

Corrigé du TD1 : Révisions sur les EDO, question d'unicité et Théorème de Cauchy-Lipschitz

Définition 1. Soient (X, d_X) , (Y, d_Y) et (Z, d_Z) trois espaces métriques. Soit $f \in C^0(X \times Y, Z)$ où $X \times Y$ est muni de la distance produit. On dit que f est localement Lipschitzienne en la seconde variable si pour tout $(x_0, y_0) \in X \times Y$, il existe $r > 0$ et $K > 0$ tels que

$$d_Z(f(x, y), f(x, y')) \leq K d_Y(y, y') \text{ pour tout } x \in B_X(x_0, r) \text{ et } y, y' \in B_Y(y_0, r).$$

Théorème 1. [Théorème de Cauchy-Lipschitz] Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit I un intervalle non-vide de $\mathbb{R}$. Soit $f \in C^0(I \times U, \mathbb{R}^n)$. On suppose que f est localement Lipschitzienne en la seconde variable. On fixe $t_0 \in I$ et $x_0 \in U$. Alors il existe $\delta > 0$ et $x \in C^1([t_0 - \delta, t_0 + \delta] \cap I, U)$ tels que

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) & \text{dans }]t_0 - \delta, t_0 + \delta[\cap I \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

De plus, une telle solution est unique.

1. RÉVISIONS

1.1. Equations homogènes à coefficients non-constants.

Exercice 1. Déterminez les solutions des ED suivantes :

$$y' = x^2 y, \quad \cos(x)y' + 3 \sin(x)y = 0 \text{ sur }]-\pi/2, \pi/2[, \quad 4t\dot{x} + x = 0 \text{ sur } [1, +\infty[;$$

$$\begin{aligned} & y' = (\cos x)y; \quad y' = (\cos x + \sin x)y \text{ avec } y(\pi/2) = 1 \\ & \left\{ \begin{array}{l} y' + \tan^2(x)y = 0 \\ y(0) = 3 \end{array} \right. \text{ sur }]-\pi/2, \pi/2[, \quad \left\{ \begin{array}{l} y' = \ln(x)y \\ y(1) = 2 \end{array} \right. \text{ sur }]0, +\infty[, \quad \left\{ \begin{array}{l} 2y' + 7e^x y = 0 \\ y(-1) = 0 \end{array} \right. \text{ sur } \mathbb{R}, \end{aligned}$$

Corrigé :

$$\bullet y' = x^2 y \Leftrightarrow \text{il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } y(x) = \lambda e^{x^3/3} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \cos(x)y' + 3 \sin(x)y = 0. \text{ Il faut trouver une primitive de } x \mapsto -3 \frac{\sin x}{\cos x} = 3 \frac{\cos'(x)}{\cos x} = 3 \ln |\cos x|. \text{ Donc}$$

$$\text{il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } y(x) = \lambda e^{3 \ln |\cos x|} = \lambda |\cos x|^3 = \lambda \cos(x)x^3 \text{ pour tout } x \in]-\pi/2, \pi/2[$$

$$\bullet 4t\dot{x} + x = 0 \Leftrightarrow \dot{x} = \frac{-1}{4t}x \Leftrightarrow \text{il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } x(t) = \lambda e^{\frac{-1}{4} \ln t} = \lambda t^{-\frac{1}{4}}$$

$$\bullet y' = (\cos x)y \Leftrightarrow \text{il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } y(x) = \lambda e^{\sin x}$$

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} y' = (\cos x + \sin x)y \\ y(\pi/2) = 1 \end{array} \right. \text{ sur }]-\pi/2, \pi/2[, \quad \Leftrightarrow \{ \text{il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } y(x) = \lambda e^{\sin x - \cos x} \text{ et } y(\pi/2) = 1 \}$$

$$\text{Et du coup, } 1 = y(\pi/2) = \lambda e^{1-0} \text{ donc } \lambda = e^{-1} \text{ et } y(x) = e^{\sin x - \cos x - 1}$$

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} y' + \tan^2(x)y = 0 \\ y(0) = 3 \end{array} \right. \text{ sur }]-\pi/2, \pi/2[, \quad \left\{ \begin{array}{l} y' = \ln(x)y \\ y(1) = 2 \end{array} \right. \text{ sur }]0, +\infty[, \quad \left\{ \begin{array}{l} 2y' + 7e^x y = 0 \\ y(-1) = 0 \end{array} \right. \text{ sur } \mathbb{R},$$

Il faut trouver une primitive de $x \mapsto -\tan^2(x) = -(1 + \tan^2 x) + 1 = -(\tan'(x)) + x' = (x - \tan x)'$. Donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y(x) = \lambda e^{x - \tan x}$ pour tout $x \in]-\pi/2, \pi/2[$. On a alors $3 = y(0) = \lambda e^{0 - \tan 0} = \lambda$. Donc

$$\boxed{y(x) = 3e^{x - \tan x} \text{ pour tout } x \in]-\pi/2, \pi/2[}$$

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} y' = \ln(x)y \quad \text{sur }]0, +\infty[, \\ y(1) = 2 \end{array} \right\}$$

Il faut trouver une primitive de $x \mapsto \ln x = (x \ln x - x)'$ (exo sur les intégrales, ça se fait par IPP). Donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y(x) = \lambda e^{x \ln x - x}$ pour tout $x > 0$. On a alors $2 = y(1) = \lambda e^{1 \ln 1 - 1} = \lambda e^{-1}$. Donc

$$\boxed{y(x) = 2e^1 e^{x \ln x - x} = 2e^{x \ln x - x + 1} \text{ pour tout } x > 0}$$

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} 2y' + 7e^x y = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}, \\ y(-1) = 0 \end{array} \right\};$$

Intégration à vue : il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y(x) = \lambda e^{7e^x/2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Or $0 = y(-1) = \lambda e^{7e^{-1}/2}$ donc $\lambda = 0$, puis $\boxed{y(x) = 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}}$

1.2. Equations avec second membre.

Exercice 2. Déterminez les solutions des équations suivantes :

- $y' + y = 1$
- $y' + 2y = 2x + 3$;
- $y' = 3x$;
- $y' + 2xy = x$;

Corrigé :

- $y' + y = 1$. On essaie $y(x) = k$, ce qui donne $y' + y = k$, donc on prend $k = 1$ et $\boxed{y(x) = 1}$ est solution.
- $y' + 2y = 2x + 3$. On essaie $y(x) = k$, ce qui donne $y' + 2y = 2k \neq 2x + 3$. On essaie $y(x) = ax + b$, donc $y' + 2y = a + 2(ax + b) = 2ax + a + 2b = 2x + 3$ avec $2a = 2$ et $a + 2b = 3$, donc $a = b = 1$. Donc $\boxed{y(x) = x + 1}$ est solution.
- $y' = 3x$. On essaie $y(x) = k$, donc $y' = 0$, ne convient pas. Avec $y(x) = ax + b$, $y' = a$ ne convient toujours pas. Avec $y(x) = ax^2 + bx + c$, on a $y' = 2ax + b = 3x$ avec $a = 3/2$ et $b = 0$. Donc $\boxed{y(x) = \frac{3}{2}x^2 + c}$. Comme il n'y a pas de contrainte sur c , on va prendre $c = 0$ car on cherche une solution, pas toutes. Donc, par exemple, $\boxed{y(x) = \frac{3}{2}x^2}$.
- $y' + 2xy = x$. On essaie $y(x) = k$, donc $y' + 2xy = 2kx = x$ avec $2k = 1$, donc $\boxed{y(x) = 1/2}$ convient.

Exercice 3. Déterminez les solutions des équations suivantes :

- $3y' + 4y = xe^{2x}$;
- $y' = 3xe^{-x}$;
- $y' + 4y = xe^{-4x}$.
- $y' - y = e^x$;

Corrigé :

- $3y' + 4y = xe^{2x}$. On essaie $y(x) = ke^{2x}$, ce qui donne $3y' + 4y = 10ke^x \neq xe^x$. On essaie $y(x) = (ax + b)e^x$, donc $3y' + 4y = 3(ae^{2x} + (ax + b)2e^{2x}) + 4(ax + b)e^{2x} = (10ax + 3a + 10b)e^{2x} = xe^{2x}$ avec $10a = 1$ et $3a + 10b = 0$, donc

$$a = 1/10 \text{ et } b = -3/100, \text{ ce qui donne } \boxed{y(x) = \left(\frac{x}{10} - \frac{3}{100}\right)e^{2x}}.$$

- $y' = 3xe^{-x}$. On essaie $y(x) = ke^{-x}$, ce qui donne $y' = -ke^{-x} \neq 3xe^{-x}$, ne convient pas. On essaie $y(x) = (ax + b)e^{-x}$, donc $y' = (-ax + a - b)e^{-x} = 3xe^{-x}$ avec $-a = 3$ et $a - b = 0$, donc $a = b = -3$, ce qui donne

$$\boxed{y(x) = -3(x + 1)e^{-x}}.$$

- $y' + 4y = xe^{-4x}$. On essaie $y(x) = ke^{-4x}$, ce qui donne $y' + 4y = 0 \neq xe^{-4x}$, ne convient pas. On essaie $y(x) = (ax + b)e^{-4x}$, donc $y' + 4y = ae^{-4x} - 4(ax + b)e^{-4x} + 4(ax + b)e^{-4x} = ae^{-4x} \neq xe^{-4x}$ ne convient pas. On essaie $y(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-4x}$: on a alors

$$\begin{aligned} y' + 4y &= (2ax + b)e^{-4x} + (ax^2 + bx + c) \times (-4)e^{-4x} + 4(ax^2 + bx + c)e^{-4x} \\ &= (2ax + b)e^{-4x} = xe^{-4x} \end{aligned}$$

avec $2a = 1$ et $b = 0$, donc $y(x) = (x^2/2 + c)e^{-4x}$ sans contrainte sur c . On

prend $c = 0$ pour avoir la solution plus simple $\boxed{y(x) = \frac{x^2}{2}e^{-4x}}$.

