

Corrigé du TD4 : Equations linéaires et une étude qualitative

1. LE SYSTÈME DE LOTKA-VOLTERRA

(Aussi appelé "proies-prédateurs").

Exercice 1. On considère une solution maximale $(x, y) \in C^1(I, \mathbb{R}^2)$ du système $x' = ax - bxy$ et $y' = -cy + dxy$ avec $a, b, c, d > 0$ et on suppose qu'il existe $t_0 \in I$ tel que $x(t_0) > 0$ et $y(t_0) > 0$.

Remarque préliminaire : on est dans le cadre de Cauchy-Lipschitz car $(x, y) \mapsto (ax - bxy, -cy + dxy)$ est C^1 .

- (1) Montrez que $x > 0$ et $y > 0$ sur leur intervalle de définition.

Solution : Supposons qu'il existe $t_1 \in I$ tel que $x(t_1) = 0$. En posant $\omega(t) := a - by(t)$ pour tout $t \in I$, on a

$$\begin{cases} x' = \omega x & \text{dans } I \\ x(t_1) = 0 \end{cases}$$

Or la fonction nulle est solution du même problème, donc par unicité des solutions maximales, $x \equiv 0$ sur I , puis $x(t_0) = 0$, ce qui est absurde. Donc x ne s'annule pas sur I . Si x prend une valeur < 0 , comme elle est continue, il suit du théorème des valeurs intermédiaires que x s'annule, ce qui est absurde. Donc $x > 0$. La preuve est similaire pour y .

- (2) En utilisant le système, montrez que x et y restent bornés en temps fini. Déduisez-en que x, y sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Solution : on a $(e^{-at}x(t))' = e^{-at}(x' - ax) = -bxye^{-at} < 0$ sur I , donc $0 < e^{-at}x(t) \leq e^{-at_0}x(t_0)$ pour tout $t > t_0$, $t \in I$, et donc $x(t) \leq e^{a(t-t_0)}x(t_0)$. Ainsi pour tout $T > t_0$, il existe $C(T) > 0$ tel que $|x(t)| \leq C(T)$ pour tout $t \in [t_0, T] \cap I$. Soit $M > 0$ qui sera fixé plus tard. On a

$$(e^{-Mt}y(t))' = e^{-Mt}(-cy + dxy - My) = e^{-Mt}(-c + dx - M)y \leq e^{-Mt}(-c + dC(T) - M)y < 0$$

sur $[t_0, T]$ avec $M > dC(T)$. En raisonnant comme plus haut, on obtient qu'il existe $D(T) > 0$ tel que $|y(t)| \leq D(T)$ pour tout $t \in [t_0, T] \cap I$. En posant $\tilde{x}(t) := x(-t)$ et $\tilde{y}(t) := y(-t)$ pour tout $t \in -I$, on constate que $\tilde{x}, \tilde{y}$ vérifie un système du même type, et que ces fonctions sont bornées sur $[-t_0, \tilde{S}] \cap I$ pour tout $\tilde{S} > -t_0$. En revenant à x, y , on obtient que pour tous $S < t_0 < T$, il existe $C(S, T)$ tel que $|x(t)| + |y(t)| \leq C(S, T)$ pour tout $t \in [S, T] \cap I$. D'après le théorème des bouts, si $I =]a, b[$ avec $b < \infty$, alors $(x(t), y(t))$ doit sortir de tout compact lorsque $t \rightarrow b^-$: absurde car $|x(t)| + |y(t)| \leq C(t_0, b)$ pour tout $t \in [t_0, b[$. Donc $b = +\infty$. De même $a = -\infty$ puis $I = \mathbb{R}$.

- (3) On pose $H(x, y) := by + dx - a \ln y - c \ln x$ pour $x, y > 0$. Montrez que $t \mapsto H(x(t), y(t))$ est constante sur $\mathbb{R}$.

Solution : La fonction $t \mapsto H(x(t), y(t))$ est dérivable et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{d}{dt}H(x(t), y(t)) = by' + dx' - a \frac{y'}{y} - c \frac{x'}{x} = b(-c + dx)y + d(a - by)x - a(-c + dx) - c(a - by) = 0$$

donc $t \mapsto H(x(t), y(t))$ est constante sur $\mathbb{R}$ intervalle.

- (4) En utilisant la fonction H et les variations de x et y , montrez que (x, y) est périodique.

Solution : La remarque essentielle est que pour une valeur donnée de $x(t)$, il n'y a que deux valeurs possibles pour $y(t)$: c'est conséquence de $H(x, y) = \text{constante}$.

Etude de H : On a $\partial_x H = d - c/x$ et $\partial_y H = b - a/y$ pour $x, y > 0$, donc l'unique point critique est $(c/d, a/b)$. La Hessienne est

$$\nabla^2 H(c/d, a/b) = \begin{pmatrix} d^2/c & 0 \\ 0 & b^2/a \end{pmatrix} \text{ définie positive,}$$

donc $(c/d, a/b)$ est un minimum local strict.

