

## Corrigé du TD2 : Solutions maximales

### 1. ZÉROS ISOLÉS

**Exercice 1.** Soit  $f \in C^1(\mathbb{R})$  et soit  $y \in C^2(I)$ ,  $I$  intervalle, une solution de  $y'' = f(y)$ . Montrez que si  $y \neq 0$ , alors ses zéros sont isolés.

*Solution :* Comme  $f \in C^1(\mathbb{R})$ , on est dans le cadre du théorème de Cauchy-Lipschitz. Soit  $x_0 \in I$  un zéro éventuel de  $y$ . Comme  $y$  est  $C^2$ , le DL2 en  $x_0$  existe et

$$y(x) = y'(x_0)(x - x_0) + y''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2} + o((x - x_0)^2) \text{ pour } x \rightarrow x_0.$$

Supposons que  $y'(x_0) \neq 0$  et posons  $\alpha := \frac{|y'(x_0)|}{2}$ . On a alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|y(x)|}{|x - x_0|} = |y'(x_0)| > \alpha$ . Il existe donc  $\delta > 0$  tel que  $\frac{|y(x)|}{|x - x_0|} > \alpha$  pour tout  $x \in I \cap ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ - \{x_0\}$  et donc  $y(x) \neq 0$  pour  $x \in I \cap ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ - \{x_0\}$ . Donc  $x_0$  est un zéro isolé.

Supposons que  $y'(x_0) = 0$  et  $y''(x_0) \neq 0$  et posons  $\alpha := \frac{|y''(x_0)|}{4}$ . On a alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|y(x)|}{|x - x_0|^2} = \frac{|y''(x_0)|}{2} > \alpha$ . Il existe donc  $\delta > 0$  tel que  $\frac{|y(x)|}{|x - x_0|^2} > \alpha$  pour tout  $x \in I \cap ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ - \{x_0\}$  et donc  $y(x) \neq 0$  pour  $x \in I \cap ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ - \{x_0\}$ . Donc  $x_0$  est un zéro isolé.

Supposons maintenant que  $y'(x_0) = y''(x_0) = 0$ . Comme  $y'' = f(y)$ , on a  $0 = y''(x_0) = f(y(x_0)) = f(0)$ . Posons  $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction nulle. Dans ce cas, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} y'' = f(y) \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \end{array} \right. \text{ dans } I \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta' = 0 = f(0) = f(\theta) \\ \theta(x_0) = 0 \\ \theta'(x_0) = 0 \end{array} \right. \text{ dans } \mathbb{R}$$

Les fonctions  $y$  et  $\theta$  vérifient la même équation avec même condition initiale. On est dans le cadre du th de CL. Donc  $y \equiv \theta$  sur  $I \cap \mathbb{R}$ , donc  $y \equiv 0$  sur  $I$ , ce qui contredit l'hypothèse sur  $y$ .

*Conclusion :* tout zéro éventuel de  $y$  est isolé.

### 2. SOLUTIONS MAXIMALES

**Exercice 2.** Déterminez les solutions maximales de  $y' = e^{x+y}$ .

*Solution :* La fonction  $(x, y) \mapsto e^{x+y}$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ , donc on est dans le cadre du th de Cauchy-Lipschitz. Soit  $y \in C^1(I)$  une solution maximale. On a alors  $(e^{-y})' = -y'e^{-y} = -e^x$  sur  $I$ , donc il existe  $K \in \mathbb{R}$  tel que  $e^{-y} = K - e^x$  pour tout  $x \in I$ . Et donc  $K - e^x > 0$  pour tout  $x \in I$ , ce qui impose  $K > 0$ ,  $x < \ln K$  et  $y(x) = -\ln(K - e^x)$  pour tout  $x \in I \subset ]-\infty, \ln K[$ . La solution étant maximale, on a égalité des intervalles. Réciproquement, ce type de fonction est solution de l'équation. Ainsi

$$\boxed{\{y \in C^2(I) \text{ sol max de } y' = e^{x+y}\}} \Leftrightarrow \{\exists K > 0 \text{ t.q. } y(x) = -\ln(K - e^x) \text{ pour tout } x \in I = ]-\infty, \ln K[ \}$$

**Exercice 3.** Déterminez toutes les solutions maximales de  $y' = 2\sqrt{|y|}$ .

*Solution :* Attention, ici, on n'est pas dans le cadre de Cauchy-Lipschitz car  $z \mapsto 2\sqrt{|z|}$  n'est pas Lipschitzienne au voisinage de 0. Soit  $I$  intervalle d'intérieur non vide de  $\mathbb{R}$  et soit  $y \in C^1(I)$  solution de  $y' = 2\sqrt{|y|}$ .