•

$$y' - y = e^x \Leftrightarrow \text{il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } y(x) = xe^x + \lambda e^x \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

Exercice 4. Effectuez la résolution sur $\mathbb{R}$ de

$$\left\{ \begin{array}{l} y' + y = 2e^x, \\ y(0) = 3 \end{array} \right\}; \left\{ \begin{array}{l} 2y' + xy = x^2 + x + 2, \\ y(2) = 0 \end{array} \right\}; \left\{ \begin{array}{l} 2y' - 5y = (x^2 + 4x - 1)e^{3x}, \\ y(1) = 3 \end{array} \right\}$$

Corrigé : on reprend les résultats précédents :

$$y' + y = 2e^x \Leftrightarrow \text{il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } y(x) = e^x + \lambda e^{-x} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

Avec la condition $y(0) = 3$, on a donc $3 = y(0) = e^0 + \lambda e^{-0} = 1 + \lambda$, donc $\lambda = 2$, ce qui donne

$$\boxed{y(x) = e^x + 2e^{-x}}.$$

$$2y' + xy = x^2 + x + 2 \Leftrightarrow \text{il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } y(x) = x + 1 + \lambda e^{-x^2/4} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

Avec la condition $y(2) = 0$, on a donc $0 = y(2) = 3 + \lambda e^{-1}$, donc $\lambda = -3e$, ce qui donne

$$\boxed{y(x) = x + 1 + 3e^{1-x^2/4}}.$$

$$2y' - 5y = (x^2 + 4x - 1)e^{3x} \Leftrightarrow \text{il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } y(x) = (x^2 - 1)e^{3x} + \lambda e^{\frac{5}{2}x} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

Avec la condition $y(1) = 3$, on a donc $3 = y(1) = 0 + \lambda e^{5/2}$, donc $\lambda = 3e^{-5/2}$, ce qui donne

$$\boxed{y(x) = (x^2 - 1)e^{3x} + 3e^{-5/2}e^{\frac{5}{2}x} = (x^2 - 1)e^{3x} + 3e^{\frac{5}{2}(x-1)}}.$$

1.3. La méthode dite de "variation de la constante".

Exercice 5. Résolvez les équations suivantes avec la méthode de variation de la constante

$$y' - y = e^x \ln x; \quad y' + y = 3 \cos 2x - \sin 2x.$$

Corrigé. • $y' - y = e^x \ln x$. On commence par résoudre l'équation homogène $y' - y = 0$, donc $y(x) = \lambda e^x$ pour tout $x > 0$. On pose alors $y(x) = \lambda(x)e^x$, de sorte que

$$y' - y = \lambda' e^x + \lambda e^x - \lambda e^x = \lambda' e^x = e^x \ln x \Rightarrow \lambda' = \ln x$$

et donc $\lambda(x) = x \ln x - x$ convient. Pour la solution générale, on a donc

$$y' - y = e^x \ln x \Leftrightarrow \text{il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } y(x) = e^x(x \ln x - x) + \lambda e^x \text{ pour tout } x > 0$$

• $y' + y = 3 \cos 2x - \sin 2x$. On commence par résoudre l'équation homogène $y' + y = 0$, donc $y(x) = \lambda e^{-x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On pose alors $y(x) = \lambda(x)e^{-x}$, de sorte que

$$y' + y = \lambda' e^{-x} - \lambda e^{-x} - \lambda e^{-x} = \lambda' e^{-x} = 3 \cos 2x - \sin 2x \Rightarrow \lambda' = e^x(3 \cos 2x - \sin 2x)$$

On trouve une primitive par IPP :

$$\begin{aligned} \int_0^x e^t \cos(2t) dt &= \int_0^x (e^t)' \cos(2t) dt = [e^t \cos(2t)]_0^x - \int_0^x e^t (\cos(2t))' dt \\ &= e^x \cos(2x) - 1 + 2 \int_0^x e^t \sin(2t) dt = e^x \cos(2x) - 1 + 2 \int_0^x (e^t)' \sin(2t) dt \\ &= e^x \cos(2x) - 1 + 2 \left([e^t \sin(2t)]_0^x - 2 \int_0^x e^t \cos(2t) dt \right) \\ &= e^x \cos(2x) + 2e^x \sin(2x) - 1 - 4 \int_0^x e^t \cos(2t) dt \end{aligned}$$

et donc

$$5 \int_0^x e^t \cos(2t) dt = e^x \cos(2x) + 2e^x \sin(2x) - 1 \Rightarrow \int_0^x e^t \cos(2t) dt = \frac{e^x \cos(2x) + 2e^x \sin(2x) - 1}{5}$$

Pour l'autre primitive, on reprend le calcul précédent pour avoir directement

$$\int_0^x e^t \sin(2t) dt = \frac{\int_0^x e^t \cos(2t) dt - e^x \cos(2x) + 1}{2}$$

Finalement, à une constante près, on obtient

$$\lambda(x) = 3 \frac{e^x \cos(2x) + 2e^x \sin(2x)}{5} - \frac{e^x \cos(2x) + 2e^x \sin(2x)}{10} + \frac{e^x \cos(2x)}{2} + C$$

et donc une solution particulière est

$$y(x) = \lambda(x)e^{-x} = 3 \frac{\cos(2x) + 2 \sin(2x)}{5} - \frac{\cos(2x) + 2 \sin(2x)}{10} + \frac{\cos(2x)}{2} = \cos(2x) + \sin(2x)$$

Et bien moralité, on serait allé beaucoup plus vite et sans risque d'erreur si on avait cherché une solution sous la forme $x \mapsto A \cos(2x) + B \sin(2x)$... Pour la solution générale, on a donc

$$y' + y = 3 \cos 2x - \sin 2x \Leftrightarrow \text{il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } y(x) = \cos(2x) + \sin(2x) + \lambda e^{-x} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

2. UNICITÉ DE SOLUTIONS

Dans cette section, on n'utilisera PAS le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Exercice 6. On se donne I un intervalle non-vide de $\mathbb{R}$ et $x \in C^1(I)$ solution de $x' = x^3$. En vous inspirant du cours, montrer que si x s'annule quelque part sur I , alors elle est identiquement nulle.

Corrigé : Soit $t_0 \in I$ tel que $x(t_0) = 0$. On se donne $\delta > 0$ qui sera fixé plus tard. Pour $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \cap I$, on a

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t x'(s) ds = \int_{t_0}^t x^3(s) ds.$$

On définit alors $M_\delta := \max_{t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \cap I} |x(t)|$. Ainsi, pour $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \cap I$, on obtient

$$|x(t)| \leq \left| \int_{t_0}^t x^3(s) ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^t |x(s)|^3 ds \right| \leq |t - t_0| \cdot M_\delta^3 \leq \delta M_\delta^3.$$

Et du coup, en passant au sup, on obtient $M_\delta \leq \delta M_\delta^3$. Sachant que $x(t_0) = 0$ et que $x \in C^0(I)$, il existe $\delta_0 > 0$ tel que $|x(t)| = |x(t) - x(t_0)| < \frac{1}{2}$ pour tout $t \in [t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0] \cap I$. Donc, pour $\delta < \delta_0$, on a $M_\delta \leq \frac{1}{2}$. Et donc, pour $0 < \delta < \min\{\delta_0, 1\}$, on a

$$M_\delta \leq \delta M_\delta^2 \times M_\delta \leq \delta \frac{1}{4} M_\delta \leq \frac{1}{4} M_\delta \Rightarrow \frac{3}{4} M_\delta \leq 0,$$

or $M_\delta \geq 0$, donc $M_\delta = 0$ pour $\delta < \min\{\delta_0, 1\}$, et donc $x(t) = 0$ pour tout $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \cap I$ pour $\delta < \min\{\delta_0, 1\}$.

