

Corrigé du TD3 : Théorèmes d'explosion et études qualitatives

1. CROISSANCE AU PLUS LINÉAIRE

Exercice 1. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ une fonction bornée. Montrez que les solutions maximales de $y' = f(y)$ sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier. Même question si $\|f(x)\| \leq A\|x\| + B$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Le résultat persiste-t'il si on a une croissance plus que linéaire ?

Indication : on montrera que la fonction $t \mapsto g(t) := \|x(t)\|^2$ est C^1 et qu'elle vérifie une jolie inéquation différentielle. On montrera alors que g est bornée sur tout intervalle borné et on conclura.

Solution : On prend ici la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit $y \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$, $I =]a, b[$, une solution maximale. On a g dérivable et en utilisant l'inégalité fondamentale de l'analyse numérique ($2ab \leq a^2 + b^2$ pour $a, b \in \mathbb{R} \dots$)

$$\begin{aligned} g'(t) &= 2\langle y'(t), y(t) \rangle = 2\langle f(y(t)), y(t) \rangle \leq 2\|f(y(t))\| \cdot \|y(t)\| \\ &\leq 2A\|y(t)\|^2 + 2B\|y(t)\| \leq 2A\|y(t)\|^2 + B^2 + \|y(t)\|^2 \leq Cg(t) + D \end{aligned}$$

avec $C = 2A + 1$ et $D = B^2$. A partir de là, en fixant $t_0 \in I$, on utilise le TD1, exo 16 pour obtenir avec $t \in I$, $t \geq t_0$:

$$g(t) \leq g(t_0)e^{C(t-t_0)} + D \int_{t_0}^t e^{C(t-s)} ds = g(t_0)e^{C(t-t_0)} + De^{Ct} \int_{t_0}^t e^{-Cs} ds.$$

Posons $T > t_0$. Il existe donc $C(T) > 0$ tel que $\|x(t)\|^2 = g(t) \leq C(T)$ pour tout $t \in [t_0, T[$: la solution reste donc bornée en temps fini. Supposons que $I =]a, b[$ avec $b < +\infty$. On a donc $\|x(t)\|^2 = g(t) \leq C(b)$ pour tout $t \in [t_0, b[$. Or il suit du théorème des bouts (on est dans les hyp de Cauchy-Lipschitz) que $x(t)$ sort de tout compact quand $t \rightarrow b^-$, en particulier, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $t \in [b - \epsilon, b[$ tel que $x(t) \notin B(0, \sqrt{C(b) + 1})$, ce qui contredit $\|x(t)\| \leq \sqrt{C(b)}$ pour tout $t \in [t_0, b[$. Donc $b = +\infty$. Même raisonnement en a . Donc $I = \mathbb{R}$.

2. UNE ÉTUDE QUALITATIVE

Dans cette section, on cherche à déterminer certaines propriétés des solutions maximales de l'équation différentielle

$$y'' = y^4 \tag{E}$$

On se donne une solution maximale $y \in C^1(I)$ avec $I =]a, b[$ intervalle maximal où $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. On suppose que y est non-identiquement nulle.

1. Montrez que y' est strictement croissante (on pourra raisonner par l'absurde et utiliser le théorème de Cauchy-Lipschitz). En particulier, y' ne s'annule au plus qu'une fois.

Solution : Remarque préliminaire : on est dans les hyp de Cauchy-Lipschitz car $t \mapsto t^4$ est C^1 sur $\mathbb{R}$. On a donc bien des solutions maximales.

On a $(y')' = y^4 \geq 0$, donc y' est croissante. Si elle n'est pas strictement croissante, il existe $c, d \in I$ tels que $c < d$ et $y'(c) = y'(d)$, et donc $y' = C^{te}$ sur $[c, d]$, donc $y'' = 0$ sur $[c, d]$ donc $y^4 = 0$ sur cet intervalle. Il s'ensuit que y et y' sont identiquement nulles sur $[c, d]$, en particulier en c . La fonction nulle vérifie l'EDO et a les mêmes conditions initiales en c , donc y est identiquement nulle, ce qui contredit l'hypothèse initiale. Donc y' est strictement croissante.