Supposons que  $y(x) > 0$  pour tout  $x \in I$ . On a alors  $(\sqrt{y})' = \frac{y'}{2\sqrt{y}} = 1$  sur  $I$  intervalle donc il existe  $K \in \mathbb{R}$  tel que  $y(x) = (x - K)^2$  pour tout  $x \in I \subset ]K, +\infty[$ .

Supposons que  $y(x) < 0$  pour tout  $x \in I$ . De même, il existe  $L \in \mathbb{R}$  tel que  $y(x) = -(x - L)^2$  pour tout  $x \in I \subset ]-\infty, L[$ .

Supposons que  $y$  s'annule sur  $I$ . Comme  $y' \geq 0$ ,  $y$  est croissante donc il existe  $-\infty \leq x_0 \leq y_0 \leq +\infty$  tels que  $y(x) < 0$  sur  $] -\infty, x_0[ \cap I$  (éventuellement vide),  $y(x) = 0$  sur  $[x_0, y_0] \cap I$  et  $y(x) > 0$  sur  $]y_0, +\infty[ \cap I$  (éventuellement vide). D'après les deux cas précédents, il existe alors  $K, L \in \mathbb{R}$  tels que  $y(x) = -(x - L)^2$  pour tout  $x \in ]-\infty, x_0[ \cap I$  et  $y(x) = (x - K)^2$  pour tout  $x \in ]y_0, +\infty[ \cap I$ . La continuité en  $x_0$  et  $y_0$  donne alors  $L = x_0$  et  $K = y_0$  s'ils sont finis.

Remarquons enfin que pour  $L \leq K$ , les fonctions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_L^{(1)} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} -(x - L)^2 & \text{si } x \leq L \\ 0 & \text{si } x \geq L \end{cases} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{L,K}^{(2)} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} -(x - L)^2 & \text{si } x \leq L \\ 0 & \text{si } L \leq x \leq K \\ (x - K)^2 & \text{si } x \geq K \end{cases} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_K^{(3)} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq K \\ (x - K)^2 & \text{si } x \geq K \end{cases} \end{array} \right\}$$

sont toutes solutions de  $y' = 2\sqrt{|y|}$ . De plus, il suit de l'étude précédente que chaque solution se prolonge en une de ces 3 fonctions ou bien la fonction nulle. Ce sont donc les solutions maximales de  $y' = 2\sqrt{|y|}$ . Remarquons que pour  $L \leq 0 \leq K$ , les fonctions  $y_L^{(1)}$ ,  $y_{L,K}^{(2)}$ ,  $y_K^{(3)}$  et la fonction nulle s'annulent toutes en 0 sans être identiques.

**Exercice 4.** On cherche à déterminer les solutions maximales strictement positives de l'équation

$$yy'' = (1 - (y')^2), y > 0.$$

Soit donc  $y \in C^2(I)$  une telle solution maximale.

- (1) On suppose qu'il existe  $x_0 \in I$  tel que  $y'(x_0) = 1$ . Montrez que dans ce cas,  $y(x) = y(x_0) + x - x_0$  pour tout  $x \in I = ]x_0 - y(x_0), +\infty[$ .
- (2) Traitez de même le cas  $y'(x_0) = -1$ .
- (3) On suppose maintenant que  $y'(x)^2 \neq 1$  pour tout  $x \in I$ . Dérivez alors  $\ln |(y')^2 - 1|$  et déduisez-en une équation du premier ordre vérifiée par  $y$ . Déduisez-en  $y$ .

*Solution :* Remarquons que  $y'' = f(y, y')$  avec  $f(y, z) := \frac{1-z^2}{y}$  et donc  $f \in C^1([0, +\infty[ \times \mathbb{R})$ , donc on est dans le cadre de Cauchy-Lipschitz.

