EF]$ de $(\mathcal{C})$ perpendiculaire à (OM).

Tracer le segment $[IF]$, il coupe le cercle de centre I et de rayon IO et J.

Étape 3 : tracer le cercle de centre F passant par J, il coupe le cercle $(\mathcal{C})$ aux points B et C, B étant le point le plus proche de M.

Étape 4 : tracer le cercle de centre C passant par B, il recoupe le cercle $(\mathcal{C})$ en D.

Étape 5 : tracer le cercle de centre B passant par C, il recoupe le cercle $(\mathcal{C})$ en A.

Étape 6 : tracer le pentagone $ABCDE$.

4 **1)** La région correspondant à l'indice 1 est constituée de deux demi-plans dont les frontières sont des droites parallèles, de part et d'autre de L et situées à 500 mètres de L.

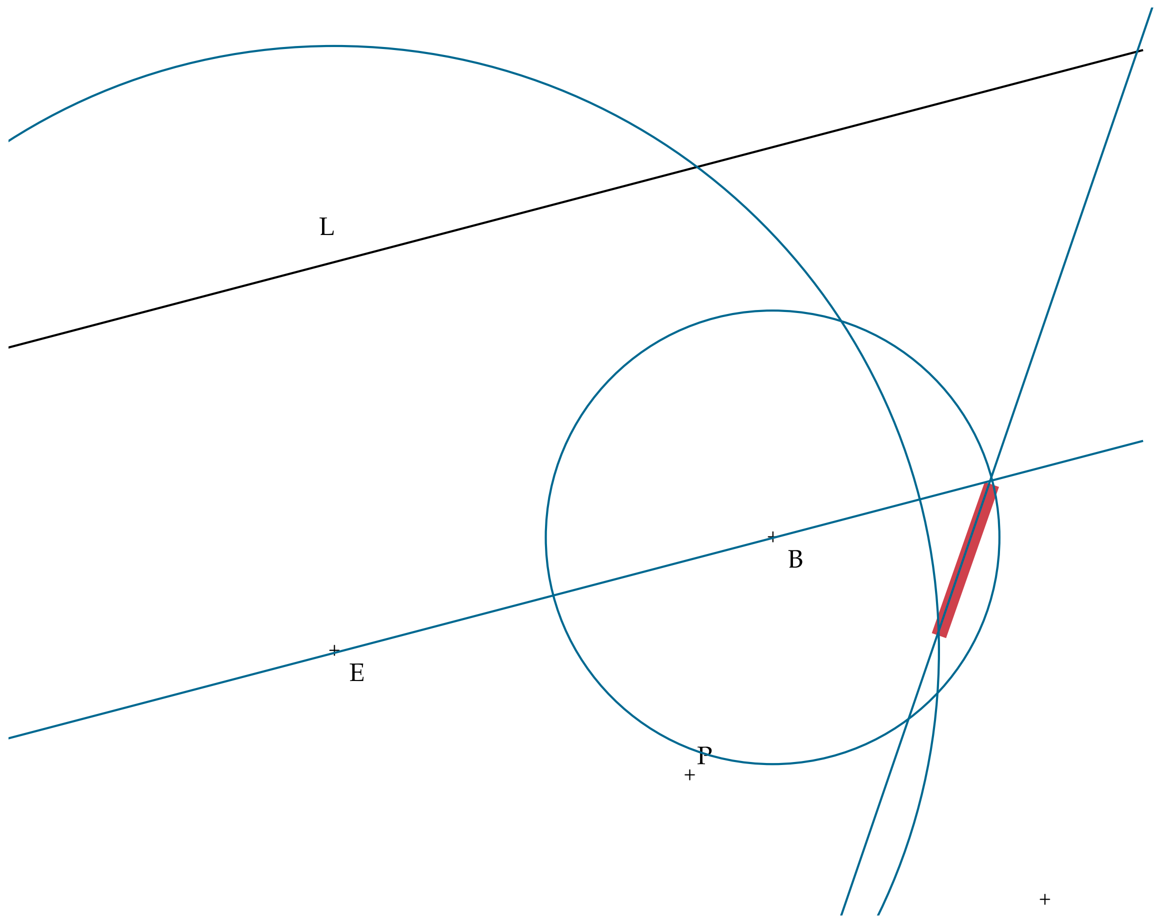
2) La région correspondant à l'indice 2 est l'extérieur du cercle de centre E et de rayon 800 mètres.

3) La région correspondant à l'indice 3 est l'intérieur du cercle de centre B et de rayon 300 mètres.

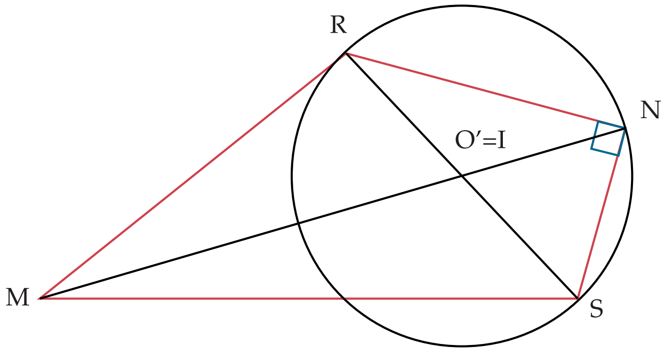
4) La région correspondant à l'indice 4 est la médiatrice du segment [SP].

5) L'échelle est $1/10\,000^e$: 1 cm sur la figure représente 10 000 cm dans la réalité, c'est-à-dire 100 m.

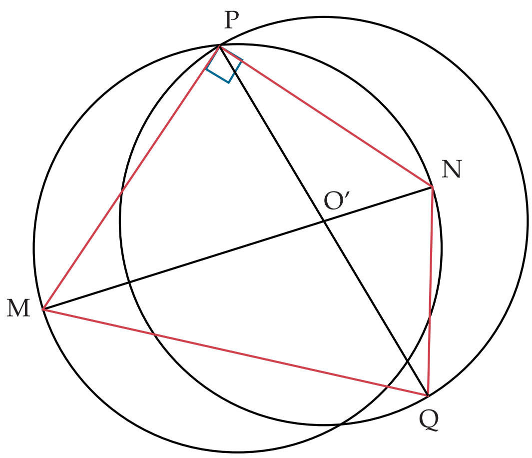
Sur la figure suivante, le trésor se trouve sur le segment rouge.



5 **1)** Les diagonales du quadrilatère QMNP sont [MN] et [PQ]. Ces diagonales sont de même longueur et se coupent en O, le milieu de [MN] et de [PQ]. Ce procédé permet de construire une famille de rectangles.
Cas particulier : lorsque les diagonales sont perpendiculaires, on obtient un carré.
2) Les diagonales du quadrilatère MSNR sont [MN] et [RS]. Ces diagonales se coupent en O = I, milieu de [MN] et de [RS]. Ce procédé permet de construire une famille de parallélogrammes.
Cas particulier : lorsque les diagonales sont perpendiculaires, on obtient un losange.
3) Programme de construction :
- Construire le segment [MN] de longueur 9 cm ainsi que le point O′ sur ce segment situé à 2,5 cm de N ;
- tracer le segment [RS] de longueur 5 cm et de milieu O′ ;
- tracer le quadrilatère MSNR.

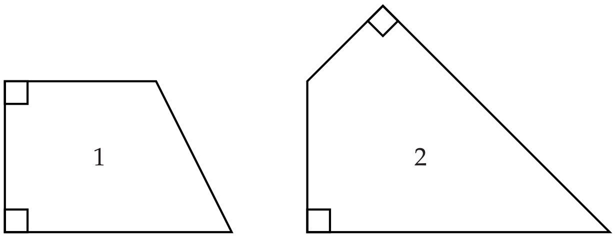


On a I = O′ donc, dans le quadrilatère MSNR, O′R = O′N = O′S et O′ est le milieu de [RS] d'où : N est sur le cercle de diamètre [RS] ce qui implique que le triangle SNR est rectangle en N.
Le quadrilatère MSNR possède donc un angle droit en N.
4) Programme de construction :
- Construire le segment [MN] de longueur 9 cm ainsi que le point O′ sur ce segment situé à 2,5 cm de N ;
- tracer le cercle de diamètre [MN] et le cercle de centre O′ et de rayon 4,5 cm : placer P sur l'un des points d'intersection de ces cercles ;
- construire Q sur la droite (PO′) tel que PQ = 9 cm ;
- tracer le quadrilatère MQNP.

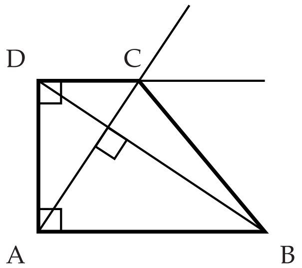


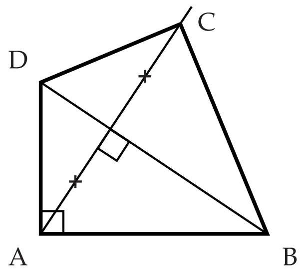
Le point P est situé sur le cercle de diamètre [MN], donc le triangle MNP est rectangle en P.
Le quadrilatère MPNQ possède donc un angle droit en P.

6 **1) a)** On a les deux configurations suivantes selon si les angles droits sont consécutifs ou non :



b) En ajoutant la deuxième contrainte, on obtient :





c) Programmes de construction :

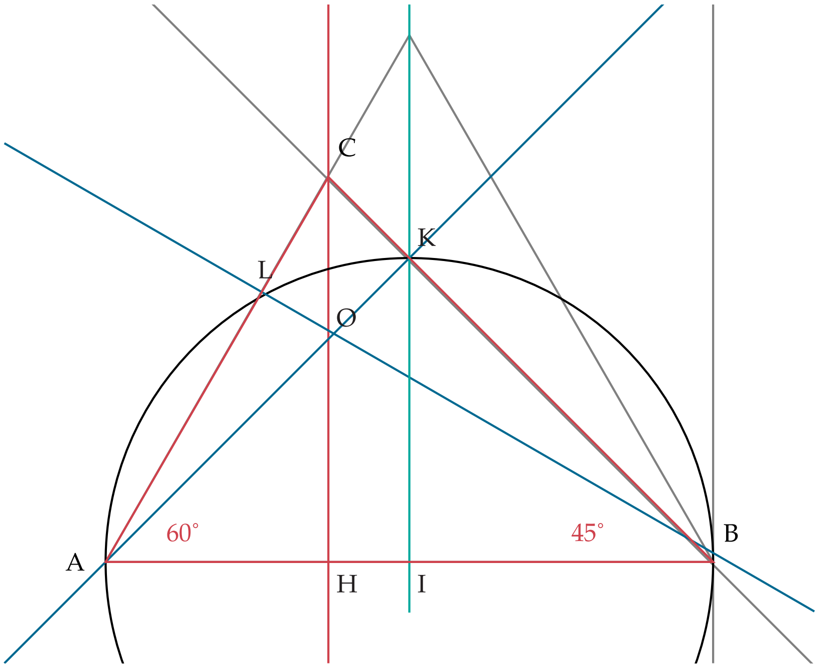
- Tracer un segment [AB].
- Tracer un segment [AD] perpendiculaire à (AB).
- Tracer le segment [BD].
- Placer le point C à l'intersection de la droite perpendiculaire à (AD) passant par D et de la perpendiculaire à (BD) passant par A.
- Tracer le quadrilatère ABCD.

- Tracer un segment [AB].
- Tracer un segment [AD] perpendiculaire à (AB).
- Tracer le segment [BD].
- Placer le point C symétrique du point A par rapport à (BD).
- Tracer le quadrilatère ABCD.

2) Compatibilité avec l'étiquette $\boxed{\text{Deux côtés parallèles seulement}}$:

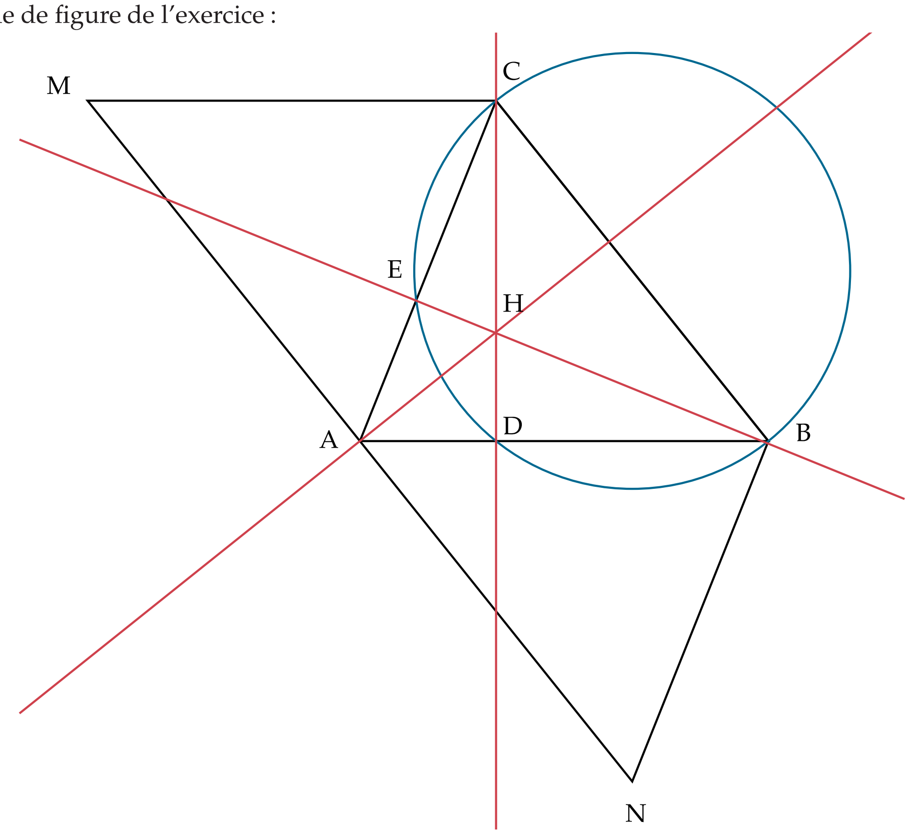
- $\boxed{\text{Deux angles droits seulement}}$: oui, tout trapèze rectangle qui n'est pas un rectangle convient.
- $\boxed{\text{Côtés égaux deux à deux}}$: oui, si ABCD est un rectangle, ABDC est un quadrilatère croisé qui convient.
- $\boxed{\text{Quatre côtés égaux}}$: non, un quadrilatère à quatre côtés égaux est un losange, dont les côtés opposés sont parallèles deux à deux.
- $\boxed{\text{Diagonales perpendiculaires}}$: oui, le trapèze rectangle de la configuration 1, question (b) convient.
- $\boxed{\text{Quatre angles droits}}$: non, un quadrilatère à quatre angles droits est un rectangle, dont les côtés opposés sont parallèles deux à deux.
- $\boxed{\text{Deux côtés égaux seulement}}$: oui, un trapèze dont deux côtés consécutifs sont égaux et dont les autres côtés ont des mesures différentes convient.
- $\boxed{\text{Côtés opposés parallèles}}$: non, implicitement, cela veut dire que les côtés opposés sont parallèles deux à deux.
- $\boxed{\text{Diagonales égales}}$: oui, un trapèze isocèle non rectangle convient.
- $\boxed{\text{Diagonales se rencontrant en leur milieu}}$: non, un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu est un parallélogramme, dont les côtés opposés sont parallèles deux à deux.

7 **1)** • Pour construire un angle de 60 °, il suffit de construire un triangle équilatéral ;
• pour construire un angle de 45 °, on peut construire un angle droit grâce à une perpendiculaire, puis construire sa bissectrice.



2)
• I est le centre du cercle de diamètre [AB], il est donc situé au milieu de [AB], à égale distance de A et de B ;
• K est situé sur le cercle de diamètre [AB], le triangle ABK est inscrit dans un cercle ayant pour diamètre un de ses côtés, c'est donc un triangle rectangle en K.
Dans ce triangle, sachant que la somme des angles mesure 180°, que $\widehat{ABK} = 45°$ et $\widehat{BKA} = 90°$, alors $\widehat{KAB} = 180° - 90° - 45° = 45°$.
Le triangle ABK est donc rectangle et isocèle en K puisqu'il possède deux angles de même mesure.
On a alors KA = KB, et IA = IB, donc, la droite (KI) est la médiatrice du segment [AB].
3)
• Le triangle ABK étant rectangle en K, la droite (AK) est perpendiculaire à la droite (BC).
(AK) est donc la hauteur issue de A du triangle ABC ;
• le triangle ABL étant rectangle en L (il est inscrit dans le cercle de diamètre [AB]), la droite (BL) est perpendiculaire à la droite (AC). (BL) est donc la hauteur issue de B du triangle ABC ;
• ces deux hauteurs se coupent en l'orthocentre noté O. La troisième hauteur du triangle ABC est la droite (CH), qui passe donc elle aussi par O.
D'où : les points C, O, H sont alignés.
4)
• (KI) est la médiatrice du segment [AB], donc, (KI) est perpendiculaire à (AB) ;
• (CH) est une hauteur du triangle ABC, donc, (CH) est perpendiculaire à (AB) ;
or, deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre elles, donc, les droites (CH) et (KI) sont parallèles. D'après la question 2, O est un point de la droite (CH), d'où (CO) et (KI) sont parallèles, d'où : le quadrilatère IKCO est un trapèze.

8 **1)** Exemple de figure de l'exercice :



2)

• D est un point du cercle de diamètre [BC] ; donc, le triangle BCD est rectangle en D et la droite (CD) est perpendiculaire à la droite (AB). D'où, (CD) est la hauteur issue de C du triangle ABC ;

• E est un point du cercle de diamètre [BC] ; donc, le triangle BCE est rectangle en E et la droite (BE) est perpendiculaire à la droite (AC). D'où, (BE) est la hauteur issue de B du triangle ABC ;

or, les hauteurs d'un triangle sont concourantes au point H appelé orthocentre. La troisième hauteur étant (AH), elle est perpendiculaire à la droite (BC).

Les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.

3) Voir figure.

4)

• Le quadrilatère BCMA est un parallélogramme, donc, les droites (BC) et (AM) sont parallèles, et les segments [BC] et [AM] sont de même longueur ;

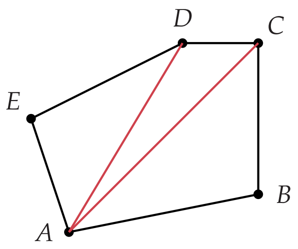
• le quadrilatère BCAN est un parallélogramme, donc, les droites (BC) et (NA) sont parallèles, et les segments [BC] et [NA] sont de même longueur ;

les droites (AM) et (NA) sont toutes les deux parallèles à (BC), elles sont donc parallèles entre elles et contiennent un point en commun ; par conséquent, elles sont confondues et les points M, A et N sont alignés dans cet ordre.