2. Montrez qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{(y')^2}{2} - \frac{y^5}{5} = C \text{ sur } I. \tag{IP}$$

Solution : Il suffit de dériver la fonction $H(t) := \frac{(y'(t))^2}{2} - \frac{y(t)^5}{5}$ pour $t \in I$. On obtient $H'(t) = y'(t)(y''(t) - y(t)^4) = 0$ sur I intervalle, donc F est constante.

3. On suppose que $y'(x) < 0$ pour tout $x \in I$. On se donne $c \in I$.

(a) Montrez que y' est bornée sur $I \cap [c, +\infty[$.

Solution : Comme y' est croissante, on a $y'(c) \leq y'(x) < 0$ pour tout $x \in I \cap [c, +\infty[$. Donc y' est bornée sur cet intervalle.

(b) Montrez que y est aussi bornée sur $I \cap [c, +\infty[$.

Solution : Ceci suit de l'intégrale première $\frac{(y')^2}{2} - C = \frac{y^5}{5}$.

(c) Montrez qu'il existe $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\lim_{x \rightarrow b} y(x)$ et $\lim_{x \rightarrow b} y'(x)$ existent et valent respectivement l_1 et l_2 .

Solution : y' est monotone bornée sur $I \cap [c, +\infty[= [c, b[$, donc elle admet une limite finie en b . Avec l'intégrale première, $y(t)^5$ admet aussi une limite finie lorsque $t \rightarrow b$, et donc $y(t)$ aussi car $z \mapsto z^5$ est un homéo sur $\mathbb{R}$.

(d) On suppose dans cette question que $b < +\infty$: montrez alors que y peut se prolonger en b (on pourra utiliser les résultats de la section 6). Déduisez-en que $b = +\infty$.

Solution : Plus rapide avec le théorème des bouts. Comme $(y(x), y'(x))$ reste bornée lorsque $x \rightarrow b$, on reste dans un compact, ce qui contredit $b < \infty$: c'est l'argument de l'exo 1. Donc $b = +\infty$.

(e) Montrez que $l_1 = l_2 = 0$.

Solution : Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} y'(x) = l_2$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y(x)}{x} = l_2$, or y converge, donc $l_2 = 0$. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} y''(x) = l_1^4$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y'(x)}{x} = l_1^4$, or y' converge, donc $l_1^4 = 0$ puis $l_1 = 0$.

(f) Déduisez de (d) et de (IP) la valeur de C puis une équation du premier ordre vérifiée par y .

Solution : En passant à la limite $x \rightarrow +\infty$ dans (IP), on obtient $C = 0$, donc $\frac{(y')^2}{2} = \frac{y^5}{5}$. Or $y' < 0$, donc $y > 0$ et $y' = -\sqrt{\frac{2}{5}} \cdot y^{5/2}$.

(g) En résolvant cette équation, déduisez-en y ainsi que I .

Solution : Comme $y > 0$, on a

$$(y^{-3/2})' = -\frac{3}{2}y'y^{-5/2} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{5}} := \alpha \text{ sur }]a, +\infty[.$$

Il existe donc $K \in \mathbb{R}$ tel que $y^{-3/2} = \alpha(x - K)$ pour $x \in]a, +\infty[$. Or $y > 0$, donc $]a, +\infty[\subset]K, +\infty[$ et $a \geq K$, en particulier $a > -\infty$. Puis

$$y(x) = \frac{1}{(\alpha(x - K))^{3/2}} = \frac{\beta}{(x - K)^{2/3}} \text{ pour tout } x \in a, +\infty[\subset]K, +\infty[$$

avec $\beta = (10/9)^{1/3} > 0$ explicite. La solution étant maximale, on a $a = K$ puis

Si $y' < 0$, alors il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $y(x) = \frac{\beta}{(x - a)^{2/3}}$ pour tout $x \in]a, +\infty[$
--

4. On suppose que $y'(x) > 0$ pour tout $x \in I$. En s'inspirant de la question 3, déterminez y et I .

Solution : posons $z(x) := y(-x)$ pour $x \in]-b, -a[$. On a $z'' = z^4$ solution max et $z' < 0$ sur $] -b, -a[$. Son expression est donc donnée par la question précédente. En revenant à y , on a alors $I =]-\infty, b[$ avec $b \in \mathbb{R}$ et

Si $y' > 0$, alors il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $y(x) = \frac{\beta}{(-x + b)^{2/3}}$ pour tout $x \in]-\infty, b[$

5. On suppose désormais que y' s'annule en un unique point noté x_0 .

(a) Montrez que y est paire par rapport à x_0 , c'est-à-dire que $y(x) = y(2x_0 - x)$ pour tout $x \in I$ et qu'il existe $\beta > 0$ tel que $I =]x_0 - \beta, x_0 + \beta[$, avec donc $b = x_0 + \beta \leq +\infty$.