(a). Supposons qu'il existe  $x_0 \in I$  tel que  $y'(x_0) = 1$ . Dans ce cas la fonction  $x \mapsto \varphi(x) := y(x_0) + x - x_0$  est solution de  $\varphi'' = f(\varphi, \varphi')$  sur  $]x_0 - y(x_0), +\infty[$  (il faut  $\varphi(x) > 0$ ). De plus  $\varphi(x_0) = y(x_0)$  et  $\varphi'(x_0) = 1 = y'(x_0)$ . Ce sont donc les solutions de la même EDO avec les mêmes conditions initiales, donc  $y = \varphi$  sur  $I \cap ]x_0 - y(x_0), +\infty[$ . Les deux solutions étant maximales, on a  $I = ]x_0 - y(x_0), +\infty[$ .

(b). S'il existe  $x_0 \in I$  tel que  $y'(x_0) = -1$ , alors de la même manière, on obtient que  $y(x) = y(x_0) - (x - x_0)$  pour tout  $x \in I = ]-\infty, x_0 + y(x_0)[$ .

(c) Supposons maintenant que  $y'(x)^2 \neq 1$  pour tout  $x \in I$ . Alors (la fonction est bien dérivable) :

$$(\ln |(y')^2 - 1|)' = \frac{2y''y'}{(y')^2 - 1} = -\frac{2y'}{y} = (-\ln |y^2|)' \text{ sur } I,$$

or  $I$  intervalle donc il existe  $C \in \mathbb{R}$  tel que

$$\ln |(y')^2 - 1| = C - \ln |y^2| \text{ sur } I \rightarrow |(y')^2 - 1|y^2 = e^C \text{ sur } I.$$

Comme  $(y')^2 - 1$  est continue et ne s'annule pas, elle est de signe constant donc il existe  $\lambda \neq 0$  tel que  $y^2((y')^2 - 1) = -\lambda$  sur  $I$ , en particulier  $y$  ne s'annule pas sur  $I$ . En posant  $z = y^2$ , on obtient  $(z')^2 = 4y^2(y')^2 = 4(-\lambda + z)$  ce qui impose  $y^2 = z > \lambda$  sur  $I$ , puis, car

**Exercice 5** (Caractère ouvert des intervalles maximaux). On se donne  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction continue Lipschitzienne en la seconde variable. On se donne  $x \in C^1(I)$ , où  $I$  est un intervalle d'intérieur non vide, solution de  $x'(t) = f(t, x(t))$  pour tout  $t \in I$ .

**A.** On suppose que  $I = [a, b]$  avec  $-\infty < a < b < +\infty$ .

- (1) Montrez qu'il existe  $\epsilon \in ]0, b - a[$  et  $y \in C^1([b - \epsilon, b + \epsilon], \mathbb{R}^n)$  telle que  $y'(t) = f(t, y(t))$  pour tout  $t \in [b - \epsilon, b + \epsilon]$  et  $y(b) = x(b)$ .

*Solution :* Le th de Cauchy-Lipschitz avec condition initiale  $y(b) = x(b)$  donne une solution sur l'intervalle  $[b - \delta, b + \delta]$ . Avec  $\epsilon < \min\{\delta, b - a\}$ , on a le résultat attendu.

- (2) Posez  $z := x - y$  sur  $[b - \epsilon, b]$ . En écrivant  $z(t) = z(b) + \int_b^t \dots$  pour  $t \in [b - \epsilon, b]$  et en raisonnant comme au TD1, montrez que  $z(t) = 0$  pour tout  $t \in [b - \epsilon, b]$ .

*Solution :* Les fonctions  $x$  et  $y$  sont  $C^1([b - \epsilon, b], \mathbb{R}^n)$  et solutions de la même EDO avec même condition initiale en  $b$ , donc elles sont identiques sur  $[b - \epsilon, b]$ .

- (3) Montrez que  $y$  peut se prolonger à  $[a, b + \epsilon]$ .

*Solution :* Posons  $\tilde{x}(t) = x(t)$  si  $t \in [a, b]$  et  $\tilde{x} = y(t)$  si  $t \in ]b, b + \epsilon]$ . Il suit de la question précédente que  $\tilde{x} = y(t)$  si  $t \in [b - \epsilon, b + \epsilon]$ . Pour  $t \in [a, b]$ ,  $\tilde{x}$  est dérivable en  $t$  et  $\tilde{x}'(t) = x'(t) = f(t, x(t)) = f(t, \tilde{x}(t))$ . Pour  $t \in ]b, b + \epsilon]$ ,  $\tilde{x}$  est dérivable en  $t$  et  $\tilde{x}'(t) = y'(t) = f(t, y(t)) = f(t, \tilde{x}(t))$ . Au point  $b$ , on remarque que  $\tilde{x}(t) = y(t)$  sur  $]b - \epsilon, b + \epsilon[$ , donc  $\tilde{x}'(b) = y'(b) = f(b, y(b)) = f(b, \tilde{x}(b))$ . Finalement,  $\tilde{x}$  est dérivable sur  $[a, b + \epsilon]$  (donc continue) et  $\tilde{x}'(t) = f(t, \tilde{x}(t))$  pour tout  $t \in [a, b + \epsilon]$ , donc  $\tilde{x}$  est  $C^1$  et solution de l'EDO.