On pose $S := \{t \in I / x(t) = 0\} = x^{-1}(\{0\})$. Donc S est fermé dans I . De plus, si $t_0 \in S$, il suit de l'étape précédente qu'il existe $\delta > 0$ tel que $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[\cap I \subset S$: donc S est ouvert dans I . L'ensemble S étant à la fois ouvert et fermé dans I connexe (c'est un intervalle), alors $S = \emptyset$ ou bien $S = I$. Or par hypothèse S est non-vide, donc $S = I$ puis $x(t) = 0$ pour tout $t \in I$.

Exercice 7. On se donne I un intervalle non-vide de $\mathbb{R}$ et $x \in C^1(I)$ solution de $x' = x - x^2$. En vous inspirant du cours, montrer que si x s'annule quelque part sur I , alors elle est identiquement nulle. Montrez que si x prend la valeur 1 quelque part, alors elle est identiquement égale à 1.

Corrigé : Soit $t_0 \in I$ tel que $x(t_0) = 0$. On se donne $\delta > 0$ qui sera fixé plus tard. Pour $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \cap I$, on a

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t x'(s) ds = \int_{t_0}^t (x(s) - x^2(s)) ds.$$

On définit alors $M_\delta := \max_{t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \cap I} |x(t)|$. Ainsi, pour $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \cap I$, on obtient

$$|x(t)| \leq \left| \int_{t_0}^t (x(s) - x^2(s)) ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^t (|x(s)| + |x(s)|^2) ds \right| \leq |t - t_0| \cdot (M_\delta + M_\delta^2) \leq \delta (M_\delta + M_\delta^2).$$

Et du coup, en passant au sup, on obtient $M_\delta \leq \delta (M_\delta + M_\delta^2)$. Sachant que $x(t_0) = 0$ et que $x \in C^0(I)$, il existe $\delta_0 > 0$ tel que $|x(t)| = |x(t) - x(t_0)| < \frac{1}{2}$ pour tout $t \in [t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0] \cap I$. Donc, pour $\delta < \delta_0$, on a $M_\delta \leq \frac{1}{2}$. Et donc, pour $0 < \delta < \min\{\delta_0, \frac{1}{3}\}$, on a

$$M_\delta \leq \delta (1 + M_\delta) \times M_\delta \leq \delta \frac{3}{2} M_\delta \leq \frac{1}{2} M_\delta \Rightarrow \frac{1}{2} M_\delta \leq 0,$$

or $M_\delta \geq 0$, donc $M_\delta = 0$ pour $\delta < \min\{\delta_0, \frac{1}{3}\}$, et donc $x(t) = 0$ pour tout $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \cap I$ pour $\delta < \min\{\delta_0, 1/3\}$.

On pose $S := \{t \in I / x(t) = 0\} = x^{-1}(\{0\})$. Donc S est fermé dans I . De plus, si $t_0 \in S$, il suit de l'étape précédente qu'il existe $\delta > 0$ tel que $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[\cap I \subset S$: donc S est ouvert dans I . L'ensemble S étant à la fois ouvert et fermé dans I connexe (c'est un intervalle), alors $S = \emptyset$ ou bien $S = I$. Or par hypothèse S est non-vide, donc $S = I$ puis $x(t) = 0$ pour tout $t \in I$.

Si x vaut 1 en un point, on peut utiliser deux méthodes :

Méthode 1 : Posons $y(t) := 1 - x(-t)$ pour tout $t \in -I$. On a alors $y' = y - y^2$ et $y(-t_0) = 0$, il suit alors du cas précédent que $y(t) = 0$ pour tout $t \in -I$, puis $x(t) = 1$ pour tout $t \in I$.

Méthode 2 : Supposons qu'il existe $t_0 \in I$ tel que $x(t_0) = 1$. Pour $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \cap I$, on a donc

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_0) + \int_{t_0}^t x'(s) ds \\ x(t) - 1 &= \int_{t_0}^t ((x(s) - 1) - (x(s)^2 - 1)) ds \\ |x(t) - 1| &\leq \left| \int_{t_0}^t |x(s) - 1| + |x(s) - 1| \cdot (|x(s)| + 1) ds \right| \end{aligned}$$

On pose alors $M_\delta := \max_{t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \cap I} |x(t) - 1|$. En raisonnant comme au cas où x s'annule, on obtient

$$M_\delta \leq \delta(M_\delta + M_\delta(M_\delta + 2)) = \delta M_\delta(1 + M_\delta + 2).$$

Sachant que $x(t_0) = 0$ et que $x \in C^0(I)$, il existe $\delta_0 > 0$ tel que $|x(t)| = |x(t) - x(t_0)| < 1$ pour tout $t \in [t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0] \cap I$. Donc, pour $\delta < \delta_0$, on a $M_\delta \leq 1$. Et donc, pour $0 < \delta < \min\{\delta_0, \frac{1}{5}\}$, on a

$$M_\delta \leq 4\delta M_\delta \leq \frac{4}{5}M_\delta \Rightarrow \frac{1}{5}M_\delta \leq 0,$$

or $M_\delta \geq 0$, donc $M_\delta = 0$ pour $\delta < \min\{\delta_0, \frac{1}{5}\}$, et donc $x(t) = 1$ pour tout $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \cap I$ pour $\delta < \min\{\delta_0, 1/3\}$. En raisonnant comme plus haut, on obtient alors que $x \equiv 1$ sur I .

Exercice 8. Loi de reproduction logistique En utilisant l'exercice précédent, déterminez toutes les solutions de $x' = x(1 - x)$ et tracez-les. On pourra s'inspirer de la résolution de $x' = x^2$ dans le cours.

Corrigé : On se donne une solution $x \in C^1(I)$, I intervalle d'intérieur non vide, de $x' = x(1 - x)$.

1er Cas : La fonction x prend la valeur 0 quelque part. Il suit alors de l'exo précédent que $x \equiv 0$.

Voici une preuve alternative qui utilise le théorème de Cauchy-Lipschitz. On a $x' = f(x)$ avec $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tq $f(x) = x(1 - x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc f vérifie les hypothèses du th de Cauchy-Lipschitz. Supposons qu'il existe $t_0 \in I$ tel que $x(t_0) = 0$. Posons $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction nulle. Dans ce cas, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = x(1 - x) \\ x(t_0) = 0 \end{array} \right. \text{ dans } I \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta' = \theta(1 - \theta) \\ \theta(t_0) = 0 \end{array} \right. \text{ dans } \mathbb{R}$$

Les fonctions x et θ vérifient la même équation avec même condition initiale. On est dans le cadre du th de CL. Donc $x \equiv \theta$ sur $I \cap \mathbb{R}$, donc $x \equiv 0$ sur $I \cap \mathbb{R}$.

2ème Cas : La fonction x prend la valeur 1 quelque part. Il suit alors de l'exo précédent que $x \equiv 1$.

Voici une preuve alternative qui utilise le théorème de Cauchy-Lipschitz. On a $x' = f(x)$ avec $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tq $f(x) = x(1-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc f vérifie les hypothèses du th de Cauchy-Lipschitz. Supposons qu'il existe $t_1 \in I$ tel que $x(t_1) = 1$. Posons $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction nulle. Dans ce cas, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = x(1-x) \\ x(t_1) = 1 \end{array} \right. \text{ dans } I \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} g' = g(1-g) \\ g(t_1) = 1 \end{array} \right. \text{ dans } \mathbb{R}$$

Les fonctions x et g vérifient la même équation avec même condition initiale. On est dans le cadre du th de CL. Donc $x \equiv g$ sur $I \cap \mathbb{R}$, donc $x \equiv 1$ sur $I \cap \mathbb{R}$.

3ème Cas : La fonction x ne prend jamais les valeurs 0 et 1. On écrit alors

$$x' = x(1-x) \Rightarrow \frac{x'}{x(1-x)} = 1 \Rightarrow \frac{x'}{x} + \frac{x'}{1-x} = 1 \Rightarrow (\ln|x| - \ln|1-x|)' = 1$$

et comme I est un intervalle, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\ln \left| \frac{x}{1-x} \right| = t + C \Rightarrow \left| \frac{x}{1-x} \right| = e^{t+C} = e^C e^t \text{ for all } t \in I$$

La fonction $t \mapsto \frac{x(t)}{1-x(t)}$ est continue sur I et ne s'annule pas, donc il existe $\epsilon \in \{-1, +1\}$ tel que $\frac{x(t)}{1-x(t)} = \epsilon \left| \frac{x(t)}{1-x(t)} \right|$ pour tout $t \in I$. Ainsi, en posant $\lambda = \epsilon e^C \in \mathbb{R} - \{0\}$, on obtient

$$\frac{x(t)}{1-x(t)} = \lambda e^t \text{ pour tout } t \in I.$$

Comme $1-x(t) \neq 0$, on obtient donc $x(t) = \lambda e^t - x(t)\lambda e^t$ puis

$$(1 + \lambda e^t)x(t) = \lambda e^t \text{ pour tout } t \in I.$$

Comme le terme de droite est toujours non-nul, on a donc $1 + \lambda e^t \neq 0$ pour tout $t \in I$. Il faut alors distinguer deux cas selon le signe de λ :

Si $\lambda > 0$, alors $1 + \lambda e^t > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, donc pas de restriction sur I . Si $\lambda < 0$, alors $t \neq -\ln|\lambda|$ pour tout $t \in I$, et donc $I \subset]-\infty, -\ln|\lambda|[$ ou $I \subset]-\ln|\lambda|, +\infty[$. Ainsi :

$x(t) = \frac{\lambda e^t}{1 + \lambda e^t} = \frac{1}{1 + \lambda^{-1} e^{-t}} \quad \forall t \in I \text{ avec } \begin{cases} I \subset \mathbb{R} & \text{si } \lambda > 0 \\ I \subset]-\infty, -\ln \lambda [\text{ ou } I \subset]-\ln \lambda , +\infty[& \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$
--

Fixons $x_0 \in \mathbb{R}$ et étudions les solutions $x \in C^1(I)$, avec $0 \in I$, de

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = x(1-x) \\ x(0) = x_0 \end{array} \right. \text{ dans } I.$$

Si $x_0 = 0$ ou $x_0 = 1$, alors x est constante. Sinon, x n'atteint ni 0 ni 1 et il existe $\lambda \neq 0$ comme ci-dessus. En particulier, $\frac{x_0}{1-x_0} = \lambda$.