De plus, les longueurs des segments [AM] et [NA] sont égales à la longueur du segment [BC], soit AM = AN, ce qui signifie que soit M et N sont confondus, soit A est au milieu de [MN]. Or, M et N ne peuvent pas être confondus par construction de BC**MA** et BC**AN**.

Conclusion : le point A est le milieu du segment [MN].

9 **1)** On a par exemple la figure suivante :



Tout pentagone convexe $ABCDE$ peut être décomposé en trois triangles, par exemple BAC, CAD et DAE.
Or, la sommes des angles d'un triangle vaut 180°.
La somme des angles du pentagone vaut donc $3 \times 180^\circ = 540^\circ$.
L'affirmation est vraie.

2)

- Le triangle ACD est isocèle rectangle en C donc, $\widehat{CDA} = 45^\circ$.
- Le triangle ABD est isocèle en B donc, $\widehat{ADB} = \widehat{DAB} = 50^\circ$.
- Dans le triangle BDE, la somme des angles faisant 180°, on a $\widehat{BDE} = 180^\circ - 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$.

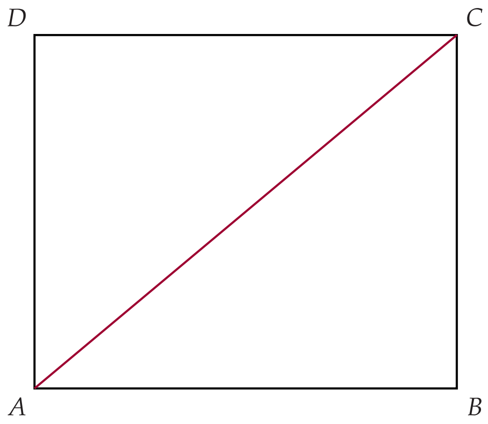
On a alors : $\widehat{CDA} + \widehat{ADB} + \widehat{BDE} = 45^\circ + 50^\circ + 65^\circ = 160^\circ \neq 180^\circ$.
Les points C, D et E ne sont pas alignés.

10

- avec l'icône 1, placer et nommer deux points A et B ;
- avec l'icône 4, tracer le cercle de centre A passant par B ;
- avec l'icône 2, tracer la droite passant par A et B ;
- avec l'icône 5, déterminer puis nommer C l'autre point d'intersection de la droite (AB) et du cercle ;
- avec l'icône 3, tracer la médiatrice du segment [CB] ;
- avec l'icône 5, déterminer puis nommer D et D' les points d'intersection de la médiatrice à [CB] et du cercle ;
- avec l'icône 4, tracer le cercle de centre B passant par A ;
- avec l'icône 5, déterminer puis nommer E, point d'intersection du cercle de centre B et du cercle de centre A ;
- avec l'icône 4, tracer le cercle de centre D passant par A ;
- avec l'icône 5, déterminer puis nommer F, point d'intersection du cercle de centre D et du cercle de centre A.

Théorème de Pythagore et trigonométrie

1 On a la figure suivante :



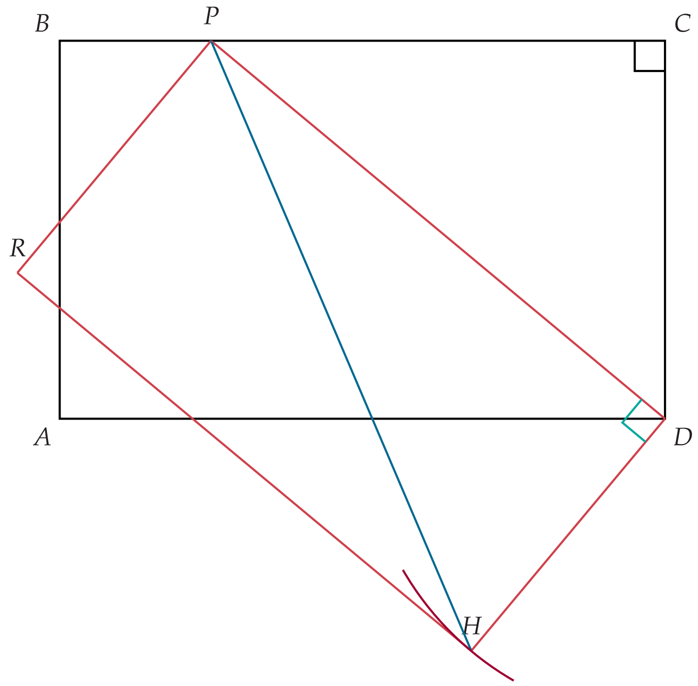
1) Le triangle ABC étant rectangle en B, on peut appliquer le théorème de Pythagore, avec des mesures en cm :
$\mathrm{AC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 \iff \mathrm{AC}^2 = 6,2^2 + 5,2^2$
$\iff \mathrm{AC}^2 = 38,44 + 27,04 = 65,48$
$\implies \mathrm{AC} = \sqrt{65,48} \approx 8,09.$
La diagonale de sa console mesure environ 8,1 cm.
2) 3 pouces correspondent à 8,1 cm ; donc, 1 pouce correspond à 8,1 cm $\div$ 3 = 2,7 cm.
Un pouce vaut environ 2,7 cm.
3) $10,1 \times 2,7 = 27,27$ donc, la diagonale d'un netbook de 10,1 pouces est d'environ 27,3 cm.

2 **1)** On peut calculer AC en utilisant la formule du **sinus** :
$\sin \widehat{ACB} = \dfrac{AB}{AC}$ d'où $AC = \dfrac{2{,}4\,\text{cm}}{\sin 44\,^\circ} \approx$ 3,5 cm.
2) On peut calculer la mesure de l'angle $\widehat{SRT}$ en utilisant la formule du **cosinus** :
$\cos \widehat{SRT} = \dfrac{RS}{RT} = \dfrac{4\,\text{cm}}{6\,\text{cm}} = \dfrac{2}{3}$ d'où $\widehat{SRT} = \arccos\left(\dfrac{2}{3}\right) \approx$ 48,2 °.
3) On peut calculer AR en utilisant la formule de la **tangente** :
$\tan \widehat{ART} = \dfrac{AT}{AR}$ d'où $AR = \dfrac{9{,}6\,\text{cm}}{\tan 30\,^\circ} \approx$ 16,6 cm.

3 **Remarque initiale :** soit $N = 2n + 1$ un nombre impair, alors $N^2 = 4n^2 + 4n + 1$ est encore un nombre impair.
Soit $N' = 2n' + 1$ un autre nombre impair, alors $N'^2 = 4n'^2 + 4n' + 1$ est un nombre impair.
La somme $N + N' = 4n^2 + 4n'^2 + 4n + 4n' + 2 = 2(2n^2 + 2n'^2 + 2n + 2n' + 1)$ est un nombre pair.

Démonstration : on effectue une démonstration par l'absurde en supposant que la conclusion est fausse. Le contraire de « l'un au moins de ces trois nombres est pair » est « les trois nombres sont impairs ».
Supposons alors que a, b et c soient tous les trois impairs, alors a^2, b^2 et c^2 le sont également.
Or, le triangle dont les longueurs sont a, b et c est rectangle, donc $a^2 + b^2 = c^2$, ce qui signifie que c^2 est un nombre pair d'après la remarque initiale. L'hypothèse de départ est donc fausse : a, b et c ne peuvent pas être tous les trois impairs. D'où : l'un des trois nombres a, b, c au moins est pair.

4 **1)** Figure à l'échelle :



2) **Calcul de DP :** dans le triangle DCP rectangle en C, on utilise le théorème de Pythagore avec des mesures en cm : $\mathrm{DP}^2 = \mathrm{DC}^2 + \mathrm{CP}^2 = 5^2 + (8-2)^2 = 25 + 36 = 61 \Longrightarrow \mathrm{DP} = \sqrt{61}$ cm.

Calcul de PH : le triangle PDH est rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore, on a $\mathrm{PH}^2 = \mathrm{PD}^2 + \mathrm{DH}^2 = 61 + 16 = 77 \Longrightarrow \mathrm{PH} = \sqrt{77}$ cm.

3) Le volume d'un prime se calcule en multipliant l'aire de sa base par sa hauteur.

Calcul de l'aire de la base : $\mathcal{A} = \dfrac{(\mathrm{BP} + \mathrm{AD}) \times \mathrm{AB}}{2} = \dfrac{(2\,\mathrm{cm} + 8\,\mathrm{cm}) \times 5\,\mathrm{cm}}{2} = 25\,\mathrm{cm}^2$

Calcul du volume du prisme : $\mathcal{V} = \mathcal{A} \times \mathrm{AE} = 25\,\mathrm{cm}^2 \times 4\,\mathrm{cm} = 100\,\mathrm{cm}^3$.

Le volume du prisme ABPDEFRH est de $100\,\mathrm{cm}^3$.

5 **1)** On peut calculer la mesure de l'angle α en utilisant la formule de la tangente :

$\tan\alpha = \dfrac{25\,\mathrm{m}}{100\,\mathrm{m}} = 0,25$ d'où $\alpha = \arctan(0,25) \approx 14,04\,^\circ$.

L'inclinaison de la route est d'environ $14\,^\circ$.

2) On peut calculer la longueur ℓ de la route en utilisant la formule du sinus :

$\sin\alpha = \dfrac{145\,\mathrm{m}}{\ell}$ d'où $\ell = \dfrac{145\,\mathrm{m}}{\sin 14\,^\circ} \approx 599,4\,\mathrm{m}$.

La route mesure environ 599 m.

6 **1)** Dans le triangle ABC rectangle en A, on applique le théorème de Pythagore avec des mesures en cm : $\mathrm{BC}^2 = \mathrm{BA}^2 + \mathrm{AC}^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100 \Longrightarrow \mathrm{BC} = 10\,\mathrm{cm}$.

2) Dans le triangle ABC rectangle en A, on utilise le cosinus :

$\cos(\widehat{ABC}) = \dfrac{BA}{BC} = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5} \Longrightarrow \widehat{ABC} = \arccos\left(\dfrac{4}{5}\right) \approx 37\,^\circ$.

3) Le quadrilatère ADEF possède trois angles droits, c'est donc un rectangle. Or, les diagonales d'un rectangle sont de même longueur d'où : AE = DF.

7 **1)** **a)** le point C_1 est sur le segment [AB], donc entre A et B. On a alors : $BC_1 = BA - AC_1$.

D'où les équivalences : $BC_1 = 2AC_1 \iff BA - AC_1 = 2AC_1 \iff BA = 3AC_1 \iff AC_1 = \frac{1}{3}AB$.

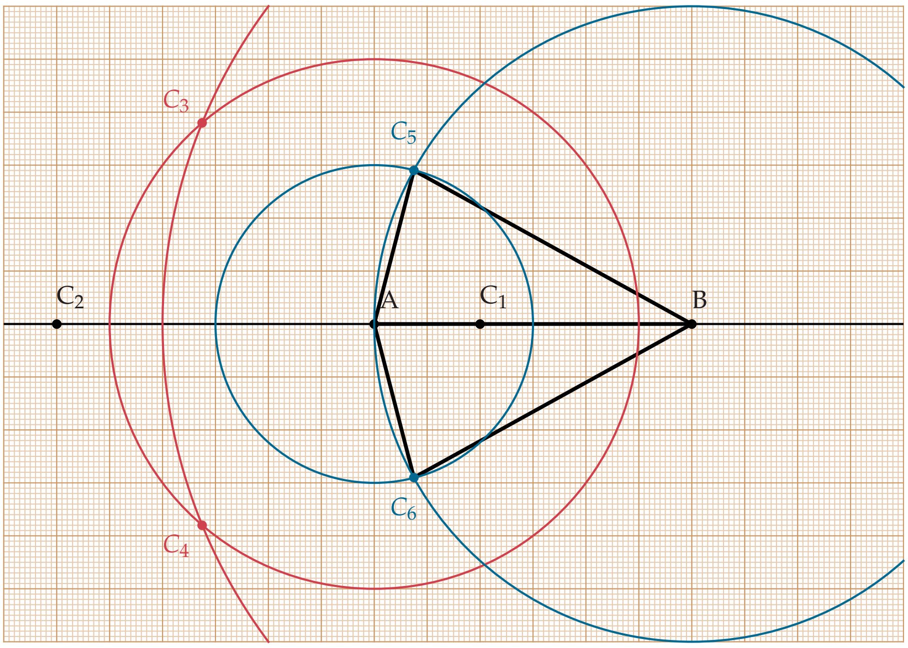
Or, AB = 6 cm, donc : la longueur du segment $[AC_1]$ est de 2 cm.

b) Si $BC_2 = 2\ AC_2$ et C_2 distinct de C_1, alors BC2 est plus grand que AC_2 et donc le point C_2 est en dehors du segment [AB], du côté de A. On a alors : $BC_2 = BA + AC_2$. D'où les équivalences :

$BC_2 = 2AC_2 \iff BA + AC_2 = 2AC_2 \iff BA = AC_2$.

Donc : la longueur du segment $[AC_2]$ est de 6 cm.

c) Une figure possible :



2) Si $AC = x$, alors $BC = 2x$. De plus, si C existe, A, B et C ne sont pas alignés et forment donc un triangle.

a) Si $x = 9$, alors AC = 9 cm et BC = 18 cm. Or, AB = 6 cm, et $6 + 9 = 15$ donc, BA + AC < BC, ce qui signifie qu'on ne peut pas construire un triangle.

Il n'existe pas de point C pour $x = 9$.

b) Si $x = 5$, alors AC = 5 cm et BC = 10 cm. Or, AB = 6 cm, et $6 + 5 = 11$ donc, BA + AC > BC, ce qui signifie que l'on peut construire un triangle. Dans ce cas, C est sur le cercle de centre A de rayon 5 cm et sur le cercle de centre B de rayon 10 cm. Ces deux cercles sont sécants en deux points C_3 et C_4.

Il existe deux points C pour $x = 5$.

3) D'après le théorème de Pythagore, dans le triangle ABC rectangle en C, on a :

$AB^2 = AC^2 + BC^2 \iff 6^2 = x^2 + (2x)^2 \iff 36 = 5x^2 \iff x^2 = \frac{36}{5} \implies x = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6}{5}\sqrt{5}$.

Pour $x = \frac{6}{5}\sqrt{5}$, le triangle ABC est rectangle en C.

4) Vérifions les cas où le triangle peut-être isocèle :

- Supposons qu'il soit isocèle en C, alors $AC = BC \iff x = 2x \iff x = 0$, ce qui est impossible.
- Supposons qu'il soit isocèle en A, alors CA = BA = 6 cm et BC = 12 cm.

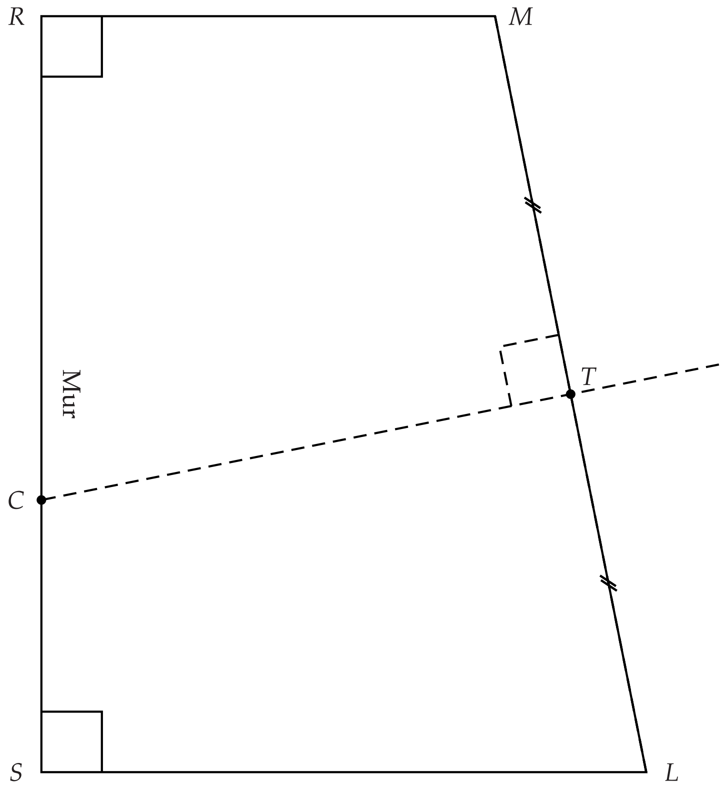
Mais dans ce cas, BA + AC = BC, donc A, B et C sont alignés, ce qui est contraire à l'énoncé.

- Supposons qu'il soit isocèle en B, alors AB = CB = 6 cm et AC = 3 cm.

Dans ce cas, BA + AC > BC, donc, il existe deux points C_5 et C_6 tels que le triangle ABC soit isocèle en B.

Il existe une seule valeur de x (qui vaut 3) pour laquelle le triangle ABC est isocèle.

8 **1)** À l'échelle 1 cm pour 5 m, 30 m, 40 m et 50 m sont représentés par des segments de longueurs respectives 6 cm, 8 cm et 10 cm.



2) a) Voir figure.

b) Le point C appartient à la droite perpendiculaire au segment $[ML]$ passant par son milieu T, il appartient donc à la médiatrice de $[ML]$ et est situé à égale distance de M et de L.

Par conséquent, C est le point de contact cherché.

c) On mesure la longueur demandée, on obtient $RC \approx 6{,}4$ cm sur le plan. Or, $6,4 \times 5 = 32$ donc, la distance entre les points R et C dans la cour est de 32 m.

3) a) • Dans le triangle CRM rectangle en R, on utilise le théorème de Pythagore avec des mesures en mètre :

$$MC^2 = MR^2 + RC^2 = 30^2 + x^2$$
$$= x^2 + 900.$$

• Dans le triangle CSL rectangle en S, on utilise le théorème de Pythagore avec des mesures en mètre :

$$LC^2 = LS^2 + SC^2 = 40^2 + (50 - x)^2$$
$$= 1\,600 + (2\,500 - 100x + x^2)$$
$$= x^2 - 100x + 4\,100.$$

On a donc $MC = \sqrt{x^2 + 900}$ et $LC = \sqrt{x^2 - 100x + 4\,100}$.

b) Le point C est à égale distance de M et de L, on a donc $MC = CL$, on encore $MC^2 = CL^2$.

$$\cancel{x^2} + 900 = \cancel{x^2} - 100x + 4\,100 \iff 100x = 4\,100 - 900 = 3\,200$$
$$\iff x = 32$$

On retrouve bien une distance de 32 m entre les points R et C.