Solution : posons $z(x) := y(2x_0 - x)$ pour tout $x \in]2x_0 - b, 2x_0 - a[\ni x_0$. On a $z'' = z^4$, $z(x_0) = y(2x_0 - x_0) = y(x_0)$ et $z'(x_0) = -y'(2x_0 - x_0) = -y'(x_0) = 0 = y(x_0)$. Donc les deux fonctions sont solutions de la même EDO avec les mêmes conditions initiales, on est dans le cadre de Cauchy-Lipschitz, donc elles sont identiques sur $]a, b[\cap]2x_0 - b, 2x_0 - a[$. Comme elles sont maximales, on a $]a, b[=]2x_0 - b, 2x_0 - a[$ et donc $b = 2x_0 - a$. Si $a = -\infty$, on pose $\beta = +\infty$, et si $a > -\infty$, on pose $\beta = x_0 - a$. Dans tous les cas, $y(x) = y(2x_0 - x)$ pour tout $x \in I =]x_0 - \beta, x_0 + \beta[$.

(b) Montrez que pour tout $x_1 \in I$, $x_1 > x_0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $y'(x) \geq \alpha$ pour tout $x \in I$, $x \geq x_1$. Montrez que $y(x)$ et $y'(x)$ tendent vers $+\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$ (on séparera les cas $b < +\infty$ et $b = +\infty$).

Solution : Comme y' est croissante strictement, on a $y'(x) \geq y'(x_1) > y'(x_0) = 0$ pour tout $x \in I$, $x \geq x_1$, donc on a le résultat avec $\alpha := y'(x_1)$. Donc y strictement croissante sur $]x_1, b[$, donc admet une limite $\leq +\infty$ en b . Si $b < +\infty$, il suit du théorème des bouts que cette limite doit être infinie pour sortir de tout compact. Si $b = +\infty$, on a $y(x) \geq y(x_1) + \alpha(x - x_1)$ pour tout $x \geq x_1$, et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = +\infty$.

(c) En utilisant (IP), déterminez $\lim_{x \rightarrow b} (y^{-3/2})'(x)$.

Solution : Sur $]x_1, b[$, on a $y' > 0$, donc

$$(y^{-3/2})' = -\frac{3}{2}y'y^{-5/2} = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{5} + \frac{2C}{y^5}} \rightarrow -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{5}} \text{ quand } t \rightarrow b.$$

(d) En utilisant le théorème sur la limite de la dérivée en l'infini (TD1), montrez que le cas $b = +\infty$ est impossible.

Solution : Si $b = +\infty$, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{xy(x)^{3/2}} = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{5}}$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = +\infty$, ce qui est contradictoire. Donc $b < \infty$.

(e) En utilisant le théorème de prolongement (Devoir 2), montrez que $y^{-3/2}$ se prolonge de façon C^1 à $]a, b[$, et déduisez-en un équivalent de $y(x)$ lorsque $x \rightarrow b$.

Solution : Soit $z(x) = y(x)^{-3/2}$ pour $x \in]x_1, b[$ et $z(b) = 0$. Cette fonction est continue en b , dérivable sur $]x_1, b[$ avec pour limite $-\alpha$. Donc elle est dérivable en b de dérivée $-\alpha$. On a donc

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{z(x) - z(b)}{x - b} = z'(b) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{1}{(x - b)y(x)^{3/2}} = -\alpha \Rightarrow \boxed{y(x) \simeq_{x \rightarrow b^-} \frac{\beta}{(b - x)^{2/3}}}$$

avec $\beta = (10/9)^{1/3} > 0$.

3. ETUDE DU PENDULE

Dans toute la suite, on fixe $\alpha > 0$.