Cas 1 : $0 < x_0 < 1$. On a alors $\lambda > 0$ et $x(t) = \frac{x_0}{x_0 + (1-x_0)e^{-t}}$ pour tout $t \in I$.

Cas 2 : $x_0 > 1$. On a alors $\lambda < 0$, et plus précisément, $|\lambda| = -\lambda = \frac{x_0}{x_0-1} > 1$ et donc $-\ln|\lambda| < 0$. Comme $0 \in I$, il suit de l'étude de I que $I \subset]-\ln|\lambda|, +\infty[$ et on a

$$x(t) = \frac{x_0}{x_0 - (x_0 - 1)e^{-t}} \text{ pour tout } t \in I \subset]-\ln|\lambda|, +\infty[.$$

Cas 3 : $x_0 < 0$. On a alors $\lambda < 0$, et plus précisément, $|\lambda| = -\lambda = \frac{-x_0}{1-x_0} < 1$ et donc $-\ln|\lambda| > 0$. Comme $0 \in I$, il suit de l'étude de I que $I \subset]-\infty, -\ln|\lambda|$ et on a

$$x(t) = \frac{-x_0}{-x_0 - (1-x_0)e^{-t}} \text{ pour tout } t \in I \subset]-\infty, -\ln \frac{-x_0}{1-x_0}[.$$

Conclusion : Si $x_0 \geq 0$ (y compris dans les cas $x_0 = 0$ et $x_0 = 1$), alors x se prolonge à $[0, +\infty[$. On a alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 1$ si $x_0 > 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ si $x_0 = 0$.

Exercice 9. Reproduction avec prélèvement On se donne $c > 0$. Déterminez toutes les solutions de $x' = x(1-x) - c$ et tracez-les.

Esquisse du corrigé : Cette EDO est un modèle de reproduction de poissons ($x(1-x)$) en présence de pêche ($-c$). On a $x' = f(x)$ avec $f(x) = x(1-x) - c$ pour tout x , $f \in C^1(\mathbb{R})$, donc la théorie de Cauchy-Lipschitz s'applique. Tout dépend du signe du polynôme $x(1-x) - c = -x^2 + x - c$ dont le discriminant est $\Delta = 1 - 4c$

1er cas : $c < 1/4$, cad $\Delta > 0$, donc deux zéros

$$x_- = \frac{1 - \sqrt{1-4c}}{2} < x_+ = \frac{1 + \sqrt{1-4c}}{2}.$$

Il suit du théorème d'unicité que si x touche x_- ou x_+ , alors elle est constante. On suppose donc que x ne touche ni x_- ni x_+ . En faisant la décomposition en éléments simples

$$1 = \frac{x'}{x(1-x)-c} = \frac{x'}{-(x-x_-)(x-x_+)} = \frac{1}{x_+ - x_-} \left(-\frac{x'}{x-x_+} + \frac{x'}{x-x_-} \right) = \left(\frac{1}{x_+ - x_-} \ln \left| \frac{x-x_-}{x-x_+} \right| \right)'$$

on trouve l'expression de $x(t)$ en fonction de $t \in I$ et d'un paramètre $\lambda \neq 0$. Avec la condition initiale $x(0) = x_0$, on obtient que :

- Si $x_0 > x_-$, alors x se prolonge à $[0, +\infty[$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} x = x_+$.
- Si $x_0 = x_-$, alors $x \equiv x_-$.
- Si $x_0 < x_-$, alors x se prolonge à $[0, +\infty[$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} x = -\infty$.

Moralité : avec peu de pêche ($c < 1/4$), si on a une population initiale de poissons assez élevée ($x_0 > x_-$), alors la population se stabilise (en x_+). Mais si la population est trop faible ($x_0 < x_-$), alors il y a extinction en temps fini ($\exists T > 0$ tel que $x(T) = 0$).

2ème cas : $c = 1/4$, cad $\Delta = 0$, donc un zéro $x_c = \frac{1}{2}$. En particulier $x'(t) \leq 0$ pour tout t . Une étude rapide montre que si $x_0 \geq x_c$, alors x se prolonge sur $[0, +\infty[$ et a pour limite x_c . Si $x_0 < x_c$, alors idem, prolongement mais $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = -\infty$: extinction.

3ème cas : $c > 1/4$, cad $\Delta < 0$, donc aucun zéro et il existe $\epsilon > 0$ tel que $x(1-x) - c \leq -\epsilon$ pour tout x , donc $x'(t) \leq -\epsilon$ pour tout $t \in I$. On montre alors qu'il existe $T > 0$ tel que $x(T) = 0$: extinction en temps fini.

Moralité : un peu de pêche avec une population de poissons suffisante, c'est durable. EN revanche, trop de pêche, c'est l'extinction. C'était la minute du développement durable.

3. PREUVE DU THÉORÈME DE CAUCHY-LIPSCHITZ

Exercice 10. Le Théorème de Cauchy-Lipschitz dans un cas particulier.

Soit $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle qu'il existe $K > 0$ tel que

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y| \text{ pour tous } x, y \in \mathbb{R}.$$

On fixe $x_0 \in \mathbb{R}$ et on cherche à prouver l'existence de $\delta > 0$ et $x \in C^1([-\delta, \delta], \mathbb{R})$ tels que

$$(1) \quad \begin{cases} x'(t) = f(x(t)) & \text{pour tout } t \in [-\delta, \delta] \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Soit $\delta > 0$ qui sera fixé plus tard.

— Soit $x \in C^0([-\delta, \delta], \mathbb{R})$ une fonction continue. Montrez qu'on a l'équivalence :

$$\{x \text{ est } C^1 \text{ et résoud (1)}\} \Leftrightarrow \left\{ x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s)) ds \text{ pour tout } t \in [-\delta, \delta] \right\}.$$

On définit

$$\begin{aligned} T : C^0([-\delta, \delta], \mathbb{R}) &\rightarrow C^0([-\delta, \delta], \mathbb{R}) \\ x &\mapsto \left(t \mapsto x_0 + \int_0^t f(x(s)) ds \right) \end{aligned}$$

— Montrez que T est bien définie et que pour $\delta > 0$ bien choisi, T est contractante en munissant $C^0([-\delta, \delta], \mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

— Montrez l'existence et l'unicité de la solution de (1).

Solution :

- ($\Rightarrow$) Il suffit d'écrire que pour tout $t \in [-\delta, \delta]$, on a $x(t) = x(0) + \int_0^t x'(s) ds = x_0 + \int_0^t f(x(s)) ds$.
- ($\Leftarrow$) Soit $x \in C^0([-\delta, \delta], \mathbb{R})$ tel que $x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s)) ds$ pour tout $t \in [-\delta, \delta]$. Comme $f \circ x$ est continue, il vient que $t \mapsto \int_0^t f(x(s)) ds$ est C^1 et sa dérivée est $f \circ x$. Du coup, $x \in C^1$ et $x'(t) = 0 + f(x(t))$ pour tout t et $x(0) = x_0 + \int_0^0 \dots = x_0$.
- Comme $f \circ x$ est continu, alors $t \mapsto \int_0^t f(x(s)) ds$ est C^1 , et donc dans $C^0([-\delta, \delta], \mathbb{R})$. Donc T est bien définie. Pour $x, y \in C^0([-\delta, \delta], \mathbb{R})$ et $t \in [-\delta, \delta]$, on a

$$\begin{aligned} |(T(x) - T(y))[t]| &= \left| x_0 + \int_0^t f(x(s)) ds - \left(x_0 + \int_0^t f(y(s)) ds \right) \right| \\ &= \left| \int_0^t (f(x(s)) - f(y(s))) ds \right| \leq \left| \int_0^t |f(x(s)) - f(y(s))| ds \right| \\ &\leq K \left| \int_0^t |x(s) - y(s)| ds \right| \leq K \left| \int_0^t \|x - y\|_\infty ds \right| \\ &\leq K|t|\|x - y\|_\infty \leq K\delta\|x - y\|_\infty. \end{aligned}$$

En prenant le sup pour $t \in [-\delta, \delta]$, on obtient

$$\|T(x) - T(y)\|_\infty \leq K\delta\|x - y\|_\infty \text{ pour tous } x, y \in C^0([-\delta, \delta], \mathbb{R})$$

Ainsi, avec $0 < \delta < \frac{1}{K}$, l'application T est contractante.

