

## TD1 : Révisions sur les EDO, question d'unicité et Théorème de Cauchy-Lipschitz

**Définition 1.** Soient  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  et  $(Z, d_Z)$  trois espaces métriques. Soit  $f \in C^0(X \times Y, Z)$  où  $X \times Y$  est muni de la distance produit. On dit que  $f$  est localement Lipschitzienne en la seconde variable si pour tout  $(x_0, y_0) \in X \times Y$ , il existe  $r > 0$  et  $K > 0$  tels que

$$d_Z(f(x, y), f(x, y')) \leq K d_Y(y, y') \text{ pour tout } x \in B_X(x_0, r) \text{ et } y, y' \in B_Y(y_0, r).$$

**Théorème 1.** [Théorème de Cauchy-Lipschitz] Soit  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et soit  $I$  un intervalle non-vide de  $\mathbb{R}$ . Soit  $f \in C^0(I \times U, \mathbb{R}^n)$ . On suppose que  $f$  est localement Lipschitzienne en la seconde variable. On fixe  $t_0 \in I$  et  $x_0 \in U$ . Alors il existe  $\delta > 0$  et  $x \in C^1([t_0 - \delta, t_0 + \delta] \cap I, U)$  tels que

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) & \text{dans } ]t_0 - \delta, t_0 + \delta[ \cap I \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

De plus, une telle solution est unique.

### 1. RÉVISIONS

#### 1.1. Equations homogènes à coefficients non-constants.

**Exercice 1.** Déterminez les solutions des ED suivantes :

$$y' = x^2 y, \quad \cos(x)y' + 3 \sin(x)y = 0 \text{ sur } ]-\pi/2, \pi/2[, \quad 4tx + x = 0 \text{ sur } [1, +\infty[;$$

$$\begin{aligned} & y' = (\cos x)y; \quad y' = (\cos x + \sin x)y \text{ avec } y(\pi/2) = 1 \\ & \left\{ \begin{array}{l} y' + \tan^2(x)y = 0 \\ y(0) = 3 \end{array} \right. \text{ sur } ]-\pi/2, \pi/2[, \quad \left\{ \begin{array}{l} y' = \ln(x)y \\ y(1) = 2 \end{array} \right. \text{ sur } ]0, +\infty[, \quad \left\{ \begin{array}{l} 2y' + 7e^x y = 0 \\ y(-1) = 0 \end{array} \right. \text{ sur } \mathbb{R}, \end{aligned}$$

#### 1.2. Equations avec second membre.

**Exercice 2.** Déterminez les solutions des équations suivantes :

- $y' + y = 1$
- $y' + 2y = 2x + 3;$
- $y' = 3x;$
- $y' + 2xy = x;$

**Exercice 3.** Déterminez les solutions des équations suivantes :

- $3y' + 4y = xe^{2x};$
- $y' = 3xe^{-x};$
- $y' + 4y = xe^{-4x}.$
- $y' - y = e^x;$

**Exercice 4.** Effectuez la résolution sur  $\mathbb{R}$  de

$$\left\{ \begin{array}{l} y' + y = 2e^x, \\ y(0) = 3 \end{array} \right\}; \quad \left\{ \begin{array}{l} 2y' + xy = x^2 + x + 2, \\ y(2) = 0 \end{array} \right\}; \quad \left\{ \begin{array}{l} 2y' - 5y = (x^2 + 4x - 1)e^{3x}, \\ y(1) = 3 \end{array} \right\}$$

#### 1.3. La méthode dite de "variation de la constante".

**Exercice 5.** Résolvez les équations suivantes avec la méthode de variation de la constante

$$y' - y = e^x \ln x; \quad y' + y = 3 \cos 2x - \sin 2x.$$

## 2. UNICITÉ DE SOLUTIONS

Dans cette section, on n'utilisera PAS le théorème de Cauchy-Lipschitz.

**Exercice 6.** On se donne  $I$  un intervalle non-vide de  $\mathbb{R}$  et  $x \in C^1(I)$  solution de  $x' = x^3$ . En vous inspirant du cours, montrer que si  $x$  s'annule quelque part sur  $I$ , alors elle est identiquement nulle.

**Exercice 7.** On se donne  $I$  un intervalle non-vide de  $\mathbb{R}$  et  $x \in C^1(I)$  solution de  $x' = x - x^2$ . En vous inspirant du cours, montrer que si  $x$  s'annule quelque part sur  $I$ , alors elle est identiquement nulle. Montrez que si  $x$  prend la valeur 1 quelque part, alors elle est identiquement égale à 1.