Lemme utile : supposons qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $x(t) \neq \frac{c}{d}$ pour tout $t \geq t_0$. Du coup $y' = (dx - c)y$ ne s'annule jamais, donc a un signe constant par continuité, donc y est monotone sur $[t_0, +\infty[$, donc elle a une limite l_y lorsque $t \rightarrow +\infty$. Du coup $\lim_{t \rightarrow +\infty} (\ln x(t))' = \lim_{t \rightarrow +\infty} a - by = a - bl_y$. Comme on a vu dans les TDs précédents, si $a - bl_y \neq 0$, alors $\ln x(t) \rightarrow \pm\infty$: absurde car x bornée et ne peut pas tendre vers 0 (c'est une conséquence de $H(x, y) = \text{constante}$). Donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \frac{a}{b}$. Or y est monotone : si elle prend la valeur a/b sur $[t_0, +\infty[$, alors elle est constante égale à a/b , puis le système donne $x(t) = c/d$ pour $t > t_0$, ce qui est absurde. Donc $y(t) \neq \frac{a}{b}$ pour tout $t \geq t_0$. En faisant la même étude que pour x , on en déduit donc que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \frac{a}{b} \text{ et } \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \frac{c}{d} \text{ avec } x, y \text{ monotones sur } [t_0, +\infty[$$

Comme $t \mapsto H(x(t), y(t))$ est constante, en passant à la limite, on obtient

$$H(x(t), y(t)) = H(c/d, a/b) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Or $\lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t), y(t)) = (c/d, a/b)$: comme $(c/d, a/b)$ est un point de min local strict, on a donc $(x(t), y(t)) = (c/d, a/b)$ pour $t \gg 1$, puis pour tout t par unicité dans Cauchy-Lipschitz. Ce qui est absurde.

Preuve de la périodicité : Donc pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, il existe $t \geq t_0$ tel que $x(t) = \frac{c}{d}$. Il existe donc $t_1 < t_2 < t_3$ réels tels que $x(t_i) = \frac{c}{d}$ pour $i = 1, 2, 3$. Comme il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $H(x(t), y(t)) = C$ pour tout t , il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $f(y(t_i)) = K$ pour tout $i = 1, 2, 3$ avec $f(z) = bz - a \ln z$ pour tout $z > 0$. Une étude des variations de f montre que l'équation $f(z) = K$ admet au plus deux solutions, donc il existe $i \neq j$ tels que $y(t_i) = y(t_j)$. Soient $\tilde{x}(t) := x(t + t_j - t_i)$ et $\tilde{y}(t) := y(t + t_j - t_i)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Comme $(\tilde{x}, \tilde{y})$ vérifie le même système que (x, y) et qu'elles coïncident en t_i , elles sont égales par unicité. Ainsi x et y sont $|t_j - t_i|$ -périodiques.

Comportement périodique : on va aller un peu plus loin. Remarquons que $t \mapsto (c/d, a/b)$ est l'unique solution constante du système avec $x_0, y_0 > 0$. On considère maintenant une solution non-constante (x, y) . Soit $C \in \mathbb{R}$ tel que $H(x(t), y(t)) = C$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $x(t) = \frac{c}{d}$. On a alors

$$f(y(t)) = by(t) - a \ln y(t) = H(x(t), y(t)) - dx(t) + c \ln y(t) = C - c + d \ln(c/d) := K$$

Une rapide étude de la fonction f montre que

- Si $K < f(a/b)$, il n'y a pas de solution de $f(z) = K$,
- Si $K = f(a/b)$, $z = a/b$ est l'unique solution de $f(z) = K$,
- Si $K > f(a/b)$, l'équation $f(z) = K$ admet exactement deux solutions $0 < y_K^- < \frac{a}{b} < y_K^+$

Comme $f(y(t)) = K$, le premier cas n'a pas lieu. Si le second cas a lieu, alors $y(t) = a/b$, or $x(t) = c/d$, donc par unicité (x, y) est constante, ce qui est contraire à notre hypothèse initiale. Ainsi, on est dans l'une des deux situations suivantes :

$$\text{si } x(t) = \frac{c}{d} \text{ alors } y'(t) = 0 \text{ et } \begin{cases} \text{Soit } y(t) = y_K^- < \frac{a}{b} & \text{et } x'(t) > 0 \\ \text{Soit } y(t) = y_K^+ > \frac{a}{b} & \text{et } x'(t) < 0 \end{cases}$$

Soit donc $t_1 \in \mathbb{R}$ tel que $x(t_1) = \frac{c}{d}$. Supposons que $y(t_1) = y_K^- < \frac{a}{b}$. Dans ce cas $x'(t_1) > 0$, et donc il existe $\epsilon > 0$ tel que $x(t) > \frac{c}{d}$ pour $t_1 < t < t_1 + \epsilon$. Comme x touche de nouveau c/d , soit $t_2 > t_1$ le premier tel point. Donc $x(t) > c/d$ pour $t \in]t_1, t_2[$ et $x(t_2) = c/d$. Ainsi $y'(t) > 0$ pour $t_1 < t < t_2$ et donc $y(t_2) > y(t_1) = y_K^-$. Or $y(t_2) \in \{y_K^-, y_K^+\}$, donc $y(t_2) = y_K^+ > a/b$ et $x'(t_2) < 0$. En refaisant le même raisonnement, on en déduit qu'il existe $t_3 > t_2$ tel que $x(t) < c/d$ et y décroît sur

$]t_2, t_3[$ avec $x(t_3) = c/d$ et $y(t_3) = y_K^-$. Et ainsi, avec le raisonnement précédent, x, y sont $(t_3 - t_1)$ -périodiques et cela recommence. Même raisonnement si $y(t_1) = y_K^+$.