- Comme $(C^0([-\delta, \delta], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est complet (c'est même un Banach), T admet un unique point fixe $x \in C^0([-\delta, \delta], \mathbb{R})$. D'après la première question, x est l'unique solution de (1).

□

3.1. Continuité par rapport aux paramètres.

Proposition 2. Soit (X, d) un espace métrique complet et soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique. Soit $T : E \times X \rightarrow X$ une fonction continue pour la topologie produit. On suppose qu'il existe $k \in [0, 1)$ tel que pour tout $\lambda \in E$, $T(\lambda, \cdot) : X \rightarrow X$ est k -Lipschitzienne. Pour tout $\lambda \in E$, il suit du Théorème de Picard qu'il existe un unique $x_\lambda \in X$ qui est un point fixe de $T(\lambda, \cdot)$. Alors l'application $\lambda \rightarrow x_\lambda$ de $E \rightarrow X$ est continue.

Exercice 11. Démontrez la Proposition 2. Avant de considérer le cas général, commencez par les cas suivants :

- $(E, \mathcal{T})$ est un espace métrique (E, d_E) et il existe $L > 0$ tel que

$$d(T(\lambda, x), T(\lambda', x')) \leq Ld_E(\lambda, \lambda') + kd(x, x')$$

pour tous $\lambda, \lambda' \in E$ et $x, x' \in X$.

- $(E, \mathcal{T})$ est un espace métrique.
- Cas général.

Corrigé : On se donne $\lambda, \mu \in E$. Comme $x_\lambda = T(\lambda, x_\lambda)$ et $x_\mu = T(\mu, x_\mu)$, on a

$$d(x_\lambda, x_\mu) = d(T(\lambda, x_\lambda), T(\mu, x_\mu)) \leq Ld_E(\lambda, \mu) + kd(x_\lambda, x_\mu)$$

et donc

$$(1 - k)d(x_\lambda, x_\mu) \leq Ld_E(\lambda, \mu) \Rightarrow d(x_\lambda, x_\mu) \leq \frac{L}{1 - k}d_E(\lambda, \mu)$$

et du coup, $\lambda \mapsto x_\lambda$ est Lipschitzienne, donc continue.

- $(E, \mathcal{T})$ est un espace métrique.

Corrigé : On note $f : E \rightarrow X$ l'application $f(\lambda) = x_\lambda$. Pour $\lambda, \mu \in E$, on a

$$\begin{aligned} d(x_\lambda, x_\mu) &= d(T(\lambda, x_\lambda), T(\mu, x_\mu)) \\ &\leq d(T(\lambda, x_\lambda), T(\lambda, x_\mu)) + d(T(\lambda, x_\mu), T(\mu, x_\mu)) \\ &\leq kd(x_\lambda, x_\mu) + d(T(\lambda, x_\mu), T(\mu, x_\mu)) \end{aligned}$$

puis

$$d(x_\lambda, x_\mu) \leq \frac{1}{1 - k}d(T(\lambda, x_\mu), T(\mu, x_\mu)).$$

On fixe $\lambda_0 \in E$ et en prenant $\mu = \lambda_0$ et $\lambda \in E$, on a donc

$$d(x_\lambda, x_{\lambda_0}) \leq \frac{1}{1 - k}d(T(\lambda, x_{\lambda_0}), T(\lambda_0, x_{\lambda_0})).$$

On se donne $\epsilon > 0$. Comme $T : E \times X \rightarrow X$ est continue en $(\lambda_0, x_{\lambda_0})$ avec la distance produit (ou topologie produit : on a montré que c'est la même chose), il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall (\lambda, x) \in E \times X, \{d_E(\lambda, \lambda_0) + d(x, x_{\lambda_0}) < \alpha \Rightarrow d(T(\lambda, x), T(\lambda_0, x_{\lambda_0})) < (1 - k)\epsilon\}$$

Et donc, en prenant

$$d_E(\lambda, \lambda_0) < \alpha \Rightarrow d(x_\lambda, x_{\lambda_0}) < \frac{1}{1 - k}(1 - k)\epsilon = \epsilon.$$

Et donc f est continue en λ_0 pour tout $\lambda_0 \in E$, puis continue sur E .

- (MFA) Cas général.

Corrigé : On va revenir à la définition. Soit V un ouvert de X : on va montrer que $U := f^{-1}(V)$ est un ouvert de E . Si $U = \emptyset$, c'est bon. Sinon, soit $\lambda_0 \in U$, de sorte que $x_{\lambda_0} = f(\lambda_0) \in V$. Comme précédemment, pour $\lambda \in E$, on a

$$d(x_\lambda, x_{\lambda_0}) \leq \frac{1}{1 - k}d(T(\lambda, x_{\lambda_0}), T(\lambda_0, x_{\lambda_0})). \quad (\star)$$

Comme $x_{\lambda_0} \in V$ ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(x_{\lambda_0}, r) \subset V$. Comme on a un point fixe, on a donc $T(\lambda_0, x_{\lambda_0}) = x_{\lambda_0} \in B(x_{\lambda_0}, (1 - k)r)$, donc $(\lambda_0, x_{\lambda_0}) \in T^{-1}(B(x_{\lambda_0}, (1 - k)r))$. Comme T est continue, alors $T^{-1}(B(x_{\lambda_0}, (1 - k)r))$ est ouvert, donc il existe Ω ouvert de E et Ω' ouvert de X tels que

$$(\lambda_0, x_{\lambda_0}) \in \Omega \times \Omega' \subset T^{-1}(B(x_{\lambda_0}, (1 - k)r)).$$

Donc pour $\lambda \in \Omega$, on a

$$T(\lambda, x_{\lambda_0}) \in B(x_{\lambda_0}, (1 - k)r) \Rightarrow d(T(\lambda, x_{\lambda_0}), T(\lambda_0, x_{\lambda_0})) < (1 - k)r,$$

puis avec $(\star)$, pour $\lambda \in \Omega$, on a $d(x_\lambda, x_{\lambda_0}) < r$, donc $f(\lambda) = x_\lambda \in B(x_{\lambda_0}, r) \subset V$ donc $\lambda \in f^{-1}(V)$.

On a donc montré que pour tout $\lambda_0 \in f^{-1}(V)$, il existe Ω ouvert de E tel que $\lambda_0 \in \Omega \subset f^{-1}(V)$. Donc $f^{-1}(V)$ est un ouvert de E pour tout V ouvert de X . Puis f est continue.

Exercice 12. On prend les notations de l'exercice 10. Montrez que l'application $(x_0, t) \mapsto x(t)$ est continue sur $\mathbb{R} \times [-\delta, \delta]$, quitte à réduire $\delta > 0$.

Solution : On se donne $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ et $t, s \in [-\delta, \delta]$. On se donne $x, y \in C^1([-\delta, \delta], \mathbb{R})$ les solutions des EDOs associées. Pour $\tau \in [-\delta, \delta]$, on a

$$|x(\tau) - y(\tau)| = \left| x_0 - y_0 + \int_0^\tau (f(x(u)) - f(y(u))) du \right| \leq |x_0 - y_0| + \delta K \|x - y\|_{C^0}.$$

En passant au sup sur $[-\delta, \delta]$, on obtient $\|x - y\|_{C^0} \leq |x_0 - y_0| + \delta K \|x - y\|_{C^0}$ puis

$$\|x - y\|_{C^0} \leq \frac{1}{1 - \delta K} |x_0 - y_0|.$$

Et donc,

$$|x(t) - y(s)| \leq |x(t) - x(s)| + |x(s) - y(s)| \leq |x(t) - x(s)| + \frac{1}{1 - \delta K} |x_0 - y_0|.$$

On fixe alors x_0 et t . On se donne $\epsilon > 0$. La fonction x étant continue en t , il existe $\alpha > 0$ tel que $|t - s| < \alpha$ implique $|x(t) - x(s)| < \epsilon/2$. Et donc,

$$\{|s - t| < \alpha \text{ et } |y_0 - x_0| < (1 - \delta K)\epsilon/2\} \Rightarrow |x(t) - y(s)| < \epsilon.$$

Et donc la fonction est continue au point (x_0, t) . Remarquons que $\alpha = \alpha(\epsilon, x, t) = \alpha(\epsilon, x_0, t)$ dépend du point (x_0, t) . Apriori, on n'a pas de continuité uniforme : pour cela, il faut soit restreindre x_0 à un borné, soit supposer que f est uniformément bornée.