9 Dans tout l'exercice, les longueurs sont exprimées en cm et les aires en cm^2.

1) Dans le triangle ABC, on a d'une part : $AB^2 + BC^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$
et d'autre part : $AC^2 = 10^2 = 100$.
On a alors $AB^2 + BC^2 = AC^2$, et d'après la réciproque du théorème de Pythagore, on peut affirmer que le triangle ABC est rectangle en B.
Par conséquent, les droites (AB) et (BC) sont perpendiculaires.

2) Dans le triangle ABD rectangle en B, on applique le théorème de Pythagore :
$AD^2 = AB^2 + BD^2 \iff 8^2 = 6^2 + BD^2$.
D'où : $BD^2 = 64 - 36 = 28 \Longrightarrow BD = \sqrt{28} = 2\sqrt{7} \approx 5,2915$.
Conclusion : la longueur BD vaut exactement $2\sqrt{7}$cm, soit approximativement 5,3 cm.

3) Les droites (AB) et (CE) dont toutes les deux perpendiculaires à la droite (BC), elles sont donc parallèles entre elles. On a alors : B, D, C et A, D, E alignés dans cet ordre ; les droites (AB) et (CE) sont parallèle.
D'après le théorème de Thalès et sa conséquence, $\dfrac{DC}{DB} = \dfrac{DE}{DA} = \dfrac{CE}{BA} \iff \dfrac{8-2\sqrt{7}}{2\sqrt{7}} = \dfrac{DE}{8} = \dfrac{CE}{6}$.
On cherche CE : $CE = \dfrac{6 \times (8 - 2\sqrt{7})}{2\sqrt{7}} \approx 3,071$. La longueur CE vaut environ 3,1 cm.

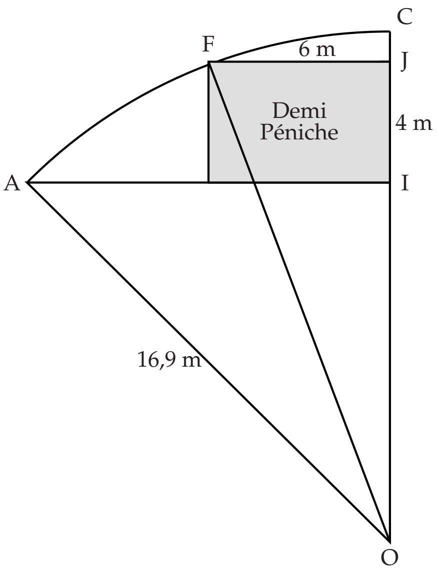
4) Si on choisit $[CE]$ comme base du triangle ACE, alors sa hauteur associée est $[BC]$.
On a alors : $\mathcal{A}(ACE) = \dfrac{CE \times BC}{2} \approx \dfrac{3,071 \times 8}{2} \approx 12,284$. L'aire du triangle ACE vaut environ 12,3 cm^3.

10 **1)** On considère le triangle AOI rectangle en I et on pose OA = OC = x. On a alors OI = $x - 5$.
On applique le théorème de Pythagore dans ce triangle avec des mesures en mètre.

$$\begin{aligned} \mathrm{AO}^2 = \mathrm{AI}^2 + \mathrm{IO}^2 &\iff x^2 = 12^2 + (x-5)^2 \\ &\iff \cancel{x^2} = 144 + \cancel{x^2} - 10x + 25 \\ &\iff 10x = 169 \\ &\iff x = 16,9. \end{aligned}$$

Le rayon OA de l'arche est 16,9 m.

2) On considère le schéma de coupe suivant dans lequel on a représenté la moitié de la figure puisqu'il y a symétrie par rapport à (CO). Pour maximiser ses chances de passer sous l'arche, la péniche doit être centrée.



Pour savoir si la péniche passe sous l'arche, il faut vérifier que la distance OF (F étant le coin supérieur gauche de la péniche vue de face) est inférieure au rayon de l'arche (16,9 m).

On a : OJ = OI + IJ
= (OC − IC) + IJ
= (16,9 m − 5 m) + 4 m
= 15,9 m.

Dans le triangle OJF rectangle en J, on utilise le théorème de Pythagore avec des mesures en mètre :

$$\begin{aligned} \mathrm{OF}^2 &= \mathrm{OJ}^2 + \mathrm{JF}^2 \\ &= 15,9^2 + 6^2 \\ &= 288,81 \end{aligned}$$

Donc, OF $\approx$ 16,99 m > 16,9 m.

Cette péniche ne pourra pas passer sous l'arche sans dommage.

Chapitre G11
Théorème de Thalès et transformations

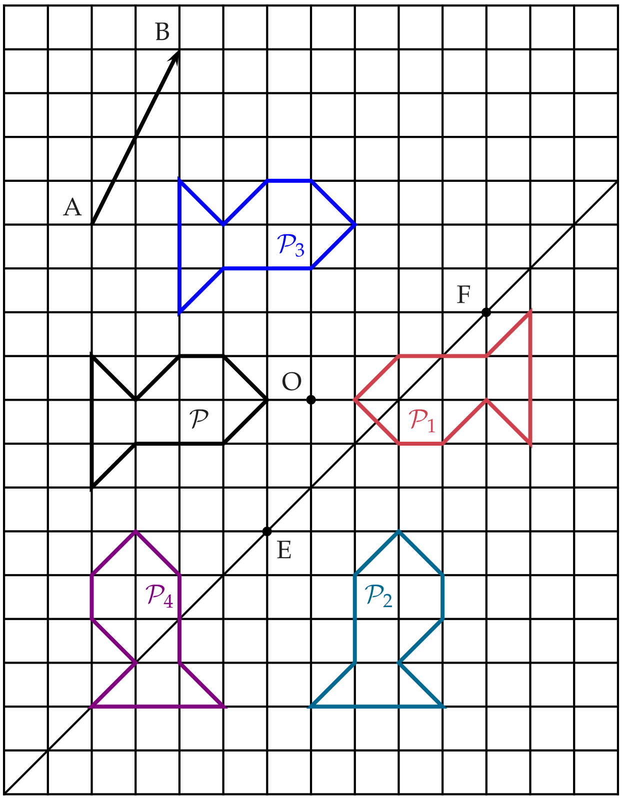
1 **Partie 1**.

1) Pour passer du polygone 1 au polygone 2, on effectue la rotation de centre A et d'angle 60 ° dans le sens indirect.

2) Pour passer du polygone 2 au polygone 3, on effectue la symétrie dont le centre est le milieu de [BC].

3) Pour passer du polygone 3 au polygone 4, on effectue la translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$, ou qui transforme le point C en le point D.

Partie 2.



2 **1)** À faire sur tablette ou ordinateur.

2) On peut conjecturer que $MD = ME$.

3) On applique le Théorème de Thalès dans les triangles AMB et AMC.

- Dans le triangle AMB, les points M, R, A et M, D, B sont alignés dans cet ordre.

Les droites (AB) et (RD) sont parallèles donc, d'après le théorème de Thalès : $\dfrac{MR}{MA} = \dfrac{MD}{MB}$.

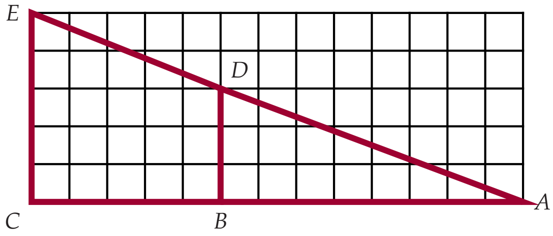
- Dans le triangle AMC, les points M, R, A et M, E, C sont alignés dans cet ordre.

Les droites (AC) et (RE) sont parallèles donc, d'après le théorème de Thalès : $\dfrac{MR}{MA} = \dfrac{ME}{MC}$.

On a alors $\dfrac{MD}{MB} = \dfrac{ME}{MC}$.

Or, $MB = MC$ puisque M est le milieu de $[BC]$ d'où $\dfrac{MD}{MB} = \dfrac{ME}{MB} \iff$ MD = ME.

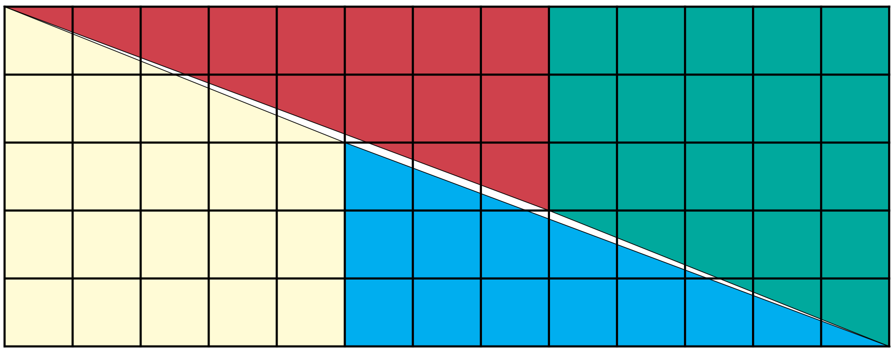
3 **Aire des figures :** l'aire du carré vaut $8\,u.l. \times 8\,u.l. = 64\,u.a.$ et l'aire du rectangle vaut $13\,u.l. \times 5\,u.l. = 65\,u.a.$
On a donc « 64 = 65 » et on a « gagné » un carré unité entre les deux configurations.
Explication du paradoxe : dans le deuxième puzzle, on se place au niveau du trapèze gris et du triangle bleu que l'on schématise.



On a : $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{8}{13}$ et $\dfrac{BD}{CE} = \dfrac{3}{5}$. Or, $\dfrac{8}{13} \neq \dfrac{3}{5}$, donc, l'une des hypothèses du théorème de Thalès n'est pas vérifiée.

- Les droites (CE) et (BD) sont parallèles puisque le quadrilatère $CBDE$ est un trapèze.
- Le triangle DBA est rectangle en B donc, $(BD) \perp (BA)$ et le quadrilatère $CBDE$ est rectangle en B et C donc, $(BD) \perp (BC)$, d'où (BA) est parallèle à (BC) et les points A, B, C sont alignés dans cet ordre.
- Par conséquent, la seule condition non vérifiée est que les points A, D, E ne sont pas alignés, et le carré unité supplémentaire se situe « autour » de la diagonale AE.

Visuel : si on affine le contour des figures, on « voit » bien où se situe le problème.



4 **Remarque de départ :** les points I, J, K, L sont les milieux respectifs des arêtes $[SA], [SB], [SC], [SD]$.
Donc, d'après le théorème de la droite des milieux appliqué aux triangles SAB, SBC, SCD et SDA, on a $IJ = \dfrac{1}{2}AB, JK = \dfrac{1}{2}BC, KL = \dfrac{1}{2}CD, LI = \dfrac{1}{2}DA$ et de plus, $IJ//AB, JK//BC, KL//CD$ et $LI//DA$.

1) D'après la remarque, le quadrilatère $ABCD$ est un agrandissement du carré $IJKL$ de rapport 2, l'aire est donc multipliée par $2 \times 2 = 4$. L'affirmation est vraie.

2) Le triangle SAB est un agrandissement de coefficient 2 du triangle SIJ.
On a alors : $\mathcal{A}(SAB) = 4 \times \mathcal{A}(SIJ)$.
Or, $\mathcal{A}(IJBA) = \mathcal{A}(SAB) - \mathcal{A}(SIJ) = \mathcal{A}(SAB) - \dfrac{1}{4}\mathcal{A}(SAB) = \dfrac{3}{4}\mathcal{A}(SAB)$.L'affirmation est fausse.

3) La pyramide $SABCD$ est un agrandissement de coefficient 2 de la pyramide $SIJKL$ donc :
$\mathcal{V}(SABCD) = 2^3 \times \mathcal{V}(SIJKL) = 8 \times \mathcal{V}(SIJKL)$. L'affirmation est fausse.

4) $\mathcal{V}(ABCDIJKL) = \mathcal{V}(SABCD) - \mathcal{V}(SIJKL) = \mathcal{V}(SABCD) - \dfrac{1}{8}\mathcal{V}(SABCD) = \dfrac{7}{8}\mathcal{V}(SABCD)$.
Soit $\mathcal{V}(SABCD) = \dfrac{8}{7}\mathcal{V}(SABCD)$. L'affirmation est vraie.

5 **1)** Pour déterminer la pente p du câble égale à $\frac{BB'}{AB'}$, on peut utiliser par exemple des formules de trigonométrie : $\sin(\alpha) = \frac{BB'}{AB} = \frac{2\,620\,\text{m} - 2\,100\,\text{m}}{2\,480\,\text{m}} = \frac{520\,\text{m}}{2\,480\,\text{m}} \iff \alpha = \arcsin\left(\frac{520}{2\,480}\right) \approx 12{,}10\,°$.

La pente est donc égale à $\frac{BB'}{AB'} = \tan(\widehat{\alpha}) = \tan(12{,}10\,°) \approx 0{,}2144$.

La pente du câble est de 21,44 % environ.

2) a) Dans la triangle ACC′ rectangle en C′, on a : $\sin(\alpha) = \frac{CC'}{AC} \iff \sin(12{,}10\,°) = \frac{CC'}{2\,000\,\text{m}}$

$\iff CC' = 2\,000\,\text{m} \times \sin(12{,}10\,°) \approx 419{,}24\,\text{m}$.

La longueur du segment [CC′] est de 419 mètres environ.

b) Le point C′ est à l'altitude de départ, c'est-à-dire 2 100 m. Or, 2 100 m + 419 m = 2 519 m ; donc, le point C est à une altitude de 2 519 m environ.

3) a) On a AC = 2 480 m − 480 m = 2 000 m et E est le milieu de [AC], donc EC = 2 000 m ÷ 2 = 1 000 m.

EC = 1000 m.

b) Soit t le temps mis par la cabine pour aller de E à C, on utilise la formule :

$$v = \frac{d}{t} \iff 5\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1} = \frac{1\,000\,\text{m}}{t}$$
$$\iff t = \frac{1\,000\,\text{m}}{5\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$$
$$\iff t = 200\,\text{s}.$$

Or, 200 s = 180 s + 20 s, donc,

il faudra 3 minutes et 20 secondes à la cabine pour parcourir la distance EC.

6 **1)** Volume du cylindre en mètre cube : $V_{\text{cylindre}} = \pi \times 1{,}3^2 \times 2{,}4$;

Volume du cône en mètre cube : $V_{\text{cône}} = \frac{1}{3} \times \pi \times 1{,}3^2 \times 1{,}6$;

Volume du silo en mètre cube : $V = V_{\text{cylindre}} + V_{\text{cône}} = 4{,}056\pi + \frac{1}{3} \times 2{,}704\pi \approx 15{,}5739$.

Le silo a un volume d'environ 15,57 m^3.

2) Quantité de farine en litre pour 48 vaches pendant 90 jours : $C_{\text{vaches}} = 90 \times 48 \times 3\,\text{L} = 12\,960\,\text{L}$.

Capacité en litre du silo : $C_{\text{silo}} \approx \frac{6}{7} \times 15{,}573\,9\,\text{m}^3 \approx \frac{6}{7} \times 15\,573{,}9\,\text{dm}^3 \approx \frac{6}{7} \times 15\,573{,}9\,\text{L} \approx 13\,349\,\text{L}$.

On a $C_{\text{silo}} > C_{\text{vaches}}$ donc, l'éleveur aura suffisamment de farine pour nourrir ses 48 vaches pendant 90 jours.

3) Remarque : A et D sont les centres des bases des solides de révolution, donc (SA) est orthogonale à la base du cône et (AD) est orthogonale à la base du cylindre. On a alors (SA) perpendiculaire à (AB) et (AD) perpendiculaire à (DC) et à (AB).

D'où ABHS et ABCD sont des rectangles et leurs côtés sont deux à deux égaux et parallèles.

Les points H, M, N et H, B, C sont alignés dans cet ordre.

On calcule les rapports $\frac{HN}{HM}$ et $\frac{HC}{HB}$ avec les valeurs suivantes :

HN = SN − SH = SN − AB = 3,3 m − 1,3 m = 2 m.

HM = SM − SH = SM − AB = 2,1 m − 1,3 m = 0,8 m.

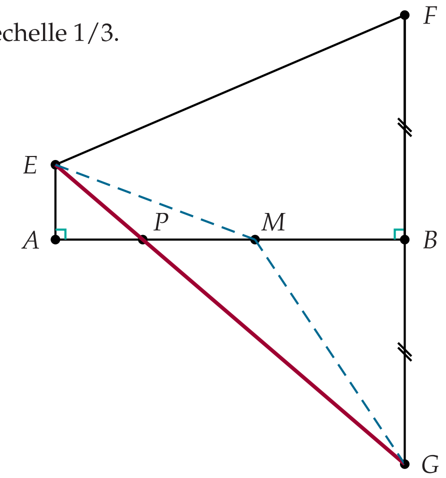
HC = HB + BC = SA + AD = 1,6 m + 2,4 m = 4 m.

HB = SA = 1,6 m.

D'où $\frac{HN}{HM} = \frac{2\,\text{m}}{0{,}8\,\text{m}} = 2{,}5$ et $\frac{HC}{HB} = \frac{4\,\text{m}}{1{,}6\,\text{m}} = 2{,}5$.

Les rapports sont égaux, donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (NC) et (MB) sont parallèles. Les deux échelles sont parallèles.

7 **1)** La figure suivante est à l'échelle 1/3.



2) Le point P est situé sur le segment $[EG]$, par construction. On a donc $EP + PG = EG$.
Tout point M du plan non situé sur le segment $[EG]$ vérifie
$EM + MG > EG$, soit $EM + MG > EP + PG$.
Si le point M appartient au segment $[EG]$, on a $EM + MG = EP + PG$.
Pour tout point M de $[AB]$, on a $EM + MG \geqslant EP + PG$ avec égalité lorsque M est placé en P.
G est le symétrique de F par rapport à B donc, B est le milieu du segment $[FG]$.
La droite (AB) est perpendiculaire à la droite (FB). Donc, (AB) est la médiatrice du segment $[FG]$.
Le point M étant situé sur la médiatrice de $[FG]$, il est à égale distance des points F et G, c'est-à-dire $MF = MG$ et on a alors $EM + MG = EM + MF$.
La valeur minimale de $EM + MF$ correspond donc à la valeur minimale de $EM + MG$, qui est $EP + PG$.
La valeur $EM + MF$ est minimale lorsque M est placé en P.