3.1. Solutions maximales et intégrale première. 1. Montrez qu'il existe un intervalle ouvert $]a, b[$ ($-\infty \leq a < 0 < b \leq +\infty$) et une solution maximale $\theta \in C^2([a, b])$ du problème

$$\begin{cases} \ddot{\theta} + \sin \theta = 0 & \text{sur }]a, b[\\ \theta(0) = 0 \\ \dot{\theta}(0) = \alpha > 0 \end{cases} \quad (P)$$

Solution : La fonction $z \mapsto -\sin z$ est C^1 sur $\mathbb{R}$, donc on est dans le cadre de Cauchy-Lipschitz. Le résultat est conséquence de l'existence d'une solution maximale avec les conditions initiales en 0.

2. Montrez qu'il existe $C > -1$ tel que

$$\frac{(\dot{\theta})^2}{2} = C + \cos \theta \text{ sur }]a, b[.$$

Solution : En dérivant $t \mapsto H(t) := \frac{(\dot{\theta}(t))^2}{2} - \cos \theta(t)$ sur I , on obtient $H'(t) = \ddot{\theta} + \dot{\theta} \sin \theta = \dot{\theta}(\ddot{\theta} + \sin \theta) = 0$ sur I intervalle, d'où l'existence de $C \in \mathbb{R}$. On a $C = \frac{(\dot{\theta}(0))^2}{2} - \cos \theta(0) = \frac{\alpha^2}{2} - 1 > -1$. De plus, $C \leq -1$.

3. Montrez que l'intervalle maximal est $]a, b[= \mathbb{R}$.

Solution : On a $|\dot{\theta}| \leq \sqrt{2(C+1)}$ sur I , donc $|\theta(t)| = |\theta(t) - \theta(0)| \leq \sqrt{2(C+1)}|t|$ pour tout $t \in I$. Donc $(\theta, \dot{\theta})$ reste bornée sur tout intervalle borné. Comme vu plus haut (exercice 1), ceci impose que $I = \mathbb{R}$.

3.2. Le cas $C > 1$. Dans toute cette sous-section, on suppose que $C > 1$.

4. Montrez qu'il existe $c_0, c_1 > 0$ tels que $c_1 \geq \theta'(t) \geq c_0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Déduisez-en les limites de θ en $\pm\infty$.

Solution : On a $\frac{(\dot{\theta})^2}{2} = C + \cos \theta \geq C - 1 > 0$ et donc $|\dot{\theta}| \geq \sqrt{2(C-1)} > 0$ sur $\mathbb{R}$ intervalle. Donc $\dot{\theta}$ est continue et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ intervalle. De plus elle vaut $\alpha > 0$ en 0, donc $\dot{\theta} > 0$ sur $\mathbb{R}$ et donc $\dot{\theta}(t) \geq \sqrt{2(C-1)} > 0$ sur $\mathbb{R}$. On a donc le résultat avec $c_0 = \sqrt{2(C-1)}$ et $c_1 = \sqrt{2(C+1)}$. Pour $t \geq 0$, on a donc $\theta(t) \geq \theta(0) + c_0 t = c_0 t$, et donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) = +\infty$. Pour $t < 0$, $\theta(t) \leq c_0 t$ et donc $\lim_{t \rightarrow -\infty} \theta(t) = -\infty$.

5. Montrez qu'il existe $T > 0$ tel que $\theta(T) = 2\pi$. Déterminez $\dot{\theta}(T)$.

Solution : Comme θ est continue $\theta(0) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) = +\infty$, on l'existence de $T > 0$. On a

$$\frac{(\dot{\theta}(T))^2}{2} - \cos(\theta(T)) = C = \frac{(\dot{\theta}(0))^2}{2} - \cos(\theta(0)) = \frac{\alpha^2}{2} - 1,$$

et donc $|\dot{\theta}(T)| = \alpha$ puis $\dot{\theta}(T) = \alpha$ car positive.

6. Montrez que $\theta(t) = \theta(t+T) - 2\pi$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et déduisez-en que $\dot{\theta}$ est périodique.

