

TD3 : Théorèmes d'explosion et études qualitatives

1. CROISSANCE AU PLUS LINÉAIRE

Exercice 1. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ une fonction bornée. Montrez que les solutions maximales de $y' = f(y)$ sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier. Même question si $\|f(x)\| \leq A\|x\| + B$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Le résultat persiste-t'il si on a une croissance plus que linéaire ?

Indication : on montrera que la fonction $t \mapsto g(t) := \|x(t)\|^2$ est C^1 et qu'elle vérifie une jolie inéquation différentielle. On montrera alors que g est bornée sur tout intervalle borné et on conclura.

2. UNE ÉTUDE QUALITATIVE

Dans cette section, on cherche à déterminer certaines propriétés des solutions maximales de l'équation différentielle

$$y'' = y^4 \quad (E)$$

On se donne une solution maximale $y \in C^1(I)$ avec $I =]a, b[$ intervalle maximal où $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. On suppose que y est non-identiquement nulle.

1. Montrez que y' est strictement croissante (on pourra raisonner par l'absurde et utiliser le théorème de Cauchy-Lipschitz). En particulier, y' ne s'annule au plus qu'une fois.

2. Montrez qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{(y')^2}{2} - \frac{y^5}{5} = C \text{ sur } I. \quad (IP)$$

3. On suppose que $y'(x) < 0$ pour tout $x \in I$. On se donne $c \in I$.

(a) Montrez que y' est bornée sur $I \cap [c, +\infty[$.

(b) Montrez que y est aussi bornée sur $I \cap [c, +\infty[$.

(c) Montrez qu'il existe $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\lim_{x \rightarrow b} y(x)$ et $\lim_{x \rightarrow b} y'(x) = b$ existent et valent respectivement l_1 et l_2 .

(d) On suppose dans cette question que $b < +\infty$: montrez alors que y peut se prolonger en b (on pourra utiliser les résultats de la section 6). Déduisez-en que $b = +\infty$.

(e) Montrez que $l_1 = l_2 = 0$ (on pourra utiliser les résultats de la section 6).

(f) Déduisez de (d) et de (IP) la valeur de C puis une équation du premier ordre vérifiée par y .

(g) En résolvant cette équation, déduisez-en y ainsi que I .

4. On suppose que $y'(x) > 0$ pour tout $x \in I$. En s'inspirant de la question 3, déterminez y et I .

5. On suppose désormais que y' s'annule en un unique point noté x_0 .

(a) Montrez que y est paire par rapport à x_0 , c'est-à-dire que $y(x) = y(2x_0 - x)$ pour tout $x \in I$ et qu'il existe $\beta > 0$ tel que $I =]x_0 - \beta, x_0 + \beta[$, avec donc $b = x_0 + \beta \leq +\infty$.

(b) Montrez que pour tout $x_1 \in I$, $x_1 > x_0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $y'(x) \geq \alpha$ pour tout $x \in I$, $x \geq x_1$. Montrez que $y(x)$ et $y'(x)$ tendent vers $+\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$ (on séparera les cas $b < +\infty$ et $b = +\infty$).

(c) En utilisant (IP), déterminez $\lim_{x \rightarrow b} (y^{-3/2})'(x)$.

(d) En utilisant le théorème sur la limite de la dérivée en l'infini (TD1), montrez que le cas $b = +\infty$ est impossible.

(e) En utilisant le théorème de prolongement (Devoir 2), montrez que $y^{-3/2}$ se prolonge de façon C^1 à $]a, b]$, et déduisez-en un équivalent de $y(x)$ lorsque $x \rightarrow b$.

3. ETUDE DU PENDULE

Dans toute la suite, on fixe $\alpha > 0$.

3.1. Solutions maximales et intégrale première. 1. Montrez qu'il existe un intervalle ouvert $]a, b[$ ($-\infty \leq a < 0 < b \leq +\infty$) et une solution maximale $\theta \in C^2([a, b])$ du problème

$$\begin{cases} \ddot{\theta} + \sin \theta = 0 & \text{sur }]a, b[\\ \theta(0) = 0 \\ \dot{\theta}(0) = \alpha > 0 \end{cases} \quad (P)$$

2. Montrez qu'il existe $C > -1$ tel que

$$\frac{(\dot{\theta})^2}{2} = C + \cos \theta \text{ sur }]a, b[.$$

3. Montrez que l'intervalle maximal est $]a, b[= \mathbb{R}$

3.2. Le cas $C > 1$. Dans toute cette sous-section, on suppose que $C > 1$.

4. Montrez qu'il existe $c_0, c_1 > 0$ tels que $c_1 \geq \theta'(t) \geq c_0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Déduisez-en les limites de $\dot{\theta}$ en $\pm\infty$.

5. Montrez qu'il existe $T > 0$ tel que $\theta(T) = 2\pi$. Déterminez $\dot{\theta}(T)$.

6. Montrez que $\theta(t) = \theta(t + T) - 2\pi$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et déduisez-en que $\dot{\theta}$ est périodique.

7. Tracez l'allure du graphe de la fonction $t \mapsto (\theta(t), \theta'(t))$.

3.3. Le cas $C = 1$. Dans toute cette sous-section, on suppose que $C = 1$.

8. On suppose qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\theta(t_0) = \pi$. Déterminez alors $\dot{\theta}(t_0)$ et déduisez-en que θ est constante.

9. Montrez que $\theta(t) \neq \pi$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Montrez que $\theta(t) \neq -\pi$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

10. Montrez que $-\pi < \theta < \pi$ et que $\dot{\theta} > 0$ sur $\mathbb{R}$.

11. Montrez que θ a des limites finies en $-\infty$ et $+\infty$.

12. Montrez que $\lim_{t \rightarrow -\infty} \theta(t) = -\pi$ et que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) = +\pi$

13. Tracez l'allure du graphe de la fonction $t \mapsto (\theta(t), \theta'(t))$.

3.4. Le cas $-1 < C < 1$. Dans toute cette sous-section, on suppose que $-1 < C < 1$.

14. Montrez qu'il existe $\theta_0 \in]0, \pi[$ tel que $\cos \theta_0 = -C$.

15. Montrez que $-\theta_0 \leq \theta(t) \leq \theta_0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. (Question délicate : on pourra s'aider d'un cercle trigonométrique pour affiner l'intuition).

16. On suppose que $\theta(t)$ a une limite lorsque $t \rightarrow +\infty$. Montrez alors que $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$ ont tous trois une limite en $+\infty$. En utilisant l'équation (P) et l'intégrale première, déterminez ces limites et concluez à une absurdité.

17. Montrez qu'il existe $t_1 < t_2 < t_3$ tels que $\dot{\theta}(t_i) = 0$ pour $i = 1, 2, 3$ (on pourra raisonner par l'absurde). Montrez alors qu'il existe $i < j$ tels que $\theta(t_i) = \theta(t_j)$.

18. On pose $T := t_j - t_i > 0$. Montrez que $\theta(t) = \theta(t + T)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

19. Tracez l'allure du graphe de la fonction $t \mapsto (\theta(t), \theta'(t))$.