

TD2 : Solutions maximales

1. ZÉROS ISOLÉS

Exercice 1. Soit $f \in C^1(\mathbb{R})$ et soit $y \in C^2(I)$, I intervalle, une solution de $y'' = f(y)$. Montrez que si $y \neq 0$, alors ses zéros sont isolés.

2. SOLUTIONS MAXIMALES

Exercice 2. Déterminez les solutions maximales de $y' = e^{x+y}$.

Exercice 3. Déterminez toutes les solutions maximales de $y' = 2\sqrt{|y|}$.

Exercice 4. On cherche à déterminer les solutions maximales strictement positives de l'équation

$$yy'' = (1 - (y')^2), y > 0.$$

Soit donc $y \in C^2(I)$ une telle solution maximale.

- (1) On suppose qu'il existe $x_0 \in I$ tel que $y'(x_0) = 1$. Montrez que dans ce cas, $y(x) = y(x_0) + x - x_0$ pour tout $x \in I =]x_0 - y(x_0), +\infty[$.
- (2) Traitez de même le cas $y'(x_0) = -1$.
- (3) On suppose maintenant que $y'(x)^2 \neq 1$ pour tout $x \in I$. Dérivez alors $\ln |(y')^2 - 1|$ et déduisez-en une équation du premier ordre vérifiée par y . Déduisez-en y .

Exercice 5 (Caractère ouvert des intervalles maximaux). On se donne $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue Lipschitzienne en la seconde variable. On se donne $x \in C^1(I)$, où I est un intervalle d'intérieur non vide, solution de $x'(t) = f(t, x(t))$ pour tout $t \in I$.

A. On suppose que $I = [a, b]$ avec $-\infty < a < b < +\infty$.

- (1) Montrez qu'il existe $\epsilon \in]0, b - a[$ et $y \in C^1([b - \epsilon, b + \epsilon], \mathbb{R}^n)$ telle que $y'(t) = f(t, y(t))$ pour tout $t \in [b - \epsilon, b + \epsilon]$ et $y(b) = x(b)$.
- (2) Posez $z := x - y$ sur $[b - \epsilon, b]$. En écrivant $z(t) = z(b) + \int_b^t \dots$ pour $t \in [b - \epsilon, b]$ et en raisonnant comme au TD1, montrez que $z(t) = 0$ pour tout $t \in [b - \epsilon, b]$.
- (3) Montrez que y peut se prolonger à $[a, b + \epsilon]$.

B. Montrez que si x est une solution maximale (on admet donc que cela existe), alors I est un intervalle ouvert.

3. UN CAS DE SOLUTIONS MAXIMALE PÉRIODIQUE

Exercice 6 (Un lemme utile). On se donne $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = l$ existe. Montrez que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ existe et vaut l .

Exercice 7. On considère ici une solution maximale $y \in C^2(I)$ de $(E) : y'' + y + y^3 = 0$.

- (1) Montrez qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $(y')^2 + y^2 + \frac{y^4}{2} = C$ sur I .
- (2) Montrez que y , y' et y'' sont bornées sur I .
- (3) Montrez que $I = \mathbb{R}$.
- (4) On suppose qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $y'(x) \neq 0$ pour tout $x > b$. Montrez alors que y et y' sont monotones sur $[b, +\infty[$. Déduisez-en qu'elles ont une limite en $+\infty$. En utilisant le Lemme, déduisez-en une contradiction.
- (5) Montrez que y admet au moins trois points critiques.
- (6) Montrez alors qu'il existe $t_1 < t_2$ réels tels que $(y(t_1), y'(t_1)) = (y(t_2), y'(t_2))$.
- (7) Déduisez-en que y est périodique.