3) Les droites (EA) et (FB) sont toutes deux perpendiculaires à la même droite (AB), elles sont donc parallèles entre elles.
Les points F, B et G sont alignés donc, les droites (EA) et (BG) sont parallèles.
Les points E, P, G et A, P, B sont alignés dans le même ordre.
On peut donc appliquer le théorème de Thalès et sa conséquence : $\dfrac{PE}{PG} = \dfrac{PA}{PB} = \dfrac{EA}{GB}$.
Or, $P \in [AB]$ donc $AP + PB = AB \iff PB = 14 - AP$.
Avec $EA = 3$ et $GB = FB = 9$, on obtient bien $\dfrac{AP}{14 - AP} = \dfrac{3}{9}$.
$\dfrac{AP}{14 - AP} = \dfrac{3}{9} \iff 9 \times AP = 3 \times (14 - AP) \iff 9AP + 3AP = 42 \iff AP = \dfrac{42}{12} = \dfrac{7}{2}$.
La mesure de AP est de 3,5 cm.

4) D'après le question 2), la valeur minimale de $EM + MF$ est atteinte lorsque M est en P. Calculons $EP + PF$.

- Calcul de EP. Dans le triangle EAP rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore :

$EP^2 = EA^2 + AP^2 = 3^2 + \left(\dfrac{7}{2}\right)^2 = 9 + \dfrac{49}{4} = \dfrac{85}{4}$, soit $EP = \dfrac{\sqrt{85}}{2}$.

- Calcul de PF. Dans le triangle PBF rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore :

$PF^2 = PB^2 + BF^2$ avec $PB = AB - AP = 14 - \dfrac{7}{2} = \dfrac{21}{2}$.
D'où $PF^2 = \left(\dfrac{21}{2}\right)^2 + 9^2 = \dfrac{441}{4} + 81 = \dfrac{765}{4}$, soit $PF = \dfrac{3\sqrt{85}}{2}$.
Pas conséquent, $EP + PF = \dfrac{\sqrt{85}}{2} + \dfrac{3\sqrt{85}}{2} = 2\sqrt{85} \approx 18,44$.
La valeur minimale de $EM + MF$ est de $2\sqrt{85}$cm $\approx$ 18,4 cm.

8 **1)** D'après l'énoncé, les droites (OH) et (Δ) sont perpendiculaires.
Par ailleurs, la droite (Δ) est tangente en T à (C_3), donc les droites (JT) et (Δ) sont perpendiculaires.
Par conséquent, les droites (OH) et (JT) sont parallèles comme droites perpendiculaires à la même droite (Δ).
De plus, les points E, H et T sont alignés dans cet ordre et les points E, O et J sont alignés dans cet ordre.
D'après le théorème de Thalès : $\dfrac{EO}{EJ} = \dfrac{EH}{ET} = \dfrac{OH}{JT}$

$$\Rightarrow \frac{3r}{5r} = \frac{a}{r}$$

$$\Rightarrow a = \frac{3r^2}{5r} = \frac{3r}{5}. \quad \text{D'où on a bien } a = \frac{3}{5}r.$$

2) a s'écrit sous la forme $\dfrac{p}{q}$ avec $p = 3r$ (r entier) et $q = 5$ (entier).
Pas définition, a est un nombre rationnel comme quotient de deux entiers.

3) $a = \dfrac{3}{5}r = \dfrac{6r}{10}$ avec $6r$ un nombre entier, donc a peut s'écrire sous la forme d'une fraction décimale.
D'où : a est toujours un nombre décimal.

4) $a = \dfrac{3r}{5}$ donc, a est un nombre entier si, et seulement si, $3r$ est divisible par 5.
Or, 3 et 5 sont premiers entre eux, donc r doit être divisible par 5 ce qui signifie qu'il est multiple de 5.
a est un nombre entier si, et seulement si, r est multiple de 5.

5) Pour que a soit un nombre premier, il faut que a soit un nombre entier et qu'il soit divisible uniquement par 1 et lui-même. Or a est entier si et seulement si r est multiple de 5 d'après la question précédente, c'est-à-dire s'il s'écrit $r = 5k$, où k est un entier.
Dans ce cas, $a = \dfrac{3 \times \cancel{5}k}{\cancel{5}} = 3k$.
a est donc un multiple de 3. Il ne peut être premier que lorsque k est égal à 1, c'est-à-dire $r = 5 \times 1 = 5$.
a ne peut être premier que s'il prend la valeur 3.[a]

6) On applique le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OHB rectangle en H :

$$OB^2 = OH^2 + HB^2 \iff HB^2 = OB^2 - OH^2$$

$$= r^2 - \left(\frac{3}{5}r\right)^2$$

$$= \frac{25}{25}r^2 - \frac{9}{25}r^2$$

$$= \frac{16}{25}r^2. \quad \text{D'où : } HB = \frac{4}{5}r.$$

7) Dans le triangle OAB, on a $OA = OB$ donc, O appartient à la médiatrice du segment $[AB]$.
De plus, la droite (OH) est perpendiculaire à la droite (AB), donc la droite (OH) est la médiatrice du segment $[AB]$: elle coupe $[AB]$ en H, on milieu.
H étant le milieu du segment $[AB]$, on a $b = AB = 2HB = 2 \times \dfrac{4}{5}r = \dfrac{8}{5}r$.
D'où : Le point H est le milieu de $[AB]$ et on a $b = \dfrac{8}{5}r$.

8) Pour que b soit un nombre premier, il faut que b soit un nombre entier et qu'il soit divisible uniquement par 1 et lui-même. Or b est entier si et seulement si $8r$ est est divisible par 5. Avec 8 et 5 premiers entre eux, c'est dont r qui doit être divisible par 5, c'est-à-dire qu'il s'écrit $r = 5k$, où k est un entier.
Dans ce cas, $b = \dfrac{8 \times \cancel{5}k}{\cancel{5}} = 8k$.
b est alors un multiple de 8 et comme $8 = 2^3$ est composé, b ne peut jamais être un nombre premier.
Il n'existe pas de nombre r tel que b soit premier.

---

a. La question demande seulement si le nombre a peut être un nombre premier, donc une réponse du type « Pour $r = 5$ on obtient $a = 3$ qui est bien un nombre premier » est tout à fait juste.

9 **1) a)** Les droites (AH) et $(A'K)$ sont toutes deux perpendiculaires à la même droite (HK) donc, les droites (AH) et $(A'K)$ sont parallèles.

b) La droite $[HK]$ passant par C est la médiatrice des segments $[AB]$ et $[A'B']$ (droite perpendiculaire aux segments passant par leur milieu) donc, c'est un axe se symétrie de la figure.

2) Les points A, C, A' et H, C, K sont alignés dans cet ordre et les droites (AH) et $(A'K)$ sont parallèles, on peut donc appliquer le théorème de Thalès : $\frac{CH}{CK} = \frac{CA}{CA'} = \frac{HA}{KA'}$ soit $\frac{CH}{CK} = \frac{HA}{A'K}$.

3) $\frac{CH}{CK} = \frac{HA}{A'K} \iff \frac{D-f}{f} = \frac{\frac{L}{2}}{\frac{\ell}{2}} \iff \frac{D}{f} - \frac{f}{f} = \frac{L}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{\ell} \iff \frac{D}{f} = \frac{L}{\ell} + 1$.

4) a) On a $\ell = 36\,\text{mm}$; $D = 12\,\text{m} = 12\,000\,\text{mm}$ et $f = 35\,\text{mm}$ soit, avec des mesures en millimètre :

$\frac{12\,000}{35} = \frac{L}{36} + 1 \iff \frac{L}{36} = \frac{12\,000}{35} - 1 \iff \frac{L}{36} = \frac{11\,965}{35} \iff L = \frac{11\,965 \times 36}{35} \approx 12\,306,9$.

La scène photographiée mesure environ 12,3 m.

b) On a $\ell = 36\,\text{mm}$; $D = 12\,\text{m} = 12\,000\,\text{mm}$ et $L = 15\,\text{m} = 15\,000\,\text{mm}$ soit, avec des mesures en millimètre :

$\frac{12\,000}{f} = \frac{15\,000}{36} + 1 \iff \frac{12\,000}{f} = \frac{15\,036}{36} \iff f = \frac{12\,000 \times 36}{15\,036} \approx 28,7$.

Avec une focale d'environ 28,7 mm, la scène photographiée mesure environ mesure 15 m de large. Or, lorsqu'on diminue la focale f, on augmente la largeur de la scène photographiée donc, il faut utiliser une focale inférieure ou égale à 28,7 mm pour photographier une scène de 15 m au moins.

10 **1)** Calcul de la somme S_1 des aires des deux carrés gris : $S_1 = 3^2 + 4^2 = 25$.

Calcul de l'aire S_2 du carré blanc : $S_2 = 5^2 = 25$.

La somme des aires des deux carrés gris est égale à l'aire du carré blanc.

2) Dans la question précédente, on a montré que $3^2 + 4^2 = 5^2$ soit $AC^2 + AB^2 = CB^2$.

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A. Claude a raison.

3) • Dans le triangle MNP, rectangle en P, on utilise le théorème de Pythagore :

$MN^2 = MP^2 + PN^2 = (12\,\text{cm})^2 + (5\,\text{cm})^2 = 169\,\text{cm}^2$. D'où $MN = 13\,\text{cm}$.

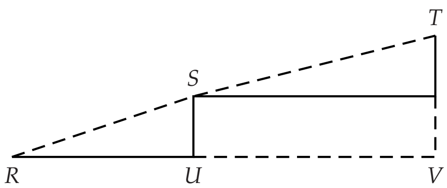
13 est un nombre entier naturel, c'est donc aussi un nombre décimal.

• Mes points M, I, N et M, J, P sont alignés dans cet ordre, les droites (IJ) et (NP) sont parallèles puisqu'on a des carrés. D'après le théorème de Thalès, on a : $\frac{MJ}{MP} = \frac{MI}{MN} = \frac{JI}{PN} \iff \frac{3\,\text{cm}}{12\,\text{cm}} = \frac{MI}{MN} = \frac{JI}{5\,\text{cm}}$.

Soit $IJ = \frac{3\,\text{cm} \times 5\,\text{cm}}{12\,\text{cm}} = \frac{15\,\text{cm}^2}{12\,\text{cm}} = \frac{5}{4}\text{cm} = \frac{5}{2^2}\text{cm}$.

Ce nombre, mis sous forme irréductible, ne comporte que des puissances de 2 au dénominateur, c'est donc un nombre décimal. Dominique a raison.

4) On considère la figure suivante qui est une coupe parallèle à la base de la figure 3 :



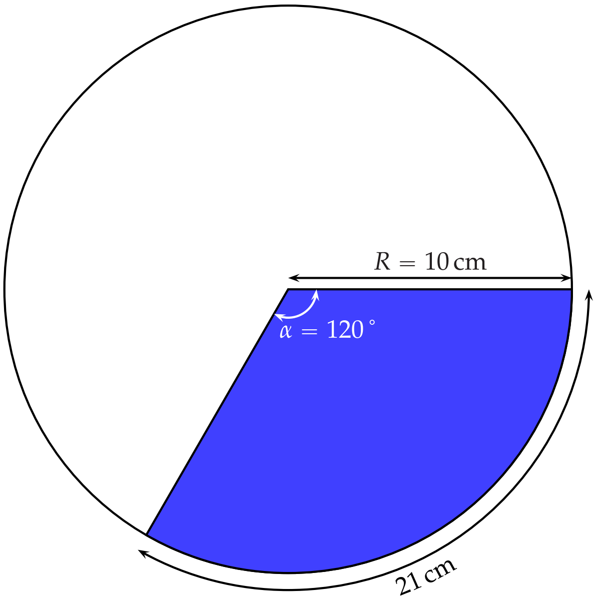
On a $\frac{RU}{RV} = \frac{3\,\text{cm}}{7\,\text{cm}} = \frac{3}{7}$ et $\frac{SU}{TV} = \frac{1\,\text{cm}}{2\,\text{cm}} = \frac{1}{2}$ soit $\frac{RU}{RV} \neq \frac{SU}{TV}$.

Or, les point R, U, V sont alignés et les droites (SU) et (TV) sont parallèles, puisque ce sont les supports des côté opposés du carré du milieu. Ainsi, si les points R, S, T étaient alignés, d'après le théorème de Thalès les rapports seraient égaux ce qui n'est pas le cas. Donc, Camille a tort.

Chapitre G12

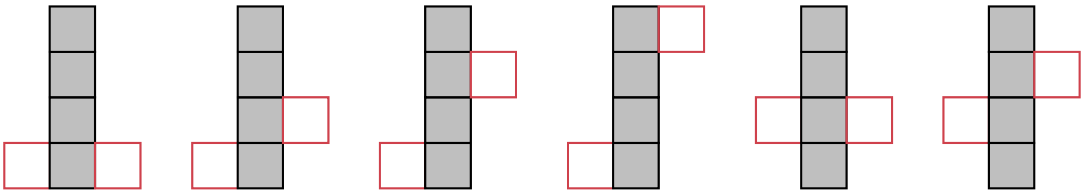
Géométrie dans l'espace

1 Le chapeau peut être découpé dans un disque de rayon $R = 10\,\text{cm}$, longueur de la génératrice du cône.
De plus, l'arc de cercle du développement doit correspondant à $21\,\text{cm}$ (tour de tête).
Pour calculer l'angle α de la section, on sait que le périmètre du cercle de rayon R vaut $2\pi R\text{cm} = 20\pi$ cm ce qui correspond à $360\,^\circ$. Donc, 21 cm correspondent à un angle de $\dfrac{21\text{ cm} \times 360\,^\circ}{20\pi\text{ cm}} \approx 120\,^\circ$.



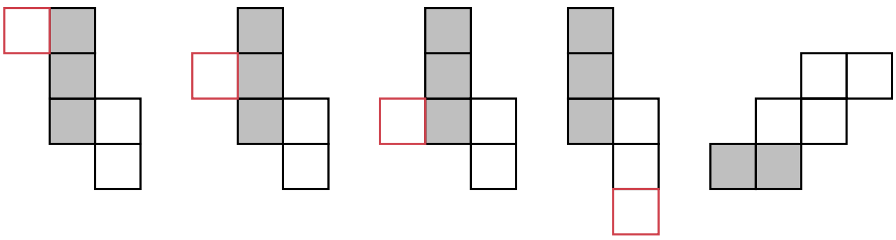
2 On dit que deux patrons sont différents s'ils ne peuvent pas se superposer, ni par rotation, ni par retournement. On peut, par exemple, trouver tous les patrons comprenant quatre faces à la suites, puis trois, puis deux.

« **4 à la suite** » :

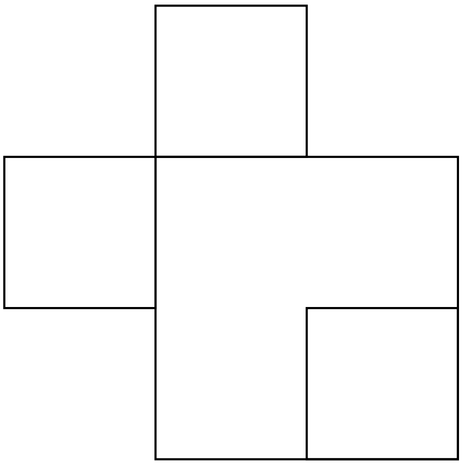


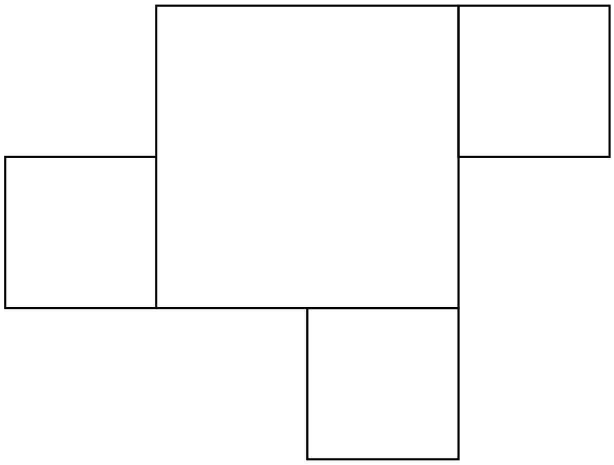
« **3 à la suite** » :

« **2 à la suite** » :



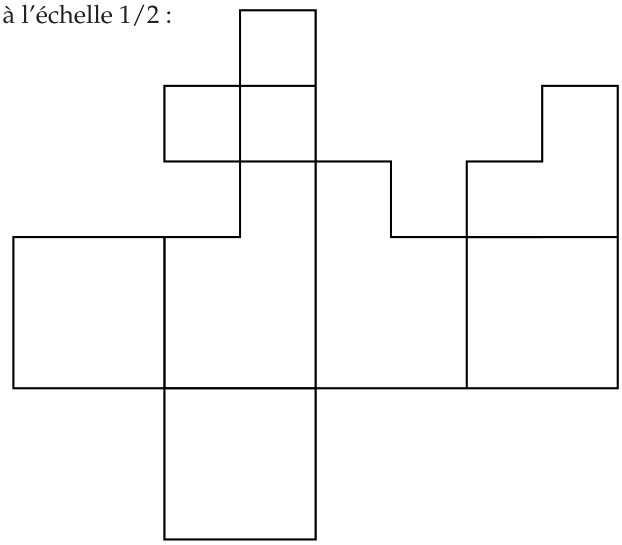
3 **1)** On obtient les deux vues de droite, puis de dessus suivantes :





2) **a)** Le polynôme P possède 9 faces.

b) Un exemple de patron à l'échelle 1/2 :



4 **1)** $A(0\,;0\,;0)$

$B(8\,;0\,;0)$

$C(8\,;0\,;5)$

$D(0\,;0\,;5)$

$E(0\,;3\,;0)$

$F(8\,;3\,;0)$

$G(8\,;3\,;5)$

$H(0\,;3\,;5)$

2) Milieu de $[AB]$: $(4\,;0\,;0)$.