**Exercice 8. Loi de reproduction logistique** En utilisant l'exercice précédent, déterminez toutes les solutions de  $x' = x(1 - x)$  et tracez-les. On pourra s'inspirer de la résolution de  $x' = x^2$  dans le cours.

**Exercice 9. Reproduction avec prélèvement** On se donne  $c > 0$ . Déterminez toutes les solutions de  $x' = x(1 - x) - c$  et tracez-les.

## 3. PREUVE DU THÉORÈME DE CAUCHY-LIPSCHITZ

**Exercice 10. Le Théorème de Cauchy-Lipschitz dans un cas particulier.** Soit  $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  telle qu'il existe  $K > 0$  tel que

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y| \text{ pour tous } x, y \in \mathbb{R}.$$

On fixe  $x_0 \in \mathbb{R}$  et on cherche à prouver l'existence de  $\delta > 0$  et  $x \in C^1([-\delta, \delta], \mathbb{R})$  tels que

$$(1) \quad \begin{cases} x'(t) = f(x(t)) & \text{pour tout } t \in [-\delta, \delta] \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Soit  $\delta > 0$  qui sera fixé plus tard.

— Soit  $x \in C^0([-\delta, \delta], \mathbb{R})$  une fonction continue. Montrez qu'on a l'équivalence :

$$\{x \text{ est } C^1 \text{ et résoud (1)}\} \Leftrightarrow \left\{ x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s)) ds \text{ pour tout } t \in [-\delta, \delta] \right\}.$$

On définit

$$\begin{aligned} T : C^0([-\delta, \delta], \mathbb{R}) &\rightarrow C^0([-\delta, \delta], \mathbb{R}) \\ x &\mapsto \left( t \mapsto x_0 + \int_0^t f(x(s)) ds \right) \end{aligned}$$

- Montrez que  $T$  est bien définie et que pour  $\delta > 0$  bien choisi,  $T$  est contractante en munissant  $C^0([-\delta, \delta], \mathbb{R})$  de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ .
- Montrez l'existence et l'unicité de la solution de (1).

## 3.1. Continuité par rapport aux paramètres.

**Proposition 2.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique complet et soit  $(E, \mathcal{T})$  un espace topologique. Soit  $T : E \times X \rightarrow X$  une fonction continue pour la topologie produit. On suppose qu'il existe  $k \in [0, 1)$  tel que pour tout  $\lambda \in E$ ,  $T(\lambda, \cdot) : X \rightarrow X$  est  $k$ -Lipschitzienne. Pour tout  $\lambda \in E$ , il suit du Théorème de Picard qu'il existe un unique  $x_\lambda \in X$  qui est un point fixe de  $T(\lambda, \cdot)$ . Alors l'application  $\lambda \rightarrow x_\lambda$  de  $E \rightarrow X$  est continue.

**Exercice 11.** Démontrez la Proposition 2. Avant de considérer le cas général, commencez par les cas suivants :

—  $(E, \mathcal{T})$  est un espace métrique  $(E, d_E)$  et il existe  $L > 0$  tel que

$$d(T(\lambda, x), T(\lambda', x')) \leq Ld_E(\lambda, \lambda') + kd(x, x')$$

pour tous  $\lambda, \lambda' \in E$  et  $x, x' \in X$ .

—  $(E, \mathcal{T})$  est un espace métrique.

— Cas général.

**Exercice 12.** On prend les notations de l'exercice 6. Montrez que l'application  $(x_0, t) \mapsto x(t)$  est continue sur  $\mathbb{R} \times [-\delta, \delta]$ , quitte à réduire  $\delta > 0$ .

Dans les 2 exercices suivants, utilisez le théorème de Cauchy-Lipschitz

**Exercice 13.** Résolvez l'équation différentielle  $y' + y + xy^2 = 0$  à l'aide du changement de fonction  $z = y^{-1}$ .

**Exercice 14.** On cherche à résoudre l'équation différentielle  $\dot{x} - tx = t^3 x^2$  avec la condition initiale  $x(0) = 1/3$ . On admet que  $x(t) > 0$  pour tout  $t \in I$  intervalle de définition.

(a) Montrez que  $x(t) > 0$  pour tout  $t \in I$ .

