

Algèbre linéaire 2, feuille d'exercice numéro 4

Algèbres d'endomorphismes, algèbres de matrices

Exercice 1. Soit $\varphi : A \rightarrow B$ un morphisme d'algèbres. Montrer que $\text{Im}(\varphi)$ est une algèbre de même unité que B .

Exercice 2. Soit X une matrice inversible de $M_n(\mathbb{K})$. Montrer que l'application

$$M_n(\mathbb{K}) \rightarrow M_n(\mathbb{K}), \quad A \mapsto XAX^{-1}$$

est un automorphisme d'algèbres.

Exercice 3. Considérons la matrice $W = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ de $M_2(\mathbb{R})$.

(1) Montrer que $W^2 + W + I_2 = 0$.

(2) Montrer que le polynôme minimal de W dans $\mathbb{R}[X]$ est $\mu_W(X) = X^2 + X + 1$.

Exercice 4. Considérons la matrice $W = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ de $M_2(\mathbb{R})$.

(1) Montrer que $W^2 - 2W + I_2 = 0$.

(2) Montrer que le polynôme minimal de W dans $\mathbb{R}[X]$ est $\mu_W(X) = X^2 - 2X + 1$.

Exercice 5 (Formule du binôme). Soit A une $\mathbb{K}$ -algèbre et soit a et b deux éléments de A vérifiant $a \cdot b = b \cdot a$. Montrer que pour tout entier n , on a

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k},$$

avec $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ pour tout entier $k = 0, \dots, n$.

Exercice 6. Soit $A = M_n(\mathbb{K})$ ou $\mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

(1) Fixons un élément a appartenant à A ,

(a) Montrer que $\mathbb{K}[a]$ est de dimension finie.

(b) Supposons que $\mu_a(X) = X^m + \lambda_{m-1}X^{m-1} + \dots + \lambda_0 \in \mathbb{K}[X]$ est le polynôme minimal de a . Montrer que $\{1, a, \dots, a^{m-1}\}$ est une base de $\mathbb{K}[a]$. En déduire que $\dim \mathbb{K}[a] = \deg(\mu_a)$.

(c) Considérons

$$\begin{aligned} M_a : \mathbb{K}[a] &\rightarrow \mathbb{K}[a] \\ b &\mapsto a \cdot b \end{aligned}$$

(i) Montrer que M_a est bien défini et est un endomorphisme ;

(ii) Quelle est la matrice de M_a dans la base $(1, a, \dots, a^{m-1})$.

(iii) Montrer que M_a est inversible si et seulement si $\lambda_0 \neq 0$.

(iv) En déduire que a est inversible si et seulement si $\lambda_0 \neq 0$.

(2) Soit a un élément inversible de A . Montrer que a^{-1} appartient à $\mathbb{K}[a]$.

Exercice 7. Soit A une matrice inversible de $M_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont dans $\mathbb{Z}$. Alors on a équivalence entre les conditions suivantes :

- (1) A^{-1} est à coefficients dans $\mathbb{Z}$;
- (2) $\det A = \pm 1$.

Exercice 8 (Nombre algébrique). On dit qu'un nombre complexe a est algébrique, s'il est racine d'un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Q}$ non nul. Soit a un nombre complexe.

- (1) Montrer que $\sqrt{2}$ et $\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ sont des nombres algébriques.
- (2) Montrer que si $a \neq 0$, alors a est algébrique si et seulement si a^{-1} est algébrique.
- (3) Montrer que a est algébrique si et seulement si $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[a]$ est finie.
- (4) Déterminer la relation entre $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[a]$ et le polynôme minimal de a , si a est algébrique.
- (5) Montrer que si P est un polynôme sur $\mathbb{Q}$, alors a est algébrique implique que $P(a)$ est algébrique. (Indice : utiliser la troisième question.)

Exercice 9 (Matrice nilpotente). Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Un endomorphisme T est dit nilpotent si il existe un entier k tel que $T^k = 0$.

- (1) Considérer la matrice suivante :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer N^n pour tout entier positif n . Montrer que si N est la matrice d'un endomorphisme T dans une base donnée, alors T est nilpotent.

- (2) Montrer que s'il existe $v \in V$ tel que $T^k v = 0$ et $T^{k-1} v \neq 0$, alors $v, T^2 v, \dots, T^{k-1} v$ sont linéairement indépendants. (Indice : si $c_0 v + c_1 T v + \dots + c_{k-1} T^{k-1} v = 0$, appliquer T^{k-1} des deux côtés pour montrer que $c_0 = 0$.)
- (3) Montrer que si $\dim V = m$ et $T \in \text{End}(V)$ est un endomorphisme nilpotent, alors $T^m = 0$.
- (4) Si $\dim V = m$, supposer qu'il existe $v \in V$ tel que $T^{m-1} v \neq 0$. Trouver une base de V telle que, dans cette base, T soit représenté par la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (5) Soit T un endomorphisme nilpotent. Montrer que $\text{id}_V - T$ est un automorphisme et calculer son inverse.

Exercice 10 (Automorphismes des algèbres de polynômes). Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{K}$ et $a \neq 0$.

- (1) Montrer que $F_{a,b} : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X]$, $P(X) \mapsto P(aX + b)$ est un automorphisme d'algèbres. Trouver son inverse.
- (2) Montrer que tout automorphisme de l'algèbre $\mathbb{K}[X]$ est de la forme d'un certain $F_{a,b}$.
- (3) Montrer que si

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b_3 & a_3 \end{pmatrix},$$

alors $F_{a_3, b_3} = F_{a_2, b_2} \circ F_{a_1, b_1}$.