Milieu de $[BC]$: $(8\,;0\,;2,5)$

Milieu de $[CD]$: $(4\,;0\,;5)$

Milieu de $[DA]$: $(0\,;0\,;2,5)$

Milieu de $[DH]$: $(0\,;1,5\,;5)$

Milieu de $[HG]$: $(4\,;3\,;5)$

Milieu de $[GC]$: $(8\,;1,5\,;5)$

Milieu de $[BF]$: $(8\,;1,5\,;0)$

Milieu de $[FG]$: $(8\,;3\,;2,5)$

Milieu de $[EF]$: $(4\,;3\,;0)$

Milieu de $[EH]$: $(0\,;3\,;2,5)$

Milieu de $[AE]$: $(0\,;1,5\,;0)$

3) Centre de $(ABCD)$: $(4\,;0\,;2,5)$

Centre de $(CDHG)$: $(4\,;1,5\,;5)$

Centre de $(BCGF)$: $(8\,;1,5\,;2,5)$

Centre de $(AEHD)$: $(0\,;1,5\,;2,5)$

Centre de $(AEFB)$: $(4\,;1,5\,;0)$

Centre de $(EFGH)$: $(4\,;3\,;2,5)$

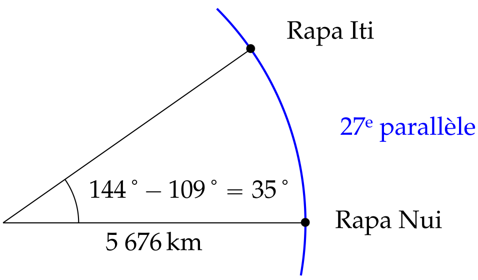
5 Tableau :

Nom du solide	n	S	A	F	S − A + F	régulier ?	convexe ?	Platon ?
Tétraèdre	9	4	6	4	2	oui	oui	oui
Polyèdre étoilé	7	14	36	24	2	non	non	non
Octaèdre	4	6	12	8	2	oui	oui	oui
Pyramide	1	5	8	5	2	non	oui	non
Icosaèdre	6	12	30	20	2	oui	oui	oui
Prisme	5	6	9	5	2	non	oui	non
Cube	2	8	12	6	2	oui	oui	oui
Beignoïde	3	16	32	16	0	non	non	non
Dodécaèdre	8	20	30	12	2	oui	oui	oui

6 Les images D et H ne sont pas utilisées.

N	NE	E	SE	S	SO	O	NO
A	J	E	I	C	G	B	F

7 La situation peut être schématisée en dessinant un arc de cercle pour le 27e parallèle puisque les îles Rapa Nui et Rapa Iti sont toutes les deux situées sur ce parallèle.



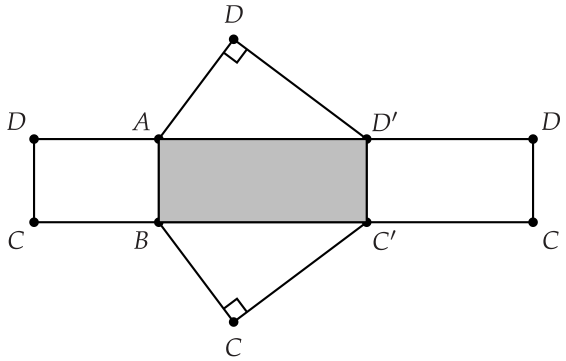
La distance entre les deux îles représente une proportion de $\frac{35}{360}$ de la longueur du 27e parallèle qui est un cercle.
Or, ce parallèle a une circonférence de $\ell = 2 \times \pi \times 5\,676\,\text{km} = 11\,352\,\pi\,\text{km}$.
Par conséquent, la distance recherchée d vaut :
$d = \frac{35}{360} \times 11\,352\,\pi\,\text{km} \approx 3\,467{,}271\,1\,\text{km}$
Les premiers navigateurs ont parcouru environ 3 467 km entre ces deux îles.

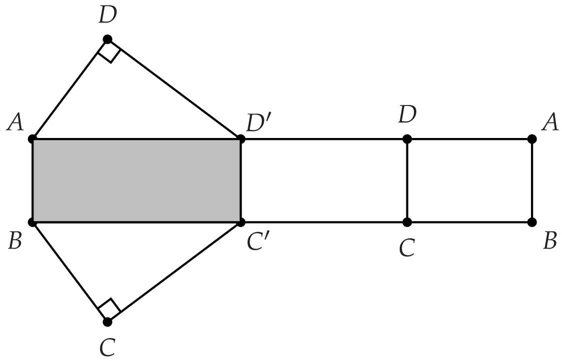
8 **1)** Le prisme ADD′C′CB est composé de :

• 2 triangles isométriques BCC′ et ADD′ rectangles respectivement en C et D ;

• 3 rectangles ABCD, DCC′D′ et ABC′D′.

2) On a par exemple, dans le triangle BCC′ rectangle en C : CB = 3 cm et CC′ = 4 cm, donc le troisième côté BC′ mesure 5 cm car (3, 4, 5) est un triplet pythagoricien.





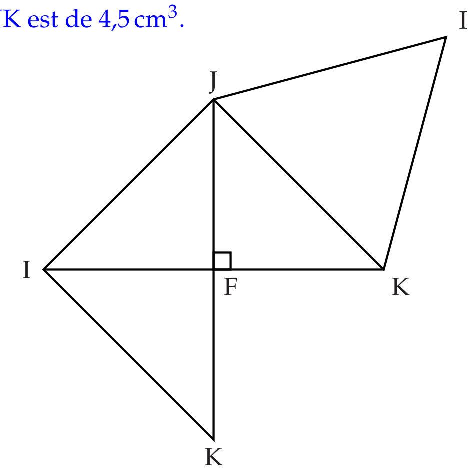
9 **1)** I, J et K sont les milieux respectifs des segments [FE], [FG] et [FB] qui sont des arêtes du cube.
On a donc FI = FJ = FK = 3 cm. De plus, F est un sommet du cube ce qui signifie que les angles $\widehat{IFK}$, $\widehat{KFJ}$ et $\widehat{JFI}$ sont droits. Les triangles IFK, KFG et JFI sont donc isométriques et IK = KJ = JI d'où :

Le triangle IJK est un triangle équilatéral.

2) On a $V_{\text{tétraèdre}} = \dfrac{1}{3} \times \mathcal{A}_{\text{FIJ}} \times \text{FK} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3\,\text{cm} \times 3\,\text{cm}}{2} \times 3\,\text{cm} = 4{,}5\,\text{cm}^3$.

Le volume du tétraèdre FIJK est de $4{,}5\,\text{cm}^3$.

3) Patron à l'échelle 3/4 :



4) On peut démontrer de manière analogue à la question 1. que toutes les arêtes du cuboctaèdre sont de même longueur et donc que tous les tétraèdre ôtés sont isométriques.

a) $\mathcal{V}_{\text{cuboctaèdre}} = \mathcal{V}_{\text{cube}} - 8\,\mathcal{V}_{\text{tétraèdre}} = (6\,\text{cm}^3) - 8 \times 4{,}5\,\text{cm}^3 = 180\,\text{cm}^3$.

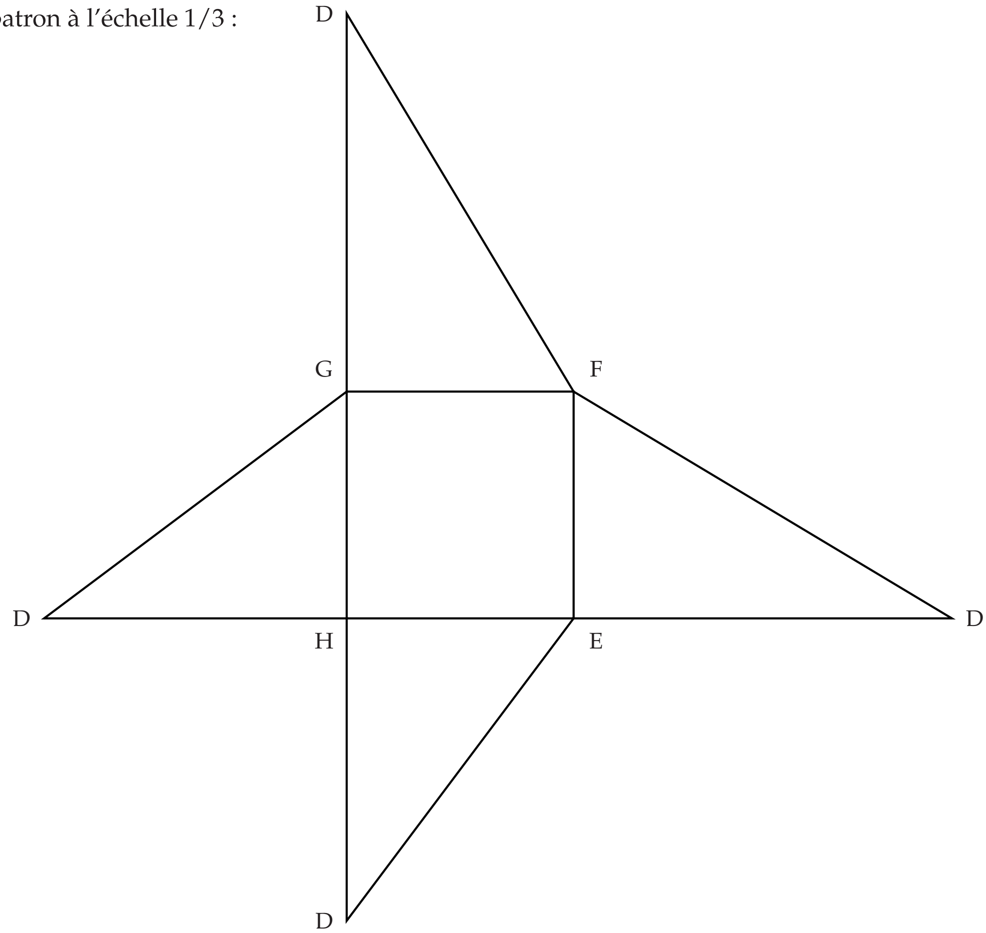
Le volume du cuboctaèdre est de $180\,\text{cm}^3$.

b) Le cuboctaèdre possède 3 arêtes à chaque « coin » ôté du cube, soit 8 × 3 arêtes = 24 arêtes.
Calculons par exemple IK : dans le triangle IFK rectangle en F, d'après le théorème de Pythagore avec des mesures en centimètre on a $\text{IK}^2 = \text{IF}^2 + \text{FK}^2 = 3^2 + 3^2 = 18$, donc $\text{IK} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.
D'où, la longueur totale des arêtes vaut $24 \times 3\sqrt{2} = 72\sqrt{2} \approx 101{,}82$ et
la longueur totale des arêtes du cuboctaèdre vaut environ 101,8 cm.

10 **1) a)** • Calcul de la longueur DE, en cm : nous sommes en présence d'un pavé, donc le triangle DHE est rectangle en H. D'après le théorème de Pythagore, $\mathrm{DE}^2 = \mathrm{DH}^2 + \mathrm{HE}^2 = 12^2 + 9^2 = 225$, donc : $\mathrm{DE} = 15$.
• Calcul de la longueur DG : le triangle DHG rectangle en H est isométrique au triangle DHE rectangle en H donc : DG = DE = 15 cm.

b) Le triangle DGF est rectangle en G et le triangle DEF est rectangle en E. car l'arête [FG] est perpendiculaire à la face CDHG, elle est alors perpendiculaire à la droite (GD) contenue dans ce plan.

c) Exemple de patron à l'échelle 1/3 :



2) a) La pyramide DJKLM est une réduction de la pyramide DEFGH. La base de cette dernière étant un carré, il en est de même pour la base de la pyramide réduite. JKLM est un carré.

b) Les longueurs JK et JM sont égales puisque JKLM est un carré.

Calculons le coefficient de réduction de la pyramide : $\dfrac{\mathrm{DJ}}{\mathrm{DH}} = \dfrac{12\,\mathrm{cm} - 2\,\mathrm{cm}}{12\,\mathrm{cm}} = \dfrac{10}{12} = \dfrac{5}{6}$.

Donc, la longueur du côté du carré JKLM mesure : $\dfrac{5}{6} \times 9\,\mathrm{cm} = 7{,}5\,\mathrm{cm}$. On a JK = JM = 7,5 cm.

c) Avec des mesures de longueur en cm et des mesures de volumes en cm^3, on a :

• volume B du sable blanc : $B = \dfrac{1}{3} \times$ aire du carré JKLM $\times$ hauteur $= \dfrac{1}{3} \times 7{,}5^2 \times 10 = 187{,}5$;

• volume V de la pyramide DHEFG : c'est un agrandissement de coefficient $\dfrac{6}{5}$ de la pyramide DJKLM, donc :

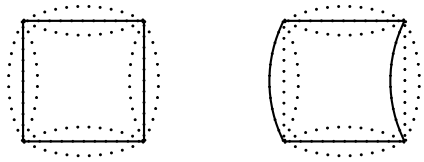
$V = \left(\dfrac{6}{5}\right)^3 \times B = \dfrac{6^3}{5^3} \times 187{,}5 = 324$;

• volume R du sable rouge : $R = V - B = 324 - 187{,}5 = 136{,}5$.

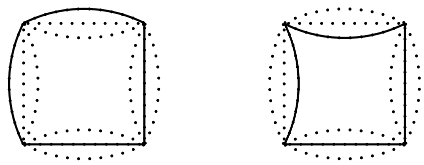
Le sable blanc occupe un volume de 187,5 cm^3 et le sable rouge 136,5 cm^3.

Chapitre M13

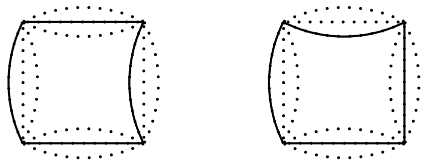
Périmètres et aires



1 • Deux pièces de même aire mais de périmètres différents :

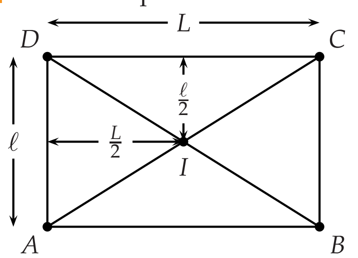


• Deux pièces de même périmètre mais d'aires différentes :



• Deux pièces de même périmètre et de même aire :

2 Faisons un petit schéma :



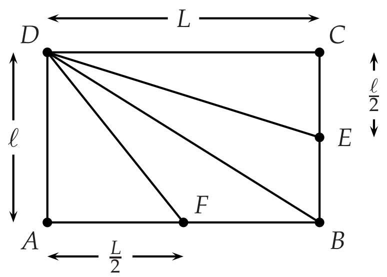
1) Soit L et ℓ la longueur et la largeur du rectangle ABCD, on a :

$\mathcal{A}(\text{CDI}) = \dfrac{L \times \frac{\ell}{2}}{2} = \dfrac{1}{4} \times L \times \ell$ et par symétrie, $\mathcal{A}(\text{ABI}) = \dfrac{1}{4} \times L \times \ell$

$\mathcal{A}(\text{DAI}) = \dfrac{\ell \times \frac{L}{2}}{2} = \dfrac{1}{4} \times \ell \times L$ et par symétrie, $\mathcal{A}(\text{CBI}) = \dfrac{1}{4} \times \ell \times L$

Donc, les quatre parts sont égales.

Nommons les points principaux de la figure :



2) $\mathcal{A}(\text{DCE}) = \dfrac{L \times \frac{\ell}{2}}{2} = \dfrac{1}{4} \times L \times \ell$; $\mathcal{A}(\text{DEB}) = \dfrac{\frac{\ell}{2} \times L}{2} = \dfrac{1}{4} \times L \times \ell$

$\mathcal{A}(\text{DBF}) = \dfrac{\frac{L}{2} \times \ell}{2} = \dfrac{1}{4} \times L \times \ell$; $\mathcal{A}(\text{DFA}) = \dfrac{\frac{L}{2} \times \ell}{2} = \dfrac{1}{4} \times L \times \ell$

Donc, les quatre parts sont égales.

3) Si l'on considère l'aire du rectangle CIKJ (1 $u.a.$), on a :

• $\mathcal{A}(\text{EFC}) = \dfrac{2 \times 4}{2}\, u.a = 4\, u.a.$

• $\mathcal{A}(\text{DGFE}) = \mathcal{A}(\text{DGC}) - \mathcal{A}(\text{EFC})$. Or, $\mathcal{A}(\text{DGC}) = \dfrac{5 \times 3}{2}\, u.a = 7{,}5\, u.a.$ Donc,
$\mathcal{A}(\text{DGFE}) = 7{,}5\, u.a. - 4\, u.a. = 3{,}5\, u.a.$

• $\mathcal{A}(\text{ABGD}) = \mathcal{A}(\text{ABC}) - \mathcal{A}(\text{DGC})$. Or, $2\mathcal{A}(\text{ABC}) = \dfrac{6 \times 4}{2}\, u.a = 12\, u.a.$ Donc,
$\mathcal{A}(\text{ABGD}) = 12\, u.a. - 7{,}5\, u.a. = 4{,}5\, u.a.$

Conclusion : les trois surfaces proposées ont toutes des aires différentes.

3 **1) a)** On effectue la division euclidienne de 418 cm par 29 cm :

$$\begin{array}{r|l} 418 & \underline{29} \\ 128 & 14 \\ 12 & \end{array}$$

donc, le carreleur pourra poser au maximum 14 dalles dans la largeur de la pièce.

b) On effectue la division euclidienne de 567 cm par 29 cm :

$$\begin{array}{r|l} 567 & \underline{29} \\ 277 & 19 \\ 16 & \end{array}$$

donc, le carreleur pourra poser au maximum 19 dalles dans la longueur de la pièce.

c) Dans la largeur, il restera 12 cm à combler pour 15 joints $(14 + 1)$, soit 0,8 cm par joint $(12 \div 15 = 0,8)$; dans la longueur, il restera 16 cm à combler pour 20 joints $(19 + 1)$, soit 0,8 cm par joint $(16 \div 20)$ d'où :
les joints autour des dalles auront tous une largeur de 8 mm.

1) Une dalle et un joint mesurent 36,6 cm = 366 mm.

Pour la largeur : $\begin{array}{r|l} 4180 & \underline{366} \\ 520 & 11 \\ 154 & \end{array}$

Pour la longueur : $\begin{array}{r|l} 5670 & \underline{366} \\ 2010 & 15 \\ 180 & \end{array}$

donc, le carreleur devra poser 11 dalles entières dans la largeur plus une qu'il devra couper et 15 dalles entières dans la longueur plus une qu'il devra couper.
Or, $12 \times 16 = 192$ donc, le nombre de dalles nécessaire est de 192.