(b) Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  : on pose  $y = x^\alpha$ . Montrez que pour  $\alpha$  bien choisi,  $y$  satisfait une équation différentielle linéaire simple

(c) Déterminez une solution particulière de l'équation de  $y$  sous forme d'un polynôme du second degré. Résolvez l'équation de  $y$ .

(d) Déduisez-en l'expression de  $x$ . Quelle va être la forme de l'intervalle  $I$ ?

#### 4. À PROPOS DE LA MÉTHODE DE RÉOLUTION DE $u' = au + b$ VUE EN COURS

**Exercice 15.** Soit  $f \in C^1([0, +\infty))$  telle que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + f'(x)) = l \in \mathbb{R}$ . Montrez que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ . On pourra commencer par le cas  $l = 0$ .

**Exercice 16.** Soient  $u \in C^1(I)$ ,  $a, b \in C^0(I)$  tels que  $u'(t) \leq a(t)u(t) + b(t)$  pour tout  $t \in I$ . En vous inspirant de la résolution de  $u = au + b$  vue en cours, montrez que pour tout  $t_0 \in I$  et tout  $t \in I$ ,  $t \geq t_0$ , on a

$$u(t) \leq u(t_0)e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} + \int_{t_0}^t b(s)e^{\int_s^t a(v) dv} ds.$$

**Exercice 17** (Lemme de Gronwall). Soient  $u, a, c \in C^0([0, T])$ ,  $T > 0$ , tels  $a \geq 0$  et

$$u(t) \leq c(t) + \int_0^t a(s)u(s) ds \text{ pour tout } t \in [0, T].$$

Montrez que

$$u(t) \leq c(t) + \int_0^t c(s)a(s)e^{\int_s^t a(v) dv} ds \text{ pour tout } t \in [0, T].$$

#### 5. DIVERS SI VOUS VOULEZ VOUS ENTRAÎNER

5.1. **Premier ordre.** Déterminez les solutions des ED suivantes :

(1)

$$\left\{ \begin{array}{l} y' + 2xy = 1 + 2x^2 \quad \text{sur } \mathbb{R}, \\ y(0) = 1 \end{array} \right\}$$

(2)

$$\left\{ \begin{array}{l} y' - 3y = e^{3x} \quad \text{sur } \mathbb{R}, \\ y(1) = 1 \end{array} \right\}$$

(3)

$$\left\{ \begin{array}{l} (x + \sin x)y' + (1 + \cos x)y = 2x + x \cos x + \sin x \\ \text{sur } ]0, +\infty[ \end{array} \right\}$$

(4)

$$\left\{ \begin{array}{l} y' + y = e^x + e^{2x} \\ y(0) = 0 \end{array} \right\} \quad \text{sur } \mathbb{R},$$

(5)

$$\left\{ \begin{array}{l} y' + y = \sin x + \cos x \\ y(\pi) = 0 \end{array} \right\} \quad \text{sur } \mathbb{R},$$

(6)

$$\left\{ \begin{array}{l} y' + 3y = 6 \sin(3x) \\ y(0) = 1 \end{array} \right\} \quad \text{sur } \mathbb{R},$$

### 5.2. Variation de la constante.

(1)

$$\left\{ y' + 2xy = \frac{e^{-x^2}}{x} \quad \text{sur } ]0, +\infty[ \right\}$$

(2)

$$\left\{ y' + 2xy = xe^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{sur } \mathbb{R} \right\}$$

(3)

$$\left\{ (\sin x)y' - (\cos x)y = (\sin x)^2 \quad \text{sur } ]0, \pi[ \right\}$$

### 5.3. Second ordre. Déterminez les solutions des ED suivantes :

(1)

$$\left\{ \begin{array}{l} y'' - y' - 2y = 3e^{-x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \end{array} \right\} \quad \text{sur } \mathbb{R},$$

(2)

$$\left\{ \begin{array}{l} y'' - 3y' + 2y = 6e^{-x} \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 0 \end{array} \right\} \quad \text{sur } \mathbb{R}, \quad \left\{ \begin{array}{l} y'' - 4y' + 3y = 2e^x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{array} \right\} \quad \text{sur } \mathbb{R},$$

### Exercice 18. Résoudre les équations différentielles suivantes :

**a.**  $\dot{x} = x + t^2$

**b.**  $y' \cos x + y \sin x = 1$

**c.**  $y' + 2y = \sin x$

**d.**  $xy' = y$  sur  $]0, +\infty[$

**e.**  $xy' = y + x^2$  sur  $]0, +\infty[$ .