Solution : Posons $z(t) := \theta(t+T) - 2\pi$ pour $t \in \mathbb{R}$. On a $z \in C^2$ et $\ddot{z}(t) = \ddot{\theta}(t+T) = -\sin(\theta(t+T)) = -\sin(\theta(t+T) - 2\pi) = -\sin(z(t))$, donc θ et z vérifient la même EDO. De plus, $z(0) = \theta(T) - 2\pi = 0 = \theta(0)$ et $\dot{z}(0) = \dot{\theta}(T) = \alpha = \dot{\theta}(0)$, donc on a les mêmes conditions initiales. On est dans le cadre de Cauchy-Lipschitz, donc $z \equiv \theta$ donc $\theta(t+T) = \theta(t) + 2\pi$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En dérivant, $\dot{\theta}(t+T) = \dot{\theta}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

7. Tracez l'allure du graphe de la fonction $t \mapsto (\theta(t), \theta'(t))$.

3.3. Le cas $C = 1$. Dans toute cette sous-section, on suppose que $C = 1$.

8. On suppose qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\theta(t_0) = \pi$. Déterminez alors $\dot{\theta}(t_0)$ et déduisez-en que θ est constante.

Solution : On a $\frac{(\dot{\theta}(t_0))^2}{2} = 1 + \cos \theta(t_0) = 0$ donc $\dot{\theta}(t_0) = 0$. On remarque que la fonction constante égale à π est solution de l'EDO et qu'elle a les mêmes conditions initiales en t_0 que θ , donc par unicité, $\theta(t) = \pi$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

9. Montrez que $\theta(t) \neq \pi$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Montrez que $\theta(t) \neq -\pi$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Solution : Si θ atteint la valeur π , on a vu qu'elle est constante, ce qui contredit $\dot{\theta}(0) > 0$. Donc θ n'atteint jamais π . De la même manière, θ n'atteint jamais $-\pi$.

10. Montrez que $-\pi < \theta < \pi$ et que $\dot{\theta} > 0$ sur $\mathbb{R}$.

Solution : Si θ prend une valeur $> \pi$, comme $\theta(0) = 0$, par continuité, elle atteint π , ce qui est absurde d'après la question précédente. De même θ ne prend pas de valeur $< -\pi$. Finalement $-\pi < \theta(t) < \pi$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et donc $\cos(\theta(t)) > -1$ pour tout t , donc $\frac{(\dot{\theta}(t))^2}{2} = 1 + \cos \theta(t) > 0$ pour tout t et donc $\dot{\theta}$ ne s'annule jamais. Comme $\dot{\theta}$ est continue et > 0 en 0, alors $\dot{\theta} > 0$ sur $\mathbb{R}$.

11. Montrez que θ a des limites finies en $-\infty$ et $+\infty$.

Solution : Comme $\dot{\theta} > 0$, alors θ est strictement croissante. Comme elle est bornée, elle admet donc des limites aux bornes.

12. Montrez que $\lim_{t \rightarrow -\infty} \theta(t) = -\pi$ et que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) = +\pi$

Solution : Soient $l_-, l_+ \in [-\pi, \pi]$ les limites respectives en $-\infty$ et $+\infty$. Comme $\dot{\theta} > 0$, on a $\dot{\theta} = \sqrt{2(1 + \cos \theta(t))}$ qui admet alors comme limites $\sqrt{2(1 + \cos l_-)}$ et $\sqrt{2(1 + \cos l_+)}$ respectivement en $-\infty$ et $+\infty$. Avec le Lemme sur la limite de la dérivée, on obtient

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\theta(t)}{t} = \sqrt{2(1 + \cos l_-)} \text{ et } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\theta(t)}{t} = \sqrt{2(1 + \cos l_+)}.$$

Or θ est bornée, donc ces limites sont nulles, $\cos(l_{\pm}) = -1$ avec $l_{\pm} \in [-\pi, \pi]$, donc $l_{\pm} \in \{-\pi, +\pi\}$. Comme θ est strictement croissante, on a donc $l_- = -\pi$ et $l_+ = +\pi$.

13. Tracez l'allure du graphe de la fonction $t \mapsto (\theta(t), \theta'(t))$.

3.4. Le cas $-1 < C < 1$. Dans toute cette sous-section, on suppose que $-1 < C < 1$.

14. Montrez qu'il existe $\theta_0 \in]0, \pi[$ tel que $\cos \theta_0 = -C$.

Solution : Ceci provient de la bijectivité de $\cos :]0, \pi[\rightarrow]-1, 1[$.