**B.** Montrez que si  $x$  est une solution maximale (on admet donc que cela existe), alors  $I$  est un intervalle ouvert.

*Solution :* Supposons que  $I = [a, b]$ . On a vu en **A.** qu'on peut alors prolonger  $x$  à  $[a, b + \epsilon]$  : absurde car l'intervalle est maximal. C'est le même raisonnement si  $I = ]a, b]$ . Dans le cas  $I = [a, b[$ , on montre de la même façon qu'on peut prolonger  $x$  à  $[a - \epsilon, b]$  pour  $\epsilon > 0$  petit : là encore c'est absurde car l'intervalle est maximal. Finalement,  $I = ]a, b[$  est un intervalle ouvert.

### 3. UN CAS DE SOLUTIONS MAXIMALE PÉRIODIQUE

**Exercice 6** (Un lemme utile). On se donne  $f : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable telle que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = l$  existe. Montrez que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  existe et vaut  $l$ .

*Solution :* Soit  $\epsilon > 0$ . Il existe  $A > 0$  tel que  $|f'(x) - l| < \epsilon$  pour tout  $x \geq A$ . Il suit de l'égalité des accroissements finis que pour tout  $x \geq A$ , il existe  $c_x \in [A, x]$  tel que  $f(x) - f(A) = f'(c_x)(x - A)$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x)}{x} - l \right| &= \left| \frac{f(A) + f'(c_x)(x - A) - lx}{x} \right| = \left| \frac{f(A) + (f'(c_x) - l)(x - A) - lA}{x} \right| \\ &\leq \frac{|f(A) - lA|}{x} + \frac{\epsilon}{2} \left| \frac{(x - A)}{x} \right| \leq \frac{|f(A) - lA|}{x} + \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

Soit  $B > 0$  tel que  $\frac{|f(A) - lA|}{x} < \frac{\epsilon}{2}$  pour tout  $x > B$ . Pour  $x > \max\{A, B\}$ , on a donc  $\left| \frac{f(x)}{x} - l \right| < \epsilon$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  existe et vaut  $l$ .

**Exercice 7.** On considère ici une solution maximale  $y \in C^2(I)$  de  $(E) : y'' + y + y^3 = 0$ .

- (1) Montrez qu'il existe  $C \in \mathbb{R}$  tel que  $(y')^2 + y^2 + \frac{y^4}{2} = C$  sur  $I$ .

*Solution* : REMARQUE PRELIMINAIRE :  $z \mapsto -z - z^3$  est  $C^1$ , on est donc dans le cadre de Cauchy-Lipschitz. La dérivée du membre de gauche est  $2y'y'' + 2yy' + 2y^3y' = y'(y'' + y + y^3) = 0$  sur  $I$  intervalle, donc le membre de gauche est constant sur  $I$ .

- (2) Montrez que  $y$ ,  $y'$  et  $y''$  sont bornées sur  $I$ .

*Solution* : Tous les termes étant positifs, on a  $(y')^2 \leq (y')^2 + y^2 + \frac{y^4}{2} = C$  et  $y^2 \leq (y')^2 + y^2 + \frac{y^4}{2} = C$ , donc  $C \geq 0$  et  $|y(x)| \leq \sqrt{C}$  et  $|y'(x)| \leq \sqrt{C}$  pour tout  $x \in I$ . Comme  $y'' + y + y^3 = 0$ , il vient  $|y''(x)| \leq \sqrt{C} + (\sqrt{C})^3$ .

- (3) Montrez que  $I = \mathbb{R}$ .