2)

• Premier cas : $14 \times 19 = 266$, il a besoin de 266 dalles à 2,30 € chacune, soit un montant total de : $266 \times 2,30\,€ = 611,80\,€$.

• Second cas : il a besoin de 192 dalles à 3,10 € chacune, soit un montant de : $192 \times 3,10\,€ = 595,20\,€$.

Le choix le moins coûteux est le deuxième choix.

4 • L'aire du disque central en cm^2 est égale à $\pi \times 5^2 = 25\pi$.
L'aire de la couronne grisée en cm^2 est égale à $\pi \times 25^2 - \pi \times 20^2 = 225\pi$.
Donc, le rapport des deux surfaces vaut $\dfrac{25\pi}{225\pi} = \dfrac{1}{9}$.

• L'aire du carré central en cm^2 est égale à $10 \times 10 = 100$.
L'aire de la bande grisée en cm^2 est égale à $50^2 - 40^2 = 900$.
Donc, le rapport des deux surfaces vaut $\dfrac{100}{900} = \dfrac{1}{9}$.

Les deux rapports sont égaux.

5 **1)** On peut, par exemple, utiliser une méthode basée sur la décomposition de la figure : l'aire du polygone $ABCDEF$ est la somme des aires du carré $BCDF$ et des deux triangles DEF et ABF.

On notera $\mathcal{A}(P)$ l'aire du polygone P.

On a alors, avec des mesures de longueurs en $u.\ell.$ et des mesures d'aires en $u.a.$:

$\mathcal{A}(BCDF) = 5 \times 5 = 25$; $\quad \mathcal{A}(DEF) = \dfrac{5 \times 5}{2} = \dfrac{25}{2}$ $\quad$ et $\quad \mathcal{A}(ABF) = \dfrac{5 \times 4}{2} = 10.$

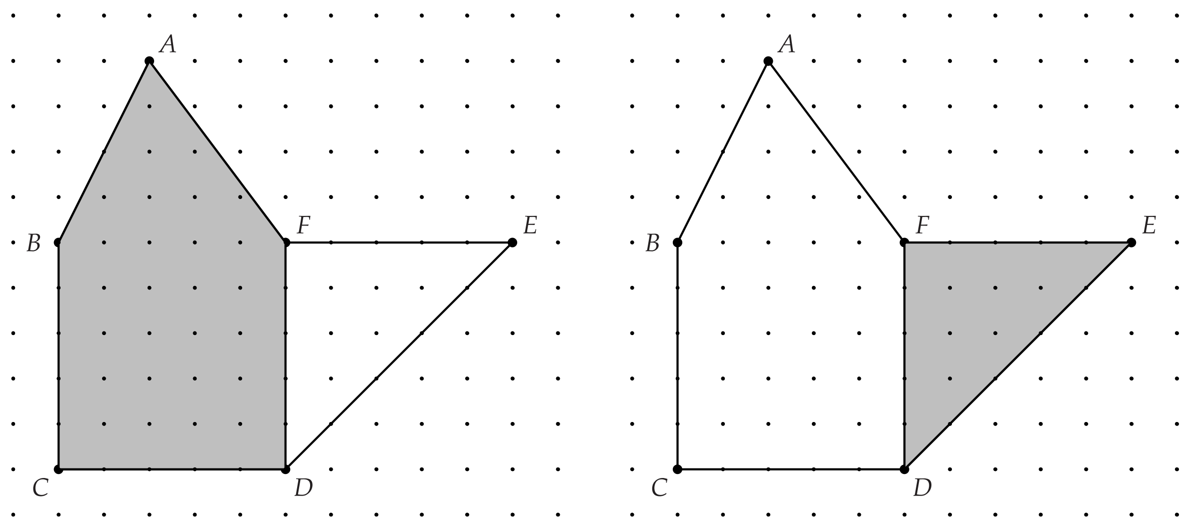
Donc, $\mathcal{A}(ABCDEF) = 25 + \dfrac{25}{2} + 10 = \dfrac{95}{2} = 47,5.$

L'aire du polygone $ABCDEF$ est de $47,5\,u.a.$

2) On a : $i = 37$ et $b = 23$ donc, $\mathcal{A} = 37 + \dfrac{23}{2} - 1 = \dfrac{95}{2} = 47,5.$

En utilisant la formule de Pick, on retrouve l'aire calculée précédemment.

3) Modélisation des aires :



Pour le polygone $ABCDF$, on trouve $i = 27$ et $b = 18$ donc $\mathcal{A}_1 = 27 + \dfrac{18}{2} - 1 = 35$;

pour le polygone DEF, on trouve $i = 6$ et $b = 15$ donc $\mathcal{A}_2 = 6 + \dfrac{15}{2} - 1 = \dfrac{25}{2}$.

$\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = 35 + \dfrac{25}{2} = \dfrac{95}{2}$.

La somme des résultats obtenus est égale au résultat trouvé à la question 1).

4) Expression de b : sur une longueur du rectangle, on a $(L+1)$ points sur le bord ; sur une largeur du rectangle, on a $(\ell+1)$ points sur le bord ; donc, sur le bord entier, on a $2 \times (L+1) + 2 \times (\ell+1) - 4$ points (puisqu'en procédant ainsi, on aura compté deux fois les 4 points situés dans les coins du rectangle).

Cela donne $b = 2L + \cancel{2} + 2\ell + \cancel{2} - \cancel{4} = 2(L+\ell)$.

Expression de i : à l'intérieur du rectangle, on a $(L-1)$ points dans la longueur et $(\ell-1)$ points dans la largeur ; ce qui nous donne $(L-1) \times (\ell-1)$ points à l'intérieur du rectangle.

On obtient $b = 2(L+\ell)$ et $i = (L-1) \times (\ell-1)$.

On calcule d'une part : $i + \dfrac{b}{2} - 1 = (L-1) \times (\ell-1) + \dfrac{\cancel{2}(L+\ell)}{\cancel{2}} - 1 = L \times \ell - L - \ell + 1 + L + l - 1 = L \times \ell.$

Et d'autre part, l'aire $\mathcal{A}$ d'un rectangle de côtés L et ℓ est donnée par la formule : $\mathcal{A} = L \times \ell$.

L'aire $\mathcal{A}$ du rectangle vérifie $\mathcal{A} = i + \dfrac{b}{2} - 1$.

La formule de Pick est ainsi démontrée pour un tel rectangle.

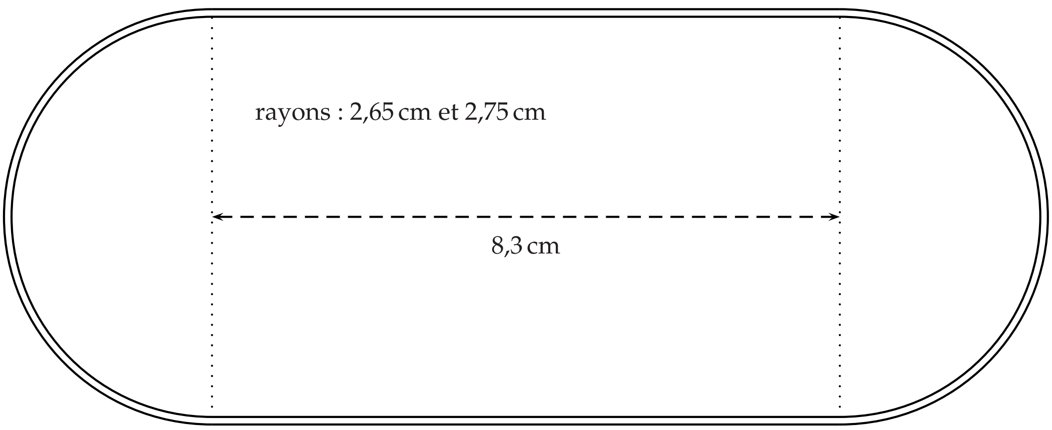
6 **1) a)** Le diamètre est lu grâce à la côte « R15 », il s'agit donc d'une jante de diamètre 15 pouces.
Or, $15 \times 2{,}54\,\text{cm} = 38{,}1\,\text{cm}$. Le diamètre de la jante vaut 38,1 cm.
b) La hauteur du pneu peut-être calculée grâce à la côte « 195/65 ».
Donc, la hauteur du pneu vaut 65 % de sa largeur (195 mm). Or, $\frac{65}{100} \times 195\,\text{mm} = 126{,}75\,\text{mm}$.
La hauteur du pneu est 12,675 cm.
c) Diamètre de la roue = diamètre de la jante + 2 × hauteur du pneu
$= 38{,}1\,\text{cm} + 2 \times 12{,}675\,\text{cm} = 63{,}45\,\text{cm}$.
Le diamètre total de la roue est 63,45 cm.
2) Les informations inscrites sur le pneu sont au nombre de cinq :
- largeur : 20,5 cm = **205**mm ;
- hauteur : $\text{hauteur du pneu} = \dfrac{\text{diamètre total du pneu} - \text{diamètre de la jante}}{2}$

$$= \frac{63{,}19\,\text{cm} - 40{,}64\,\text{cm}}{2} = 11{,}275\,\text{cm}.$$

Or, une mesure de 11,275 cm représente un pourcentage de $\dfrac{11{,}275\,\text{cm}}{20{,}5\,\text{cm}} \times 100 = \mathbf{55}\,\%$ par rapport à une mesure de 20,5 cm ;
- diamètre : le diamètre de la jante vaut 40,64 cm, qu'il faut convertir en pouce. Or, un pouce vaut 2,54 cm et $40,64 \div 2,54 = 16$ donc, l'inscription est **R16** ;
- indice du poids : la charge maximale est de 412 kg ce qui correspond à l'indice **77** ;
- indice de vitesse : la vitesse maximale est de $270\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ ce qui correspond à l'indice **W**.

Les informations inscrites sur ce pneu sont : 205/55 R16 77 W.

7 **1)** Pour effecteur un tour de piste, l'athlète doit effectuer deux lignes droites de longueur 100 m et deux demi-tours de rayon $r = 31{,}83\,\text{m}$.
On a alors : $L = 2 \times 100\,\text{m} + 2 \times \pi \times 31{,}83\,\text{m} \approx 399{,}99\,\text{m}$.
Un tour de piste effectué en couloir 1 mesure environ 400 m.
2) Pour dessiner le couloir 1, il faut tracer quatre segments qui correspondent aux lignes droites de mesure 100 m. Il faut également tracer deux demi-cercles de rayon 31,83 m et deux demi-cercles de rayon $31{,}83\,\text{m} + 1{,}22\,\text{m} = 33{,}05\,\text{m}$.
À l'échelle 1/1 200, cela correspond aux mesures suivantes : $100\,\text{m}/1\,200 \approx 0{,}083\,\text{m} \approx 8{,}3\,\text{cm}$;
$31{,}83\,\text{m}/1\,200 \approx 0{,}026\,5\,\text{m} \approx 2{,}65\,\text{cm}$ et $33{,}05\,\text{m}/1\,200 \approx 0{,}027\,5\,\text{m} \approx 2{,}75\,\text{cm}$.



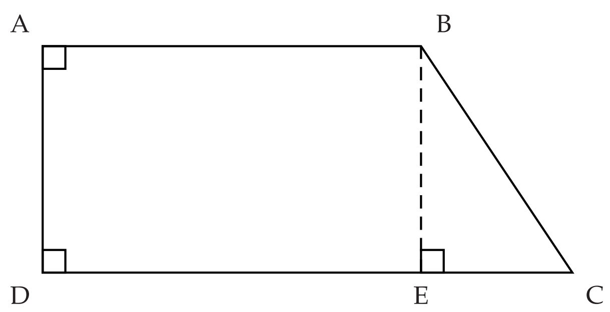
3) Sur une course de 200 m, si les athlètes commencent tous sur la même ligne de départ perpendiculaire aux lignes droites, plus les coureurs sont éloignés du couloir 1 plus ils vont parcourir de distance puisque le rayon du demi-cercle va augmenter. Pour palier à cette injustice, il faut décaler les départs ou les arrivées.
Or, pour simplifier la prise de durée et pour la beauté de l'épreuve, il est préférable que la ligne d'arrivée soit la même pour tout le monde, donc on décale les départs.

4) a) Au couloir 6, si le coureur partait sur la ligne de départ matérialisée sur le schéma, il parcourrait une distance de $\pi \times 37{,}93\,\text{m} + 100\,\text{m} \approx 219{,}160\,6\,\text{m}$. Il aura donc fait environ 19,16 m en trop.
Le décalage du coureur de couloir 6 est de 19,16 m.

b) Un demi-tour mesure $\pi \times 37{,}93\,\text{m}$ et correspond à un angle de $180\,^\circ$.
Donc, pour 19,16 m, on a un angle de $\alpha = \dfrac{19{,}16\,\text{m}}{37{,}93\,\pi\,\text{m}} \times 180\,^\circ \approx 28{,}94\,^\circ$.
La mesure de l'angle α est d'environ $28{,}9\,^\circ$.

c) Le couloir 1 correspond à une valeur de $\alpha = 0\,^\circ$. Les « zéros » ne se correspondent pas, c'est à dire que les échelles n'ont pas la même origine donc :
Il n'y a pas proportionnalité entre le numéro du couloir et la valeur de α.

8 **1)** L'échelle 1/1 000^e signifie que 1 000 cm = 10 m dans la réalité sont représentés par 1 cm sur le plan.



2) a) Dans le trapèze ABCD, calculons BC. Le triangle BEC est rectangle en E, on utilise le théorème de Pythagore avec des mesures de longueur en mètre.
$BC^2 = BE^2 + EC^2 \iff BC^2 = 30^2 + 20^2 = 1\,300 \iff BC = 10\sqrt{13}$.
Le périmètre du jardin vaut alors : $AB + BC + CD + DA = 50\,\text{m} + 10\sqrt{13}\,\text{m} + 70\,\text{m} + 30\,\text{m} = (150 + 10\sqrt{13})\,\text{m}$.
À ce périmètre, il faut enlever la largeur du portail, donc, la longueur de la clôture est de $(146{,}90 + 10\sqrt{13})\,\text{m} \approx 183\,\text{m}$

b)
- Aire de potager : $\mathcal{A}_p = \dfrac{EC \times EB}{2} = \dfrac{20\,\text{m} \times 30\,\text{m}}{2} = 300\,\text{m}^2$.
- Aire des plantations florales : $\mathcal{A}_f = \dfrac{1}{2} \times \pi \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2} \times \pi \left(\dfrac{50\,\text{m}}{2}\right)^2 = \dfrac{625}{2}\pi\,\text{m}^2 \approx 982\,\text{m}^2$.
- Aire du gazon : $\mathcal{A}_g = DE \times DA - \mathcal{A}_f = 50\,\text{m} \times 30\,\text{m} - \dfrac{625}{2}\pi\,\text{m}^2 = 1\,500\,\text{m}^2 - \dfrac{625}{2}\pi\,\text{m}^2 \approx 518\,\text{m}^2$.

9 **1) a)** L appartient au segment $[BC]$ de mesure 10 cm donc, $0 \leqslant x \leqslant 10$.

b) $\mathcal{A}_{ABCD} = AB \times AD = (10\,\text{cm})^2 = 100\,\text{cm}^2$.

Si $x = 2$, alors $\mathcal{A}_{ADM} = \mathcal{A}_{ABL} = \dfrac{AD \times DM}{2} = \dfrac{10\,\text{cm} \times 2\,\text{cm}}{2} = 10\,\text{cm}^2$.

On a alors $\mathcal{A}_{AMCL} = \mathcal{A}_{ABCD} - \mathcal{A}_{ADM} - \mathcal{A}_{ABL} = 100\,\text{cm}^2 - 10\,\text{cm}^2 - 10\,\text{cm}^2 = 80\,\text{cm}^2$.

Si $x = 2$, alors l'aire de $AMCL$ est égale à $80\,\text{cm}^2$.

c) Si $x = \dfrac{3}{5}$, alors $\mathcal{A}_{ADM} = \mathcal{A}_{ABL} = \dfrac{10\,\text{cm} \times \frac{3}{5}\text{cm}}{2} = \dfrac{6\,\text{cm}^2}{2} = 3\,\text{cm}^2$.

On a alors $\mathcal{A}_{AMCL} = \mathcal{A}_{ABCD} - \mathcal{A}_{ADM} - \mathcal{A}_{ABL} = 100\,\text{cm}^2 - 3\,\text{cm}^2 - 3\,\text{cm}^2 = 94\,\text{cm}^2$.

Si $x = \dfrac{3}{5}$, alors l'aire de$AMCL$ est égale à $94\,\text{cm}^2$.

d) $\mathcal{A}_{ABCD} = 100$ et $\mathcal{A}_{ADM} = \mathcal{A}_{ABL} = \dfrac{10 \times x}{2} = 5x$.

On a alors $\mathcal{A}_{AMCL} = \mathcal{A}_{ABCD} - \mathcal{A}_{ADM} - \mathcal{A}_{ABL} = 100 - 5x - 5x = 100 - 10x$.

e) Les trois parties ont la même aire si $\mathcal{A}_{ADM} = \mathcal{A}_{AMCL} = \mathcal{A}_{ABL}$

Soit $5x = 100 - 10x \iff 15x = 100 \iff x = \dfrac{100}{15} = \dfrac{20}{3}$.

Cette valeur est bien dans l'intervalle $[0; 10]$, on peut affirmer que $x = \dfrac{20}{3}$ est la valeur recherchée.

2) a) Si $x = 2$, alors $MC = CL = 10\,\text{cm} - 2\,\text{cm} = 8\,\text{cm}$.

D'où : $\mathcal{A}_{MCL} = \dfrac{MC \times CL}{2} = \dfrac{8\,\text{cm} \times 8\,\text{cm}}{2} = 32\,\text{cm}^2$.

Si $x = 2$, alors l'aire deMCL est égale à $32\,\text{cm}^2$.

b) $\mathcal{A}_{MCL} = \dfrac{(10-x) \times (10-x)}{2} = \dfrac{(10-x)^2}{2}$.

c)
$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{AML} = \mathcal{A}_{AMCL} - \mathcal{A}_{MCL} &= (100 - 10x) - \frac{(10-x)^2}{2} \\ &= 100 - 10x - \frac{100 - 20x + x^2}{2} \\ &= 100 - 10x - 50 + 10x - \frac{x^2}{2}\end{aligned}$$

Soit : $\mathcal{A}_{AML} = 50 - \dfrac{x^2}{2}$.