15. Montrez que $-\theta_0 \leq \theta(t) \leq \theta_0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. (Question délicate : on pourra s'aider d'un cercle trigonométrique pour affiner l'intuition).

Solution : On a $\frac{(\theta(t))^2}{2} = C + \cos \theta(t) = \cos(\theta(t)) - \cos(\theta_0)$ pour tout t , donc $\cos(\theta(t)) \geq \cos \theta_0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En particulier, $\theta(t) \neq \pm\pi$ pour tout t . Comme à la question précédente, comme $\theta(0) = 0$, on a alors $-\pi < \theta(t) < \pi$ pour tout t . Du coup, et ça se voit très bien sur le cercle trigo, s'il existe t tel que $\theta(t) > \theta_0$, alors $\theta_0 < \theta(t) < \pi$ et comme $\cos$ est strictement décroissante sur cet intervalle, on a $\cos(\theta(t)) < \cos(\theta_0)$, ce qui est absurde. Donc $\theta(t) \leq \theta_0$ pour tout t . De même $\theta(t) \geq -\theta_0$ pour tout t .

16. On suppose que $\theta(t)$ a une limite lorsque $t \rightarrow +\infty$. Montrez alors que $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$ ont tous trois une limite en $+\infty$. En utilisant l'équation (P) et l'intégrale première, déterminez ces limites et concluez à une absurdité.

Solution : Soit l cette limite éventuelle. Comme θ est bornée, alors $l \in \mathbb{R}$ et $-\theta_0 \leq l \leq \theta_0$. Comme $\ddot{\theta} = -\sin \theta$, alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} \ddot{\theta} = -\sin(l)$ puis, avec le lemme habituel, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\dot{\theta}(t)}{t} = -\sin l$. Or $\dot{\theta}$ est bornée, donc $\sin l = 0$ puis $l = 0$ car $-\theta_0 \leq l \leq \theta_0$. Du coup, avec l'intégrale première, $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\dot{\theta}(t)| = \sqrt{2(1 - \cos(\theta_0))} > 0$, et par continuité, $\dot{\theta}(t)$ est de signe constante $\alpha \neq 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$. Et encore le lemme : $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\theta(t)}{t} = \alpha \neq 0$, absurde car θ est bornée.

17. Montrez qu'il existe $t_1 < t_2 < t_3$ tels que $\dot{\theta}(t_i) = 0$ pour $i = 1, 2, 3$ (on pourra raisonner par l'absurde). Montrez alors qu'il existe $i < j$ tels que $\theta(t_i) = \theta(t_j)$.

Solution : Si $\dot{\theta}$ s'annule au plus 2 fois, alors il existe $a > 0$ tel que $\theta'(t) \neq 0$ pour tout $t > a$. Par continuité, θ' est de signe constant sur $]a, +\infty[$ et donc θ est monotone, puis admet une limite en $+\infty$ car elle est bornée. C'est impossible d'après la question précédente. On a donc au moins trois points critiques $t_1 < t_2 < t_3$. Avec l'intégrale première, on obtient $\cos(\theta(t_i)) = \cos(\theta_0)$. Or $\theta(t_i) \in [-\theta_0, \theta_0] \subset]-\pi, \pi[$: il suit des variations du cosinus que $\theta(t_i) \in \{-\theta_0, \theta_0\}$ pour $i = 1, 2, 3$. On a donc au moins deux points qui ont la même image.

18. On pose $T := t_j - t_i > 0$. Montrez que $\theta(t) = \theta(t + T)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Solution : On pose $z(t) := \theta(t + T)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Alors $z \in C^2$ et vérifie $\ddot{z} = -\sin z$. On a $z(t_i) = \theta(t_i + T) = \theta(t_j) = \theta(t_i)$ et $z'(t_i) = \theta'(t_i + T) = \theta'(t_j) = 0 = \theta'(t_i)$. Donc même EDO, mêmes conditions initiales en t_i , on est dans le cadre de Cauchy-Lipschitz, donc $z \equiv \theta$ sur $\mathbb{R}$, donc $\theta(t) = \theta(t + T)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et θ est périodique.

19. Tracez l'allure du graphe de la fonction $t \mapsto (\theta(t), \theta'(t))$.