Dans les 2 exercices suivants, utilisez le théorème de Cauchy-Lipschitz

Exercice 13. Résolvez l'équation différentielle $y' + y + xy^2 = 0$ à l'aide du changement de fonction $z = y^{-1}$.

Solution : On écrit $y' = -y - xy^2 = f(x, y)$, avec $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, donc on satisfait les hypothèses du th de Cauchy-Lipschitz. Soit $y \in C^1(I)$ une solution de l'EDO. Supposons que y s'annule en un point $x_0 \in I$: la solution nulle étant aussi solution et coïncidant avec y en x_0 , alors elles coïncident partout sur I et donc $y \equiv 0$.

On suppose maintenant que y ne s'annule nulle-part sur I et on pose $z := y^{-1} \in C^1(I)$ et ne s'annule pas. On a alors

$$z' = -\frac{y'}{y^2} = \frac{y + xy^2}{y^2} = y^{-1} + x = z + x.$$

C'est une équation linéaire qu'on résoud classiquement : il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $z(x) = -x - 1 + \lambda e^x$ pour tout $x \in I$. Comme $z(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, cela impose des contraintes sur I . Suivant les valeurs de λ , une étude de fonction donne :

- (1) Si $\lambda \leq 0$, $x \mapsto -x - 1 + \lambda e^x$ strictement décroissante et s'annule en un unique point, noté p_λ , et donc $I \subset]-\infty, p_\lambda[$ ou $I \subset]p_\lambda, +\infty[$.
- (2) Si $\lambda > 0$, alors $x \mapsto -x - 1 + \lambda e^x$ strictement décroissante sur $] -\infty, -\ln \lambda[$ et croissante sur $] -\ln \lambda, +\infty[$ et son minimum est donc $\ln \lambda$. On distingue alors encore 3 cas :
 - (a) Si $0 < \lambda < 1$, alors $\ln \lambda < 0$ et $x \mapsto -x - 1 + \lambda e^x$ s'annule exactement en deux points $p_\lambda < q_\lambda$, et donc $I \subset]-\infty, p_\lambda[$ ou $I \subset]p_\lambda, q_\lambda[$ ou $I \subset]q_\lambda, +\infty[$.

- (b) Si $\lambda = 1$, alors $-x - 1 + \lambda e^x > 0$ si $x \neq 0$, et ne s'annule qu'en 0, et donc $I \subset]-\infty, 0[$ ou $I \subset]0, +\infty[$.
- (c) Si $\lambda > 0$, alors $-x - 1 + \lambda e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et aucune restriction sur I .

Et on a ensuite $y(x) = \frac{1}{-x-1+\lambda e^x}$ pour tout $x \in I$. Réciproquement, ceci est bien solution de l'EDO d'origine.

Exercice 14. On cherche à résoudre l'équation différentielle $\dot{x} - tx = t^3 x^2$ avec la condition initiale $x(0) = 1/3$.

- (a) Montrez que $x(t) > 0$ pour tout $t \in I$.

Solution : On a $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ sur I avec $f(t, x) := tx + t^3 x^2$ pour tous $t, x \in \mathbb{R}$. Donc $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ et on est dans le cadre de Cauchy-Lipschitz. Supposons qu'il existe $t_0 \in I$ tel que $x(t_0) = 0$. Posons $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction nulle. Dans ce cas, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = tx + t^3 x^2 \\ x(t_0) = 0 \end{array} \right. \text{ dans } I \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta' = t\theta + t^3 \theta^2 \\ \theta(t_0) = 0 \end{array} \right. \text{ dans } \mathbb{R}$$

Les fonctions x et θ vérifient la même équation avec même condition initiale. On est dans le cadre du th de CL. Donc $x \equiv \theta$ sur $I \cap \mathbb{R}$, donc $x \equiv 0$ sur $I \cap \mathbb{R}$. Absurde car $x(0) = 1/3$.

Si x prend une valeur strictement négative, comme elle est continue et $x(0) = 1/3$, il suit du théorème des valeurs intermédiaires que x s'annule, ce qui est absurde. Donc $x(t) > 0$ pour tout $t \in I$.

- (b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$: on pose $y = x^\alpha$. Montrez que pour α bien choisi, y satisfait une équation différentielle linéaire simple

Solution : On a

$$\dot{y} = \alpha x^{\alpha-1} \dot{x} = \alpha x^{\alpha-1} (tx + t^3 x^2) = \alpha t x^\alpha + \alpha t^3 x^{1+\alpha}$$

Avec $\alpha = -1$, on obtient $\boxed{\dot{y} = -ty - t^3}$.

- (c) Déterminez une solution particulière de l'équation de y sous forme d'un polynôme du second degré. Résolvez l'équation de y .

Solution : On trouve que $t \mapsto y_p(t) := 2 - t^2$ est solution. Les solutions de l'équation homogène sont $t \mapsto \lambda e^{-t^2/2}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. Du coup il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\boxed{y(t) = 2 - t^2 + \lambda e^{-t^2/2}} \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

- (d) Déduisez-en l'expression de x . Quelle va être la forme de l'intervalle I ?

Solution : Sachant que $x(0) = 1/3$, on a $y(0) = 1/x(0) = 3$, donc $\lambda = 1$ et donc $y(t) = 2 - t^2 + e^{-t^2/2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Sachant que $y(t) > 0$ pour tout $t \in I$, une rapide étude montre qu'il existe un unique $a > 0$ tel que $2 - a^2 + e^{-a^2/2} = 0$, puis $I \subset]-a, a[$. Et donc

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2 - t^2 + e^{-t^2/2}} \text{ pour tout } t \in I \subset]-a, a[.}$$

En particulier, l'intervalle maximal est $I =]-a, a[$.

4. À PROPOS DE LA MÉTHODE DE RÉOLUTION DE $u' = au + b$ VUE EN COURS

Exercice 15. Soit $f \in C^1([0, +\infty))$ telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + f'(x)) = l \in \mathbb{R}$. Montrez que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$. On pourra commencer par le cas $l = 0$.

Solution : Quitte à changer f en $x \mapsto f(x) - l$, on peut supposer que $l = 0$. Posons $g(x) := e^x f(x)$ pour tout $x \geq 0$. On a donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g'(x)}{e^x} = 0.$$

Soit $\epsilon > 0$ et soit $A > 0$ tel que $|g'(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} e^x$ pour tout $x \geq A$. D'un coup, pour tout $x > A$, on a

$$|g(x)| = \left| g(A) + \int_A^x g'(t) dt \right| \leq |g(A)| + \epsilon \int_A^x e^t dt \leq |g(A)| + \frac{\epsilon}{2} e^x$$

Et donc,

$$|f(x)| = \left| \frac{g(x)}{e^x} \right| \leq \frac{|g(A)|}{e^x} + \frac{\epsilon}{2} \text{ pour tout } x > A.$$

Soit maintenant $B = B(A, \epsilon) > 0$ tel que pour tout $x > B$, on a $\frac{|g(A)|}{e^x} < \frac{\epsilon}{2}$. Ainsi, pour tout $x > \max\{A, B\}$, on a $|f(x)| < \epsilon$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, ce qui est le résultat recherché.

Exercice 16. Soient $u \in C^1(I)$, $a, b \in C^0(I)$ tels que $u'(t) \leq a(t)u(t) + b(t)$ pour tout $t \in I$. En vous inspirant de la résolution de $u' = au + b$ vue en cours, montrez que pour tout $t_0 \in I$ et tout $t \in I$, $t \geq t_0$, on a

$$u(t) \leq u(t_0)e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} + \int_{t_0}^t b(s)e^{\int_s^t a(v) dv} ds.$$

Solution : Soit $A(t) := \int_{t_0}^t a(s) ds$ pour tout $t \in I$, en particulier A est C^1 et $A' = a$. On a donc

$$(e^{-A(t)}u(t))' = e^{-A(t)}(u'(t) - a(t)u(t)) \leq b(t)e^{-A(t)} \text{ pour tout } t \in I.$$

En intégrant entre t_0 et $t \geq t_0$, on obtient

$$e^{-A(t)}u(t) - e^{-A(t_0)}u(t_0) \leq \int_{t_0}^t b(s)e^{-A(s)} ds$$

puis

$$u(t) \leq u(t_0)e^{-A(t)} + \int_{t_0}^t b(s)e^{A(t)-A(s)} ds$$

pour tout $t \geq t_0$, ce qui est le résultat attendu.

Exercice 17 (Lemme de Gronwall). Soient $u, a, c \in C^0([0, T])$, $T > 0$, tels $a \geq 0$ et

$$u(t) \leq c(t) + \int_0^t a(s)u(s) ds \text{ pour tout } t \in [0, T].$$

Montrez que

$$u(t) \leq c(t) + \int_0^t c(s)a(s)e^{\int_s^t a(v) dv} ds \text{ pour tout } t \in [0, T].$$

Solution : On pose $f(t) := \int_0^t a(s)u(s) ds$ pour tout $t \in [0, T]$. On a $f \in C^1([0, T])$ et

$$f'(t) = a(t)u(t) \leq a(t)c(t) + a(t)f(t) \text{ pour tout } t \in [0, T].$$

Il suit alors de l'exercice précédent que

$$f(t) \leq f(0)e^{\int_0^t a(s) ds} + \int_0^t a(s)c(s)e^{\int_s^t a(v) dv} ds \text{ pour tout } t \in [0, T].$$

Sachant que $f(0) = 0$, on a alors

$$u(t) \leq c(t) + f(t) \leq c(t) + \int_0^t a(s)c(s)e^{\int_s^t a(v) dv} ds,$$

ce qui prouve le résultat recherché.