Exercice 11 (Polynôme annulateur d'un vecteur). Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Supposons que A soit une matrice $n \times n$ sur $\mathbb{K}$, avec un polynôme minimal p_A . On dit qu'un polynôme $p \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ est un polynôme annulateur de v si $p(A)v = 0$.

- (1) Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire p_v , tel que p_v divise tous les polynômes annulateurs de v . (Indice : dans l'ensemble des polynômes annulateurs de v , choisir un polynôme de degré minimal. Appliquer ensuite la division euclidienne. Utiliser une méthode similaire pour prouver l'existence du polynôme minimal d'une matrice.) On dit que p_v est le polynôme annulateur minimal de v pour A .
- (2) Montrer que p_v divise p_A .
- (3) Montrer que $S = \{p_v : v \in V\}$ est un ensemble fini dans $\mathbb{K}[X]$.
- (4) Montrer que :

$$V = \bigcup_{p \in S} \text{Ker}(p(A)).$$

- (5) Pour tout $t \in \mathbb{K}$, on définit le vecteur $v_t = (1, t, \dots, t^{n-1})$. Montrer que si $t_1, t_2, \dots, t_n$ sont n nombres distincts, alors $\{v_{t_1}, v_{t_2}, \dots, v_{t_n}\}$ est une base de $\mathbb{K}^n$. (Indice : utiliser le déterminant de Vandermonde.)
- (6) Montrer que, si V est une réunion de sous-espaces vectoriels de dimensions finies $V_1, \dots, V_m$, alors il existe un indice i tel que $V = V_i$. (Indice : si $V = V_1 \cup \dots \cup V_m$, pour tout ensemble de $m(n-1) + 1$ vecteurs non nuls, il existe un sous-espace V_i contenant au moins n d'entre eux.)
- (7) Montrer qu'il existe $v \in V$ tel que $p_v = p_A$.
- (8) Montrer que $\deg(p_A) \leq n$.

Exercice 12 (Lemme des noyaux). Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$, φ un endomorphisme de E . Fixons p un **polynôme annulateur** de φ .

- (1) Montrer le théorème de Bézout pour les polynômes : soit P, Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Alors P et Q sont premiers entre eux si et seulement s'il existe deux polynômes A, B tels que

$$AP + BQ = 1.$$

- (2) Supposons que $p = p_1 p_2$, où p_1 et p_2 sont premiers entre eux. Montrer qu'il existe deux endomorphismes ψ_1, ψ_2 de E , tels que

$$\begin{aligned} p_1(\varphi) \circ \psi_1 &= \psi_1 \circ p_1(\varphi), & p_2(\varphi) \circ \psi_2 &= \psi_2 \circ p_2(\varphi), \\ p_1(\varphi) \circ \psi_1 + p_2(\varphi) \circ \psi_2 &= \text{id}_E. \end{aligned}$$

- (3) Montrer que $p_1(\varphi) \circ \psi_1$ et $p_2(\varphi) \circ \psi_2$ sont des projecteurs.
- (4) Montrer que

$$\text{Ker } p_1(\varphi) = \text{Im}(p_2(\varphi) \circ \psi_2), \quad \text{Ker } p_2(\varphi) = \text{Im}(p_1(\varphi) \circ \psi_1).$$

- (5) Montrer que $E = \text{Ker } p_1(\varphi) \oplus \text{Ker } p_2(\varphi)$.
- (6) Supposons que q soit un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, $q = q_1 q_2$, où q_1, q_2 sont premiers entre eux, alors

$$\text{Ker}(q(\varphi)) = \text{Ker}(q_1(\varphi)) \oplus \text{Ker}(q_2(\varphi)).$$

(Indice : remplacer E par $E' = \text{Ker } q(\varphi)$ et φ par $\varphi|_{E'}$.)

- (7) Supposons que $p = p_1 p_2 \cdots p_n$ ($n \geq 2$) et que $p_1, p_2, \dots, p_n$ sont premiers entre eux. Montrer que

$$E = \text{Ker } p_1(\varphi) \oplus \cdots \oplus \text{Ker } p_n(\varphi).$$

- (8) Si p a m racines simples $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, montrer que

$$E = \text{Ker}(\varphi - \lambda_1 \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(\varphi - \lambda_2 \text{id}_E) \oplus \cdots \oplus \text{Ker}(\varphi - \lambda_m \text{id}_E).$$

- (9) Soit q un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, avec une décomposition en facteurs premiers $q = \prod_{i=1}^r q_i^{e_i}$.
Montrer que

$$\text{Ker } q(\varphi) = \bigoplus_{i=1}^r \text{Ker } q_i^{e_i}(\varphi).$$

- (10) On dit qu'un endomorphisme $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E , telle que $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ soit une matrice diagonale. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) φ est diagonalisable.
(b) Il existe des scalaires distincts $\mu_1, \dots, \mu_m$ tels que

$$E = \text{Ker}(\varphi - \mu_1 \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(\varphi - \mu_2 \text{id}_E) \oplus \dots \oplus \text{Ker}(\varphi - \mu_m \text{id}_E).$$

- (c) Il existe un polynôme annulateur de φ scindé avec des racines simples.