10 **1)** L'aire de la feuille vaut $120\,\text{cm} \times 80\,\text{cm} = 9\,600\,\text{cm}^2$.

2) a) Le rayon du disque vaut 14 cm, donc son diamètre vaut 28 cm.

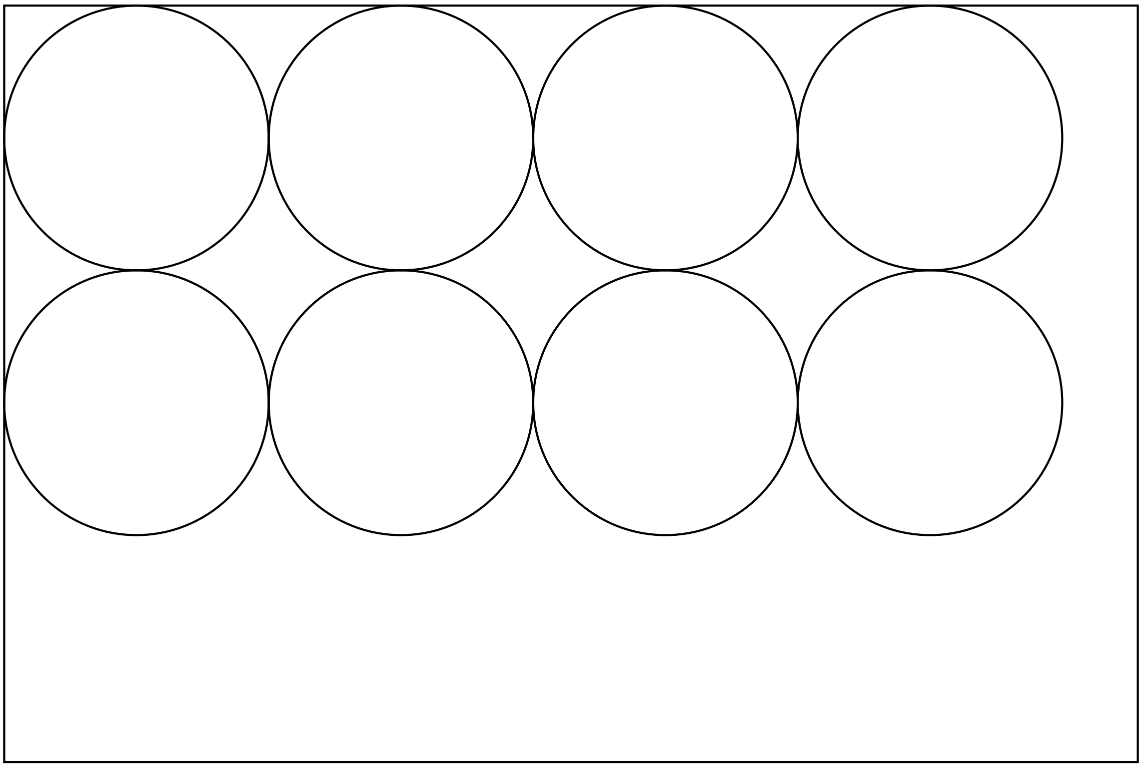
Or, $4 \times 28\,\text{cm} = 112\,\text{cm}$ et $5 \times 28\,\text{cm} = 140\,\text{cm}$. La longueur de la feuille étant de 120 cm, Alice peut mettre au maximum quatre disques dans la longueur de la feuille.

b) La largeur de la feuille mesure 80 cm. Or, $2 \times 28\,\text{cm} = 56\,\text{cm}$ et $3 \times 28\,\text{cm} = 84\,\text{cm}$. Alice peut mettre au maximum deux disques dans la largeur de la feuille puisqu'elle mesure 80 cm.

Si l'on considère la configuration de la figure (qui n'est pas optimale), on en déduit qu'Alice peut tracer au maximum huit disques sur sa feuille ($2 \times 4 = 8$).

c) Alice peut tracer huit disques par feuilles, et 4×8 disques $= 32$ disques alors que 3×8 disques $= 24$ disques. Donc, il faudra au minimum quatre feuilles pour dessiner les 30 disques.

3) À l'échelle 1/8, les dimensions respectives de 120 cm, 80 cm et 14 cm sont représentées par des dimensions de $120\,\text{cm} \div 8 = 15\,\text{cm}$, $80\,\text{cm} \div 8 = 10\,\text{cm}$ et $14\,\text{cm} \div 8 = 1{,}75\,\text{cm}$.



4) $\mathcal{A}_{\text{disque}} = \pi \times r^2 = \pi \times (14\,\text{cm})^2 = 196\pi\,\text{cm}^2 \approx 615{,}75\,\text{cm}^2$.
L'aire d'un disque vaut $196\,\pi\,\text{cm}^2$, soit environ $616\,\text{cm}^2$.

5) a) Aire utilisée pour tracer les disques : $8 \times 616\,\text{cm}^2 = 4\,928\,\text{cm}^2$.
Aire non utilisée : $9\,600\,\text{cm}^2 - 4\,928\,\text{cm}^2 = 4\,672\,\text{cm}^2$.
L'aire non utilisée pour découper les huit disques est de $4\,672\,\text{cm}^2$.
$\dfrac{4\,972\,\text{cm}^2}{9\,600\,\text{cm}^2} \times 100 \approx 48,67$. Donc, la quantité de feuille non utilisée représente une proportion d'environ 49 %.

b) Pour les 30 disques, il faut 3 feuilles avec 8 disques et une feuille avec 6 disques.
Le papier non utilisé correspond donc à $3 \times 4\,672\,\text{cm}^2 + 9\,600\,\text{cm}^2 - 6 \times 616\,\text{cm}^2 = 19\,920\,\text{cm}^2$.
L'aire de papier non utilisé après avoir découpé 30 disques est de $19\,920\,\text{cm}^2$.
$\dfrac{19\,920\,\text{cm}^2}{4 \times 9\,600\,\text{cm}^2} \times 100 \approx 51,875$.
Donc, L'aire de papier non utilisé après avoir découpé 30 disques représente une proportion d'environ 52 %.

6) On a $105 = 3 \times 28 + 21$ et $75 = 2 \times 28 + 19$ donc, le format Grand Aigle permet de tracer trois disques dans la longueur et deux dans la largeur, soit six disques par feuille.
De plus, $30 = 6 \times 5$ donc, il faudra cinq feuilles, remplie chacune de six disques.
Pour une feuille, le gaspillage sera de $105\,\text{cm} \times 75\,\text{cm} - 6 \times 616\,\text{cm}^2 = 7\,875\,\text{cm}^2 - 3\,696\,\text{cm} = 4\,179\,\text{cm}$.
Soit pour cinq feuilles : $5 \times 4\,179\,\text{cm} = 20\,895\,\text{cm}$.
Par conséquent, le format Grand Aigle ne permet pas d'obtenir moins de chutes que le format Grand Monde.

Chapitre M14

Volumes et autres grandeurs

1 **1)** On procède par étapes.

• Volume d'eau dans le vase à vide : le vase plein d'eau pèse 2 300 g et le vase vide 500 g donc, la masse d'eau est de 1 800 g.

Or, la masse volumique de l'eau est de $1\ \text{g}/\text{cm}^3$, donc 1 800 g ont un volume de $1\,800\ \text{cm}^3$.

• Volume d'eau déplacé : une fois la statue dans le vase plein d'eau, elle déplace autant d'eau que son volume, d'après le principe d'Archimède. Son poids est alors de 2 600 g.

Si on lui enlève le poids du vase et de la statue ($500\ \text{g} + 340\ \text{g} = 840\ \text{g}$), on obtient $2\,600\ \text{g} - 840\ \text{g} = 1\,760\ \text{g}$.

Par rapport au volume d'eau à vide, il manque donc 40 g ($1\,800 - 1\,760 = 40$).

• Volume de la statue :

40 g d'eau correspondent à $40\ \text{cm}^3$, donc : le volume de la statue est de $40\ \text{cm}^3$.

2) $\mu = \dfrac{\text{masse en g}}{\text{volume en cm}^3} = \dfrac{340\ \text{g}}{40\ \text{cm}^3} = 8{,}5\ \text{g}/\text{cm}^3$.

ou encore : $\mu = \dfrac{\text{masse en kg}}{\text{volume en L}} = \dfrac{0{,}34\ \text{g}}{0{,}04\ \text{dm}^3} = 8{,}5\ \text{kg}/\text{L}$.

3) Le poids de ce nouveau liquide est de $1\,940\ \text{g} - 500\ \text{g} = 1\,440\ \text{g}$.

Il occupe un volume de $1\,800\ \text{cm}^3$, donc, sa masse volumique est de $\mu = \dfrac{\text{masse en g}}{\text{volume en cm}^3} = \dfrac{1\,440\ \text{g}}{1\,800\ \text{cm}^3}$.

Soit : la masse volumique du nouveau liquide est de $0{,}8\ \text{g}/\text{cm}^3$.

2 **1)** On a $d = e$ et $c = d + e$, donc : $d = e = \dfrac{1}{2}c$ puis $b = d + c = \dfrac{1}{2}c + c = \dfrac{3}{2}c$ et enfin $a = b + c = \dfrac{3}{2}c + c = \dfrac{5}{2}c$.

$a = \dfrac{5}{2}c$; $b = \dfrac{3}{2}c$; $d = e = \dfrac{1}{2}c$

2) L'aire du rectangle vaut :

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 &= \left(\frac{5}{2}c\right)^2 + \left(\frac{3}{2}c\right)^2 + c^2 + \left(\frac{1}{2}c\right)^2 + \left(\frac{1}{2}c\right)^2 \\ &= \frac{25}{4}c^2 + \frac{9}{4}c^2 + c^2 + \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}c^2 \\ &= \frac{40}{4}c^2 = 10c^2. \end{aligned}$$

On a alors $10c^2 = 3\,610\ \text{cm}^2 \iff c^2 = \dfrac{3\,610\ \text{cm}^2}{10} = 361\ \text{cm}^2$, donc $c = 19\ \text{cm}$.

La largeur vaut $b + c = \dfrac{3}{2} \times 19\ \text{cm} + 19\ \text{cm} = 47{,}5\ \text{cm}$, la longueur $a + b = \dfrac{5}{2} \times 19\ \text{cm} + \dfrac{3}{2} \times 19\ \text{cm} = 76\ \text{cm}$.

La feuille a pour dimensions 76 cm par 47,5 cm.

3) La plaque métallique est homogène, ce qui signifie que la masse est proportionnelle à sa surface.

On sait que $a = \dfrac{5}{2}c$ et $b = \dfrac{3}{2}c$, donc $a = \dfrac{5}{3}b$.

Or, l'aire de A vaut $a^2 = \dfrac{25}{9}b^2$, ce qui signifie que la masse de A se calcule ainsi : $\dfrac{25}{9} \times 100\ \text{g} \approx 277{,}78\ \text{g}$.

La masse de la pièce A est d'environ 277,8 grammes.

4) On a $a = \dfrac{5}{2}c$, donc $c = \dfrac{2}{5}a$ et $c^3 = \left(\dfrac{2}{5}\right)^3 a^3 = \dfrac{8}{125}a^3$. D'où le volume du cube est de $\dfrac{8}{125} \times 2\ \text{m}^3 = 0{,}128\ \text{cm}^3$.

Le volume du cube C est de $128\ \text{dm}^3$.

3 **1) a)** $\frac{2}{3} \times 3\,600\,\text{s} = 2\,400\,\text{s}$ donc, deux tiers d'heure font 2 400 secondes.

b) $1,2 \times 3\,600\,\text{s} = 4\,320\,\text{s}$ donc, 1,2 heure fait 4 320 secondes.

2) a) Il s'agit, en fait, de convertir 5 532 en base 60 :

$5\,532 = 1 \times 60^2 + 32 \times 60^1 + 12 \times 60^0 = 1 \times 3\,600 + 32 \times 60 + 12$ donc, 5 532 s = 1 h 32 min 12 s.

b) 1,87 heure = 1 heure et 0,87 heure.

Or, $0,87 \times 60\,\text{min} = 52{,}2\,\text{min}$. D'où 1,87 heure = 1 heure 52 minutes et 0,2 minutes.

De plus, $0,2 \times 60\,\text{s} = 12\,\text{s}$. Conclusion : 1,87 h = 1 h 52 min 12 s.

3) La grande aiguille parcourt 360 ° en une heure, soit 3 600 secondes, soit 1 ° en 10 secondes, ou encore 54 ° en 540 secondes, ce qui correspondent à 9 minutes.

La grande aiguille d'une montre met 9 minutes pour parcourir un angle de 54 °.

4) La petite aiguille parcourt 360 ° en une 12 heures, soit 720 minutes, soit 1 ° en 2 minutes, donc 68 ° en 136 minutes, ce qui correspondent à 2 heures et 16 minutes.

L'heure indiquée est 14 h 16 min.

5) a) Il y a 7 heures de décalage horaire entre Houston et Paris. Donc, quand il est 23 h 00 à Paris, il est 16 h 00 à Houston. L'arrivée se faisant à 03 h 00, la durée du vol est de 8 h + 3 h = 11 h.

La durée du vol entre Paris et Houston est de 11 heures.

b) Arnaud reste à Houston pendant une heure, donc jusqu'à 04 h 00, puis repart pour Rio par un vol qui dure 10 h 00, il arrivera donc à 14 h 00 heure de Houston. Or, Rio est à +3 heures de Houston, conclusion :

Arnaud arrivera à 17 h 00 le lendemain de son départ à Rio de Janeiro.

4 **1)** On a $v = \frac{d}{t}$ donc, $t = \frac{d}{v} = \frac{150 \times 10^6\,\text{km}}{3 \times 10^8\,\text{m·s}^{-1}} = \frac{150 \times 10^9\,\text{m}}{3 \times 10^8\,\text{m·s}^{-1}} = 500\,\text{s}$.

Or, $500\,\text{s} = 8 \times 60\,\text{s} + 20\,\text{s} = 8\,\text{min} + 20\,\text{s}$ donc :

un signal lumineux émis par le Soleil met 8 min et 20 s pour parvenir à la Terre.

2) $d = v \times t$ donc : $d = 3 \times 10^5\,\text{km·s}^{-1} \times 365,25 \times 24 \times 3\,600\,\text{s} \approx 9,47 \times 10^{12}\,\text{km}$.

Une année – lumière vaut environ $9,47 \times 10^{12}$ km.

3) a) 1 UA = 150×10^6 km donc, $4,5 \times 10^9$ km correspondent à $\frac{4,5 \times 10^9\,\text{km} \times 1\,\text{UA}}{150 \times 10^6\,\text{km}} = 30\,\text{UA}$.

Neptune est située à 30 UA du Soleil.

b) 30 UA dans la réalité correspondent à 1 m sur la maquette.

Donc, 1 UA dans la réalité correspond à $\frac{1}{30}\text{m} \approx 0{,}033\,\text{m} \approx 3{,}3\,\text{cm}$ sur la maquette.

Il faudra placer la Terre à environ 3,3 cm du Soleil.

5 **1)** On a $D = \frac{V}{3 \times T} = \frac{1{,}5\,\text{L}}{3 \times 1\,\text{jour}} = \frac{1\,500\,\text{mL}}{3 \times 1 \times 24\,\text{h}} = \frac{125}{6}\,\text{g/min} \approx 20,83\,\text{g/min}$.

Le débit doit être d'environ 21 gouttes par minute.

2) On a $D = \frac{V}{3 \times T} \iff 6\,\text{g/min} = \frac{V}{3 \times 1{,}25\,\text{h}} \iff V = (6 \times 3 \times 1,25)\text{mL} = 22{,}5\,\text{mL}$.

En une heure et quart, on perfuse 22,5 millilitres de liquide.

3) On a $D = \frac{V}{3 \times T} \iff 8\,\text{g/min} = \frac{250\,\text{mL}}{3 \times T}$

$\iff 3 \times T = \frac{250\,\text{mL}}{8\,\text{g/min}} \iff T = \frac{125}{12}\,\text{h} = 10\,\text{h} + 60 \times \frac{5}{12}\,\text{min} = 10\,\text{h} + 25\,\text{min}$.

La durée de la perfusion devrait être de 10 heures et 25 minutes.

6 **1)** Volume d'eau : $V_{eau} = 4\,\text{m} \times 6{,}2\,\text{m} \times 0{,}031\,7\,\text{m} = 0{,}786\,16\,\text{m}^3 = 786{,}16\,\text{dm}^3 \approx 790\,\text{L}$.
Il est tombé environ 790 litres d'eau sur la toiture.
2) On récolte $0,90 \times 790\,\text{L} \approx 711\,\text{L}$.
En réalité, le volume d'eau récolté dans la cuve est d'environ 711 litres.
3) La citerne est composée de deux demi-sphères (donc une sphère) et d'un cylindre.
On a : $V_{\text{citerne}} = \dfrac{4}{3}\pi \times (62\,\text{cm})^3 + \pi \times (62\,\text{cm})^2 \times 166\,\text{cm}$

$\approx 3\,002\,969\,\text{cm}^3 \approx 3\,003\,\text{dm}^3 \approx 3\,003\,\text{L}$.

Un quart de la citerne correspond donc à un volume approximatif de $3\,003\,\text{L} \div 4 \approx 751\,\text{L}$.
Donc, l'affirmation est vraie.

7 **1)**
• Calcul du volume d'aluminium nécessaire pour fabriquer le corps de la canette :
$130\,\mu\text{m} = 130 \times 10^{-6}\text{m} = 130 \times 10^{-4}\,\text{cm} = 0{,}013\,\text{cm}$.
$\mathcal{V}$ = surface × épaisseur $= 268{,}42\,\text{cm}^2 \times 0{,}013\,\text{cm} \approx 3{,}49\,\text{cm}^3$.
• Calcul de la masse d'aluminium nécéssaire pour fabrique le corps de la canette :
la masse volumique de l'aluminium vaut $\mu = \dfrac{2\,700\,\text{kg}}{1\,\text{m}^3} = \dfrac{2\,700\,000\,\text{g}}{1\,000\,000\,\text{cm}^3} = 2{,}7\ \text{g/cm}^3$.
Un volume de $3{,}49\,\text{cm}^3$ d'aluminium a une masse m en gramme égale à $3,49 \times 2,7 \approx 9,423$.
• Calcul de la masse totale d'aluminium nécéssaire pour la canette entière :
M = masse du corps + masse de l'anneau + masse de soudure
$M \approx 9{,}4\,\text{g} + 1{,}4\,\text{g} + 1{,}9\,\text{g} \approx 12{,}7\,\text{g}$.
Il faut environ 12,7 g d'aluminium pour fabriquer une canette classique.
2) Pour un vélo de 9 kg, soit 9 000 g, on effectue le calcul suivant :
$9\,000\,\text{g} \div 12{,}7\,\text{g} \approx 708,66$.
Il faudrait environ 709 canettes classiques pour fabriquer ce type de vélo.