5. DIVERS SI VOUS VOULEZ VOUS ENTRAÎNER

5.1. **Premier ordre.** Déterminez les solutions des ED suivantes :

(1)

$$\left\{ \begin{array}{l} y' + 2xy = 1 + 2x^2 \quad \text{sur } \mathbb{R}, \\ y(0) = 1 \end{array} \right\}$$

Corrigé :

- Equation sans second membre (SSM) : $y' + 2xy = 0 \Rightarrow y(x) = \lambda e^{-\int^x 2t dt} = \lambda e^{-x^2}$
- Sol particulière : on essaie un polynôme. Constant : $y_p(x) = a$, donc $y'_p + 2xy_p = 2ax \neq 1 + 2x^2$. Degré 1 : $y_p(x) = ax + b$, donc $y'_p + 2xy_p = a + 2x(ax + b) = 2ax^2 + 2bx + a = 1 + 2x^2$ lorsque $2a = 2$, $2b = 0$ et $a = 1$, donc $a = 1$ et $b = 0$, puis $y_p(x) = x$
- Solution générale : $y(x) = x + \lambda e^{-x^2}$ (il faut vérifier que ça marche bien). Condition initiale : $1 = y(0) = 0 + \lambda$ donc $\lambda = 1$ puis

$$\boxed{y(x) = x + e^{-x^2} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}}$$

(2)

$$\left\{ \begin{array}{l} y' - 3y = e^{3x} \quad \text{sur } \mathbb{R}, \\ y(1) = 1 \end{array} \right\}$$

Corrigé :

- Equation SSM : $y' - 3y = 0 \Rightarrow y(x) = \lambda e^{3x}$
- Sol particulière : on essaie un polynôme multiplié par une exponentielle. Constant : $y_p(x) = ae^{3x}$, donc $y' - 3y = 0 \neq e^{3x}$. Degré 1 : $y_p(x) = (ax + b)e^{3x}$, donc $y'_p - 3y_p = ae^{3x} + 3(ax + b)e^{3x} - 3(ax + b)e^{3x} = ae^{3x} = e^{3x}$ lorsque $a = 1$, puis $y_p(x) = xe^{3x}$ convient.
- Solution générale : $y(x) = xe^{3x} + \lambda e^{3x}$ (il faut vérifier que ça marche bien). Condition initiale : $1 = y(1) = 1 \times e^3 + \lambda e^3$ donc $\lambda = 1/e^3 - 1 = e^{-3} - 1$ puis

$$\boxed{y(x) = xe^{3x} + (e^{-3} - 1)e^{3x} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}}$$

(3)

$$\left\{ (x + \sin x)y' + (1 + \cos x)y = 2x + x \cos x + \sin x \quad \text{sur }]0, +\infty[\right\}$$

Corrigé :

— Equation SSM :

$$\begin{aligned} (x + \sin x)y' + (1 + \cos x)y &= 0 \Rightarrow y' = -\frac{1 + \cos x}{x + \sin x} = -\frac{(x + \sin x)'}{x + \sin x}y \\ \Rightarrow y(x) &= \lambda e^{-\int^x \frac{(t + \sin t)'}{t + \sin t} dt} = \lambda e^{-\ln |x + \sin x|} = \frac{\lambda}{|x + \sin x|} \end{aligned}$$

- Sol particulière : on essaie un polynôme. Constant : $y_p(x) = a$, donc $(x + \sin x)y'_p + (1 + \cos x)y_p = a(1 + \cos x) \neq 2x + x \cos x + \sin x$. Degré 1 : $y_p(x) = ax + b$, donc $(x + \sin x)y'_p + (1 + \cos x)y_p = a(x + \sin x) + (1 + \cos x)(ax + b) = 2ax + b + a \sin x + (ax + b) \cos x = 2x + x \cos x + \sin x$ lorsque $a = 1$ et $b = 0$, puis $y_p(x) = x$ convient.
- Solution générale : $y(x) = x + \frac{\lambda}{|x + \sin x|}$ (il faut vérifier que ça marche bien).

(4)

$$\left\{ \begin{array}{l} y' + y = e^x + e^{2x} \quad \text{sur } \mathbb{R}, \\ y(0) = 0 \end{array} \right\}$$

Corrigé :

- Equation SSM : $y' + y = 0 \Rightarrow y(x) = \lambda e^{-x}$
- Sol particulière : on va séparer le second membre en deux. On va chercher une solution y_1 de $y'_1 + y_1 = e^x$ et une solution y_2 de $y'_2 + y_2 = e^{2x}$.
 - Pour y_1 : on essaie $y_1(x) = ae^x$, ce qui donne $y'_1 + y_1 = 2ae^x = e^x$ avec $a = 1/2$. Donc $y_1(x) = \frac{1}{2}e^x$
 - Pour y_2 : on essaie $y_2(x) = ae^{2x}$, ce qui donne $y'_2 + y_2 = 3ae^{2x} = e^{2x}$ avec $a = 1/3$. Donc $y_2(x) = \frac{1}{3}e^{2x}$
- Une solution particulière du problème est alors $y_p(x) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{3}e^{2x}$
- Solution générale : $y(x) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{3}e^{2x} + \lambda e^{-x}$ (il faut vérifier que ça marche bien). Condition initiale $0 = y(0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \lambda$ donc $\lambda = -\frac{5}{6}$. Ainsi

$$y(x) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{3}e^{2x} - \frac{5}{6}e^{-x} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

(5)

$$\left\{ \begin{array}{l} y' + y = \sin x + \cos x \quad \text{sur } \mathbb{R}, \\ y(\pi) = 0 \end{array} \right\}$$

Corrigé :

- Equation SSM : $y' + y = 0 \Rightarrow y(x) = \lambda e^{-x}$
- Sol particulière. Soit on utilise l'expression de sin et cos sous forme de complexes $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ et $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$, et on se retrouve avec un second membre sous forme d'exponentielles. Soit on essaie $y_p(x) = a \sin x + b \cos x$: il vient alors $y'_p + y_p = (a + b) \cos x + (a - b) \sin x = \sin x + \cos x$ avec $a = 1$ et $b = 0$, donc $y_p(x) = \sin x$ (vérifiez, ça marche bien)
- Solution générale : $y(x) = \sin x + \lambda e^{-x}$. Condition initiale $0 = y(\pi) = \sin \pi + \lambda e^{-\pi} = \lambda e^{-\pi}$ donc $\lambda = 0$. Ainsi

$$y(x) = \sin x \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

(6)

$$\left\{ \begin{array}{l} y' + 3y = 6 \sin(3x) \quad \text{sur } \mathbb{R}, \\ y(0) = 1 \end{array} \right\}$$

Indication : solution particulière sous la forme $y_p(x) = a \cos(3x) + b \sin(3x)$.

- Equation SSM : $y' + 3y = 0 \Rightarrow y(x) = \lambda e^{-3x}$
- Sol particulière. On essaie $y_p(x) = a \cos(3x) + b \sin(3x)$: il vient alors $y'_p + 3y_p = (a + 3b) \cos(3x) + (a - 3b) \sin(3x) = 6 \sin(3x)$ avec $a + 3b = 6$ et $a - 3b = 0$ on a $b = 1$ et $a = 3$, donc $y_p(x) = 3 \cos(3x) + \sin(3x)$ (vérifiez, ça marche bien)
- Solution générale : $y(x) = 3 \cos(3x) + \sin(3x) + \lambda e^{-3x}$. Condition initiale $1 = y(0) = 3 + \lambda$ donc $\lambda = -2$. Ainsi

$$y(x) = 3 \cos(3x) + \sin(3x) - 2e^{-3x} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

5.2. Variation de la constante.

(1)

$$\left\{ y' + 2xy = \frac{e^{-x^2}}{x} \quad \text{sur }]0, +\infty[\right\}$$

- Equation sans second membre (SSM) : $y' + 2xy = 0 \Rightarrow y(x) = \lambda e^{-\int^x 2t dt} = \lambda e^{-x^2}$

— Sol particulière : $y_p(x) = \lambda(x)e^{-x^2}$, donc

$$y'_p + 2xy_p = \lambda'e^{-x^2} + \lambda \times (-2x) \times e^{-x^2} + 2x\lambda e^{-x^2} = \lambda'e^{-x^2} = \frac{e^{-x^2}}{x} \Rightarrow \lambda'(x) = \frac{1}{x}$$

et donc $\lambda(x) = \ln x$ convient, ce qui donne $y_p(x) = e^{-x^2} \ln x$

— Solution générale :

$$\boxed{y(x) = e^{-x^2} \ln x + \lambda e^{-x^2} \text{ pour tout } x > 0}$$

(2)

$$\left\{ y' + 2xy = xe^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{sur } \mathbb{R} \right\}$$