*Solution* : Si  $I = ]a, b[$  avec  $b < \infty$ , il suit du théorème d'explosion que  $(y(t), y'(t))$  sort de tout compact lorsque  $t \rightarrow b$ . Or  $\|(y(t), y'(t))\|_1 \leq 2\sqrt{C}$  pour tout  $t$ , donc reste dans la boule  $B_1((0, 0), 2\sqrt{C})$ . Donc pas d'explosion et  $b = +\infty$ . De même  $a = -\infty$  et donc  $I = \mathbb{R}$ .

- (4) On suppose qu'il existe  $b \in \mathbb{R}$  tel que  $y'(x) \neq 0$  pour tout  $x > b$ . Montrez alors que  $y$  et  $y'$  sont monotones sur  $[b, +\infty[$ . Déduez-en qu'elles ont une limite en  $+\infty$ . En utilisant le Lemme, déduisez-en une contradiction.

*Solution* : Comme  $y'$  est continue, elle est donc de signe constant sur  $]b, +\infty[$ , mettons  $y'(x) > 0$  pour tout  $x > b$ . Donc  $y$  est strictement croissante sur  $]b, +\infty[$ . Comme elle est bornée, soit  $l$  sa limite en  $+\infty$ . Si  $l \leq 0$ , alors  $y(x) \leq 0$  sur  $[b, +\infty[$ . Si  $l > 0$ , alors il existe  $b' > b$  tel que  $y(x) > 0$  pour  $x > b'$ . Comme  $y'' = -y(1 + y^2)$ , alors  $y''$  est de signe constant sur  $[b', +\infty[$ , donc  $y'$  est monotone bornée, soit  $l'$  sa limite. On a de plus  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y''(x) = -l - l^3 = -l(1 + l^2)$ . Il suit alors du Lemme précédent que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y'(x)}{x} = -l(1 + l^2) \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y(x)}{x} = l'.$$

Comme  $y$  et  $y'$  sont bornées, ces limites sont nulles et donc  $l = l' = 0$ . Donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} y'(x) = 0$ . En passant à la limite  $x \rightarrow +\infty$  dans l'intégrale première de la première question, il vient  $C = 0$ , puis  $y(x) = 0$  pour tout  $x \in I$ , ce qui contredit  $y'(x) \neq 0$  pour tout  $x > b$ .

- (5) Montrez que  $y$  admet au moins trois points critiques.

*Solution* : S'il n'y en avait que deux au plus, alors pour  $b \in \mathbb{R}$  plus grand qu'eux, on aurait  $y'(x) \neq 0$  pour  $x > b$ . C'est absurde d'après la question précédente.

- (6) Montrez alors qu'il existe  $t_1 < t_2$  réels tels que  $(y(t_1), y'(t_1)) = (y(t_2), y'(t_2))$ .

*Solution* : Soit  $t_c \in \mathbb{R}$  un point critique  $y'(t_c) = 0$ . Il suit de l'intégrale première que  $F(y(t_c)) = C$  avec  $F(z) = z^2 + z^4/4$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Une rapide étude de fonction montre que  $F$  décroît strictement sur  $] -\infty, 0]$  et croît strictement sur  $[0, +\infty[$ , la limite aux bords étant  $+\infty$ . Ainsi, il existe au plus deux solutions  $\lambda_1, \lambda_2 := -\lambda_1 \in \mathbb{R}$  de  $F(z) = C$ . Et donc  $y(t_c) \in \{\lambda_1, \lambda_2\}$ . Soient  $t_1 < t_2 < t_3$  trois points critiques distincts. On a alors  $y(t_1), y(t_2), y(t_3) \in \{\lambda_1, \lambda_2\}$ , donc deux de ses valeurs sont égales, mettons  $y(t_1) = y(t_2)$  sans perdre en généralité. Comme  $y'(t_1) = 0 = y'(t_2)$ , on a le résultat attendu.

- (7) Déduez-en que  $y$  est périodique.

*Solution* : Soit  $z(t) := y(t + t_2 - t_1)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . On a  $z'' + z + z^3 = 0$  sur  $\mathbb{R}$ . De plus,  $z(t_1) = y(t_2) = y(t_1)$  et  $z'(t_1) = y'(t_2) = y'(t_1)$ . Donc  $y$  et  $z$  sont solutions de la même EDO sur  $\mathbb{R}$  avec les mêmes conditions initiales, elles sont donc égales partout,  $z(t) = y(t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . En posant  $T := t_2 - t_1$ , on a  $y(t + T) = y(t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et donc  $y$  est périodique.