8 **1)** Un cube possède six faces isométriques, donc si la surface totale extérieure mesure $576\,\text{cm}^2$, une face a pour aire $96\,\text{cm}^2$ ($576 \div 6 = 96$).
Le côté du carré, et donc du cube mesure $\sqrt{96}$ cm et le volume a pour mesure :
$(\sqrt{96}\,\text{cm})^3 \approx 941\,\text{cm}^3 \approx 0{,}941\,\text{dm}^3 \approx 0{,}941\,\text{L}$ ce qui est inférieur à 1 L.
L'affirmation est vraie
2) La réduction des dimensions d'un objet par 5 diminue les aires par $5^2 = 25$ et les volumes et capacités par $5^3 = 125$.
L'affirmation est fausse.

9 **1)** La tente 1 est une pyramide à base carrée, la tente 2 est un cube, la tente 3 est un prisme à base hexagonale et la tente 4 est un cône.

2) a) La tente 2 est un cube, sa hauteur est $c = 1{,}9\,\text{m}$ et la tente 3 est un prisme de hauteur $a = 1{,}8\,\text{m}$.

b) On appelle S le sommet du cône et A un point du cercle de base, dans le triangle SOA rectangle en O (la hauteur h est perpendiculaire à la base), on a : $\tan(\widehat{OSA}) = \dfrac{OA}{h}$ d'où $h = \dfrac{r}{\tan(\alpha)} = \dfrac{1{,}5\,\text{m}}{\tan 35^\circ} \approx 2{,}14\,\text{m}$.

La tente 4 a pour hauteur $2{,}14\,\text{m}$ environ.

c) On appelle S le sommet de la pyramide et A un sommet du carré de base, la diagonale du carré a pour mesure $c\sqrt{2}\,\text{m}$ et donc sa demi-diagonale mesure $c\sqrt{2}/2\,\text{m}$. Dans le triangle SOA rectangle en O (la hauteur est perpendiculaire à la base), on a d'après le théorème de Pythagore, avec des mesure en m :

$$SA^2 = SO^2 + OA^2 \iff \ell^2 = h^2 + \left(\frac{c\sqrt{2}}{2}\right)^2 \iff h^2 = 3,2^2 - (1,85\sqrt{2})^2 \iff h^2 = 3,395.$$

La tente 1 a pour hauteur $1{,}84\,\text{m}$ environ.

3)

- $\mathcal{V}_{\text{tente 1}} = \dfrac{1}{3} \times \mathcal{A}_{\text{base}} \times h = (3{,}7\,\text{m})^2 \times 1{,}84\,\text{m} \approx 8{,}40\,\text{m}^3 \approx 8\,\text{m}^3$.
- $\mathcal{V}_{\text{tente 2}} = c^3 = (1{,}9\,\text{m})^3 \approx 6{,}86\,\text{m}^3 \approx 7\,\text{m}^3$.
- $\mathcal{V}_{\text{tente 3}} = \mathcal{A}_{\text{base}} \times a = 6\sqrt{3}\,\text{m}^2 \times 1{,}8\,\text{m} \approx 18{,}71\,\text{m}^3 \approx 19\,\text{m}^3$.
- $\mathcal{V}_{\text{tente 4}} = \dfrac{1}{3} \times \mathcal{A}_{\text{base}} \times h = \pi \times (1{,}5\,\text{m})^2 \times 2{,}14\,\text{m} \approx 5{,}04\,\text{m}^3 \approx 5\,\text{m}^3$.

4) M. Mathrice était hébergé dans la tente 4, la seule ayant une hauteur supérieure à sa taille.

10 • Volume d'un tube creux : il correspond au volume d'un tube plein de rayon 6 cm, auquel on enlève le volume d'un tube plein de rayon 4 cm.

– Volume du cylindre de 6 cm de rayon en cm^3 : $\mathcal{V}_1 = 3,14 \times 6^2 \times 75 = 8\,478$.

– Volume du cylindre de 4 cm de rayon en cm^3 : $\mathcal{V}_2 = 3,14 \times 4^2 \times 75 = 3\,768$.

Donc, le volume du tube creux est de $8\,478\,\text{cm}^3 - 3\,768\,\text{cm}^3 = 4\,710\,\text{cm}^3$.

• Masse d'un tube creux : la masse volumique du tube est de 2,7g /cm^3.

Or, $2,7 \times 4\,710 = 12\,717$, donc, la masse du tube creux est de 12 717 g = 12,717 kg.

• Nombre de tubes à transporter : la charge utile du camion est de 14 tonnes, soit 14 000 kg.

Or, $\dfrac{14\,000}{12,717} \approx 1\,100,89$ donc, le camion peut transporter au maximum 1 100 tubes creux en aluminium.

Chapitre T15

Algorithmes et programmation

1 Pour aller de Nantes à Paris, l'hélicoptère se déplace vers l'est de 120 ce qui correspond à deux cases, donc une case correspond à un déplacement de 60.

De la même manière, un déplacement vers le nord d'un case correspond à 60, les cases sont donc carrées.

Donc, pour aller de Nantes à Lyon :

- il faut tout d'abord se déplacer de trois cases vers l'est, soit $3 \times 60 = 180$;
- puis il faut s'orienter vers de sud, donc tourner à droite d'un angle de $90\,^{\circ}$;
- enfin, il faut se déplacer vers le sud d'une case, soit de 60.

Pour aller de Nantes à Lyon, il faut remplacer les nombres 120, 270 et 60 par 180, 90 et 60.

2 **1)** La balle est située à quatre espaces vers la droite, soit 4 × 40 unités = 160 unités et trois espaces vers le haut, soit 3 × 40 unités = 120 unités.

Ses coordonnées sont donc (160 ; 120).

2)

a) La touche → ajoute 80 à l'abscisse x ; la touche ← ajoute -40 à l'abscisse x ; donc, la succession → ← ajoute $80 + (-40) = 40$ à l'abscisse x.

Le chat a finalement « avancé » de 40 unités vers la droite, donc il ne revient pas à sa position de départ.

b) On résume dans un tableau les différents déplacements :

	départ	→	→	↑	←	↓
x	-120	-40	40	40	0	0
y	-80	-80	-80	0	0	-40

Les coordonnées du chat après ces cinq déplacements sont $(0 ; -40)$.

c) Seul le déplacement 2 permet au chat d'attraper la balle.

3) Lorsque le chat atteint la balle, il dit « Je t'ai attrapée » pendant 2 secondes, puis il retourne au départ.

3 **1)** On peut résumer dans un tableau les valeurs de a, b et n :

	a	n	b
valeurs initiales	5	0	1
valeurs après le premier passage	5	1	5
valeurs après le second passage	5	2	25

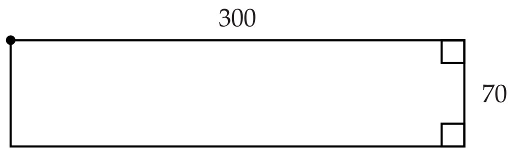
2) À chaque boucle : – il n'y a aucune action sur a qui reste donc égal à 5 ;

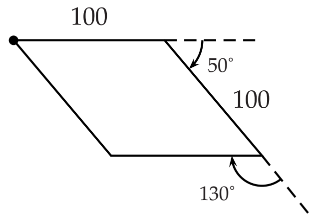
– n est incrémenté de 1 ;

– b est multiplié par a, donc par 5.

D'où, ce programme donne les puissances successives de 5 de 5^1 à 5^{10}.

4 Le premier programme dessine un rectangle de longueur 100 et de largeur 70.
Le deuxième programme dessine un losange de côté 100.





5 On remarque que sur le dessin obtenu, les carrés ont été collés alors qu'il ont un décalage de 20 pixels sur le dessin d'origine. Ceci est dû au fait que le saut de 20 pixels est effectué au moment où le carré est terminé, lorsque le crayon se retrouve à sa position d'origine. Il faut donc effectuer un saut de 20 pixels pour arriver au sommet du carré, puis de 20 pixels pour laisser un espace, soit 40 pixels.
De plus, il faut dessiner 8 carrés alors qu'il est indiqué de faire 7 répétitions.
Conclusion : il faut remplacer 7 par 8 dans le bloc « répéter 7 fois » et 20 par 40 dans le bloc « Saute en avant de 20 pixels ».

6 **1)** $7 < 10$ donc, le résultat vaut $5 \times 5 + 3 = 38$.
2) $12{,}7 \geqslant 10$ donc, le résultat vaut $2 \times 12{,}7 - 7 = 18{,}4$.
3) $-6 < 10$ donc, le résultat vaut $5 \times (-6) + 3 = -27$.

7 **1)** **a)** En saisissant 10, on obtient successivement :
- $x = 10$;
- $\mathrm{A} = x - 8 = 10 - 8 = 2$;
- $\mathrm{B} = \mathrm{A} \times 3 = 2 \times 3 = 6$;
- $\mathrm{C} = \mathrm{B} + 24 = 6 + 24 = 30$;
- $\mathrm{D} = \mathrm{C} + x = 30 + 10 = 40$.

Donc, si le nombre choisi et 10, le résultat affiché est 40.
b) En saisissant -2, on obtient successivement :
- $x = -2$;
- $\mathrm{A} = x - 8 = -2 - 8 = -10$;
- $\mathrm{B} = \mathrm{A} \times 3 = -10 \times 3 = -30$;
- $\mathrm{C} = \mathrm{B} + 24 = -30 + 24 = -6$;
- $\mathrm{D} = \mathrm{C} + x = -6 - 2 = -8$.

Donc, si le nombre choisi et -2, le résultat affiché est -8.
1) On obtient successivement :
- x ;
- $\mathrm{A} = x - 8$;
- $\mathrm{B} = \mathrm{A} \times 3 = (x - 8) \times 3 = 3x - 24$;
- $\mathrm{C} = \mathrm{B} + 24 = 3x - 24 + 24 = 3x$;
- $\mathrm{D} = \mathrm{C} + x = 3x + x = 4x$.

Donc, il faut mettre l'expression $4x$ dans le carré blanc.

8 **1)** Si $x = 5$, alors $3x + 7 = 3 \times 5 + 7 = 22 \neq 40$ donc, le logiciel va afficher la réponse : Et non désolé, ce n'est pas le nombre mystère. Essaie encore !

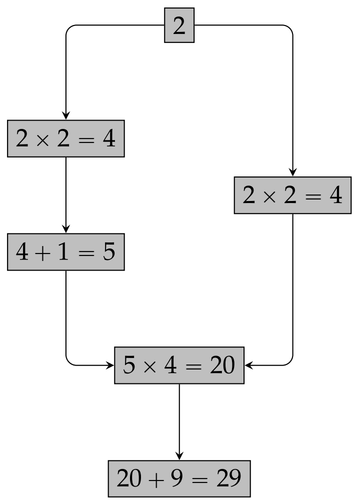
2) Pour obtenir le message « Bravo ! Tu as trouvé le nombre mystère. », il faut déterminer x tel que

$$\begin{aligned} 3x + 7 = 40 &\iff 3x = 40 - 7 \\ &\iff 3x = 33 \\ &\iff x = \frac{33}{3} = 11. \end{aligned}$$

Le nombre mystère est 11.

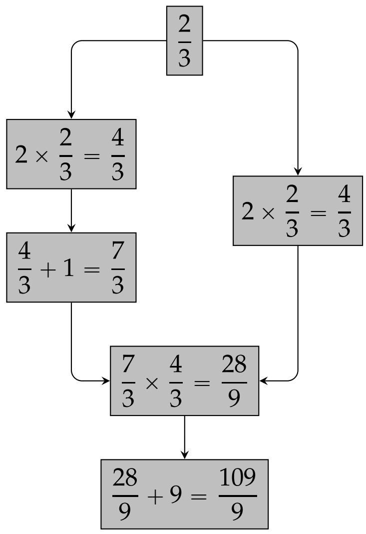
9 **1)** On obtient les organigrammes suivants :

a) Avec 2 :



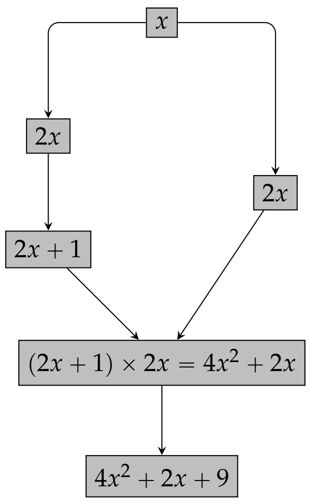
Avec 2, on obtient 29.

b) Avec $\frac{2}{3}$:



Avec $\frac{2}{3}$, on obtient $\frac{109}{9}$.

c) Avec x :



Avec x, on obtient $4x^2 + 2x + 9$.

2) On obtient les résultats suivants :

a) Avec 2 :

- réponse $\leftarrow 2$
- résultat $\leftarrow 2 + 3 = 5$
- résultat $\leftarrow 5 \times 5 = 25$
- « le résultat est 25 ».

b) Avec 1,5, on obtient :

- réponse $\leftarrow 1{,}5$
- résultat $\leftarrow 1{,}5 + 3 = 4{,}5$
- résultat $\leftarrow 4{,}5 \times 4{,}5 = 20{,}25$
- « le résultat est 20,25 ».

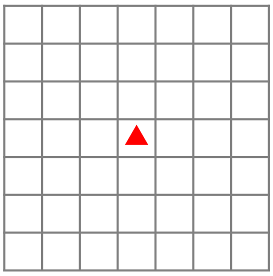
c) Avec x, on obtient :

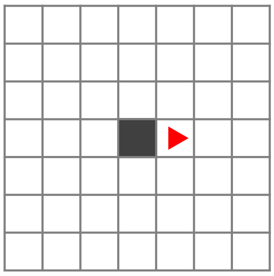
- réponse $\leftarrow x$
- résultat $\leftarrow x + 3$
- résultat $\leftarrow (x + 3) \times (x + 3) = x^2 + 6x + 9$
- « le résultat est $x^2 + 6x + 9$ ».

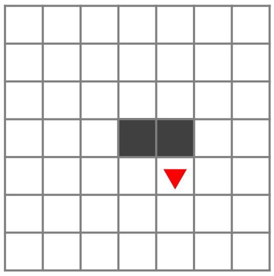
3)
$$\begin{aligned} 4x^2 + 2x + 9 = x^2 + 6x + 9 &\iff 3x^2 - 4x = 0 \\ &\iff x(3x - 4) \\ &\iff x = 0 \text{ ou } 3x - 4 = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

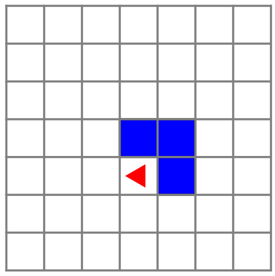
Les programmes donnent le même résultat pour des valeurs égales à 0 ou à $\frac{4}{3}$.

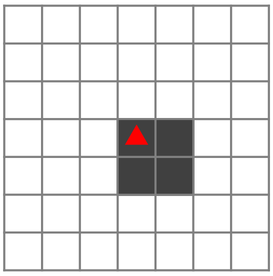
10 On obtient les quinze étapes suivantes :

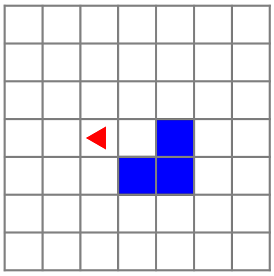

étape 0

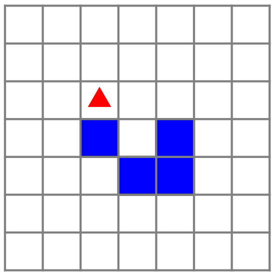

étape 1

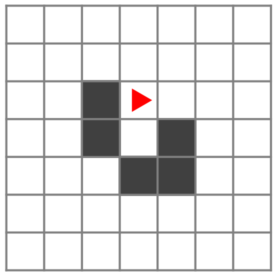

étape 2

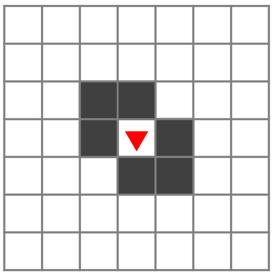

étape 3

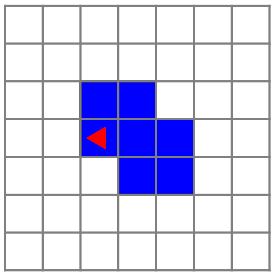

étape 4

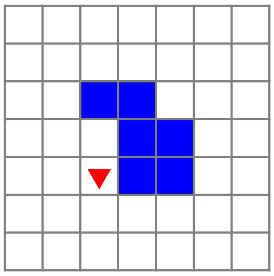

étape 5

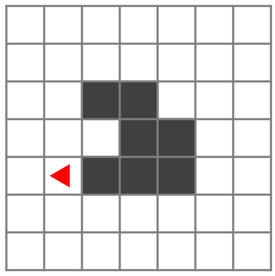

étape 6

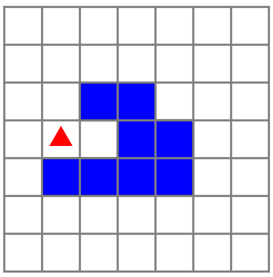

étape 7

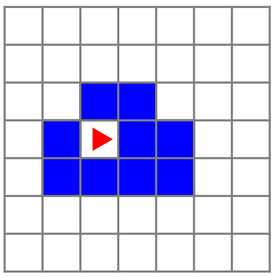

étape 8

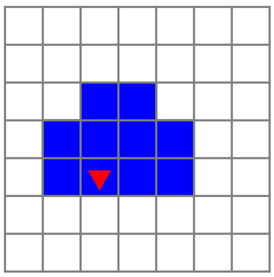

étape 9

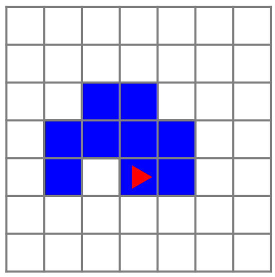

étape 10


étape 11


étape 12


étape 13


étape 14


étape 15