Corrigé :

— Equation sans second membre (SSM) : $y' + 2xy = 0 \Rightarrow y(x) = \lambda e^{-\int x^2 dt} = \lambda e^{-x^2}$

— Sol particulière : $y_p(x) = \lambda(x)e^{-x^2}$, donc

$$y'_p + 2xy_p = \lambda'e^{-x^2} = xe^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow \lambda'(x) = xe^{\frac{x^2}{2}} = \left(\frac{x^2}{2}\right)' e^{\frac{x^2}{2}}$$

et donc $\lambda(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$ convient, ce qui donne $y_p(x) = e^{-x^2} e^{\frac{x^2}{2}} = e^{-\frac{x^2}{2}}$

— Solution générale :

$$\boxed{y(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} + \lambda e^{-x^2} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}}$$

(3)

$$\left\{ (\sin x)y' - (\cos x)y = (\sin x)^2 \quad \text{sur }]0, \pi[\right\}$$

Corrigé :

— Equation SSM :

$$(\sin x)y' - (\cos x)y = 0 \Rightarrow y' = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{(\sin x)'}{\sin x} y$$

$$\Rightarrow y(x) = \lambda e^{\int x \frac{(\sin t)'}{\sin t} dt} = \lambda e^{\ln |\sin x|} = \lambda |\sin x| = \lambda \sin x \text{ sur }]0, \pi[$$

— Sol particulière : $y_p(x) = \lambda(x) \sin x$, puis

$$(\sin x)y' - (\cos x)y = (\sin x)(\lambda' \sin x + \lambda \cos x) - (\cos x) \times \lambda \sin x = (\sin x)^2 \lambda' = (\sin x)^2 \Rightarrow \lambda' = 1$$

donc $\lambda(x) = x$ convient, puis $y_p(x) = x \sin x$ convient

— Solution générale :

$$\boxed{y(x) = x \sin x + \lambda \sin x \text{ pour tout } x \in]0, \pi[}$$

5.3. Second ordre. Déterminez les solutions des ED suivantes :

(1)

$$\left\{ \begin{array}{l} y'' - y' - 2y = 3e^{-x} \quad \text{sur } \mathbb{R}, \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \end{array} \right\}$$

Solution : Equation homogène : $y'' - y' - 2y = 0$. Equation caractéristique $r^2 - r - 2 = 0$, les zéros sont -1 et 2 donc les solutions de l'équation homogènes sont $x \mapsto y_h(x) = \lambda e^{-x} + \mu e^{2x}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Solution particulière : $x \mapsto y_p(x) = axe^{-x}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On a donc $y''_p - y'_p - 2y_p = -3ae^{-x}$, donc avec $a = -1$ on a $x \mapsto y_p(x) = -xe^{-x}$ solution particulière.

Solution générale : On a $y(x) = -xe^{-x} + \lambda e^{-x} + \mu e^{2x}$ pour tout x . Avec les conditions initiales on a $0 = \lambda + \mu$ et $2 = -1 - \lambda + 2\mu$ donc $\lambda = -1$ et $\mu = 1$ puis $y(x) = (-1 - x)e^{-x} + e^{2x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(2)

$$\left\{ \begin{array}{l} y'' - 3y' + 2y = 6e^{-x} \quad \text{sur } \mathbb{R}, \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 0 \end{array} \right\}$$

Solution : Equation homogène : $y'' - 3y' + 2y = 0$. Equation caractéristique $r^2 - 3r + 2 = 0$, les zéros sont 1 et 2 donc les solutions de l'équation homogènes sont $x \mapsto y_h(x) = \lambda e^x + \mu e^{2x}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Solution particulière : $x \mapsto y_p(x) = ae^{-x}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On a donc $y_p'' - 3y_p' + 2y_p = 6ae^{-x}$, donc avec $a = 1$ on a $x \mapsto y_p(x) = e^{-x}$ solution particulière.

Solution générale : On a $y(x) = e^{-x} + \lambda e^x + \mu e^{2x}$ pour tout x . Avec les conditions initiales on a $2 = 1 + \lambda + \mu$ et $0 = -1 + \lambda + 2\mu$ donc $\lambda = 1$ et $\mu = 0$ puis $y(x) = e^{-x} + e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(3)

$$\left\{ \begin{array}{l} y'' - 4y' + 3y = 2e^x \quad \text{sur } \mathbb{R}, \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{array} \right\}$$

Solution : Equation homogène : $y'' - 4y' + 3y = 0$. Equation caractéristique $r^2 - 4r + 3 = 0$, les zéros sont 1 et 3 donc les solutions de l'équation homogènes sont $x \mapsto y_h(x) = \lambda e^x + \mu e^{3x}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Solution particulière : $x \mapsto y_p(x) = axe^x$ avec $a \in \mathbb{R}$. On a donc $y_p'' - 4y_p' + 3y_p = -2ae^x$, donc avec $a = -1$ on a $x \mapsto y_p(x) = -xe^x$ solution particulière.

Solution générale : On a $y(x) = -xe^x + \lambda e^x + \mu e^{3x}$ pour tout x . Avec les conditions initiales on a $1 = \lambda + \mu$ et $2 = -1 + \lambda + 3\mu$ donc $\lambda = 0$ et $\mu = 1$ puis $y(x) = -xe^x + e^{3x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 18. Résoudre les équations différentielles suivantes :

- a. $\dot{x} = x + t^2$ b. $y' \cos x + y \sin x = 1$ c. $y' + 2y = \sin x$
d. $xy' = y$ sur $]0, +\infty[$ e. $xy' = y + x^2$ sur $]0, +\infty[$.

Solution : a. $\dot{x} = x + t^2$. Equation homogène : $t \mapsto x_h(t) = \lambda e^t$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Solution particulière : $t \mapsto x_p(t) = at^2 + bt + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. On a donc $x_p' - x_p = -at^2 + (2a - b)t + b - c$, donc avec $a = -1$, $b = -2$ et $c = -2$, on a $t \mapsto x_p(t) = -t^2 - 2t - 2$ solution particulière.

Solution générale : $t \mapsto y(t) = -t^2 - 2t - 2 + \lambda e^t$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

b. $y' \cos x + y \sin x = 1$ sur $] -\pi/2, \pi/2[$. Equation homogène : $x \mapsto y_h(x) = \lambda \cos x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Solution particulière : plutôt que de faire la variation de la constante, essayons $x \mapsto y_p(x) = a \sin x$ avec $a \in \mathbb{R}$. On a donc $y_p' \cos x + y_p \sin x = a$ donc $y_p := \sin$ convient. Avec la variation de la constante, on écrit $x \mapsto y_p(x) = \lambda(x) \cos x$ et donc $y_p' \cos x + y_p \sin x = \lambda' \cos^2 x = 1$ donc $\lambda' = \frac{1}{\cos^2 x} = \tan^2 x$ donc $x \mapsto \lambda(x) = \tan(x)$ convient, puis $y_p(x) = \sin x$ pour tout x .

c. $y' + 2y = \sin x$ sur $]\mathbb{R}$. Equation homogène : $x \mapsto y_h(x) = \lambda e^{-2x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Solution particulière : plutôt que de faire la variation de la constante, essayons $x \mapsto y_p(x) = a \sin x + b \cos x$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. On a donc $y_p' + 2y_p = (a + 2b) \cos x + (2a - b) \sin x$ donc il faut $a + 2b = 0$ et $2a - b = 1$, et donc $y_p := \frac{2}{5} \sin x + \frac{1}{5} \cos x$ convient.

Solution générale : $x \mapsto y(x) = \frac{2}{5} \sin x + \frac{-1}{5} \cos x + \lambda e^{-2x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

d. $xy' = y$ sur $]0, +\infty[$. Equation homogène, donc directement il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y(x) = \lambda x$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.

e. $xy' = y + x^2$ sur $]0, +\infty[$

Equation homogène : $x \mapsto y_h(x) = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Solution particulière : Essayons un polynôme $y_p(x) := ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$:
 $xy'_p - y_p = x(2ax + b) - ax^2 - bx - c = ax^2 - c$ donc $c = 1$ et $a = 1$ puis $y_p(x) = x^2$ pour tout $x > 0$ convient. Variation de la constante $y_p(x) = \lambda(x)x$ pour tout $x > 0$.
 Donc $xy'_p - y_p = \lambda' x^2 = x^2$ donc $\lambda' = 1$ puis $\lambda(x) = x$ pour tout $x > 0$ convient, et donc $y_p(x) = x^2$ pour tout x convient. Bref : aucune n'a spécialement d'avantage par rapport à l'autre.

Solution générale : $y(x) = x^2 + \lambda x$ pour tout $x > 0$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.