Interprétation : x représente la proie, mettons des lapins, et y les prédateurs, mettons des renards. En l'absence de lapins ($x = 0$), $y' = -cy$ et la population de renards décroît exponentiellement vers 0. En l'absence de renards ($y = 0$), $x' = ax$ et la population de lapins croît exponentiellement.

S'il y a peu de renards ($y < a/b$), alors la population de lapins augmente ($x' > 0$). Du coup les renards ont plus de nourriture, et lorsque x atteint le niveau critique c/d , leur population vient à augmenter. Du coup plus de lapins sont mangés, et leur population atteint un maximum avant de décroître. Les renards ayant moins de nourriture, leur population croît moins vite pour décroître et arriver en-dessous de a/b : avec peu de prédateurs, la population des lapins peut augmenter, et tout recommence (c'est périodique).

2. UN SYSTÈME LINÉAIRE EXPLICITE

Exercice 2. Intégrez le système différentiel suivant, où les fonctions sont à valeur dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x' = 5x + 4y + 2z + e^{-t} \\ y' = 4x + 5y + 4z + e^t \sin t \\ z' = -12x - 14y - 9z + e^t \cos t \end{cases}$$

3. UN PROBLÈME DE TYPE DIRICHLET

Exercice 3. On se donne $p, q \in C^0([0, 1])$ telles que $q(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0, 1]$. On cherche à montrer que pour tout $f \in C^0([0, 1])$, il existe une unique fonction $y \in C^2([0, 1])$ telle que

$$\begin{cases} -y'' + py' + qy = f & \text{dans } [0, 1] \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}.$$

Question préliminaire : pourquoi n'est-on pas dans le cadre du théorème de Cauchy-Lipschitz ?

Solution : Pour une EDO du second ordre, le théorème de Cauchy-Lipschitz donne l'existence et l'unicité en connaissant $y(0)$ et $y'(0)$. Ici, on cherche à imposer $y(1)$, donc ce n'est pas le bon cadre.

1ère étape : Unicité. On commence par étudier l'unicité. Pour cela, on se donne $y \in C^2([0, 1])$ telle que

$$\begin{cases} -y'' + py' + qy = 0 & \text{dans } [0, 1] \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}. \quad (E)$$

On suppose que $y \not\equiv 0$.

- (1) Montrez que $y'(0) \neq 0$. Sans perdre en généralité, on suppose que $y'(0) > 0$.

Solution : Si $y'(0) = 0$, alors y est solution de $-y'' + py' + qy = 0$ avec $y(0) = y'(0) = 0$. On est alors dans le cadre de Cauchy-Lipschitz linéaire pour lequel on a unicité. La fonction nulle étant solution, on a alors $y \equiv 0$, ce qui est absurde.

- (2) Montrez qu'il existe $t_0 \in]0, 1]$ tel que $y(0) = y(t_0) = 0$ et $y(t) > 0$ pour tout $t \in]0, t_0[$. Que peut-on dire de $y'(t_0)$? Faites un dessin.

Solution : Comme $y'(0) > 0$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $\frac{y(t)}{t} > 0$ pour $t \in]0, \epsilon]$, donc $y(t) > 0$ sur $]0, \epsilon]$. Soit $t_0 := \inf\{t \in [\epsilon, 1] \text{ tels que } y(t) = 0\}$. L'ensemble étant non-vide et borné, l'infimum existe. Soit $(t_i)_i$ une suite de $[\epsilon, 1]$ telle que $y(t_i) = 0$ et qui converge vers t_0 . Par continuité et comme $[\epsilon, 1]$ fermé, $t_0 \in [\epsilon, 1]$ et $y(t_0) = 0$. Comme $y(t) \neq 0$ pour $t \in [\epsilon, t_0[$, y continue et $y(\epsilon) > 0$, on a $y(t) > 0$. Pour $t \in]0, t_0[$, on a donc $y(t) > 0$. Comme $y'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0^-} \frac{y(t)}{t - t_0}$, on a $y'(t_0) \leq 0$. En fait, on a même < 0 car

sinon, comme $y(t_0) = 0$, en raisonnant comme à la première question, y serait la fonction nulle, ce qui est impossible.

- (3) On suppose dans cette question seulement que $q > 0$. En étudiant un point de maximum de y sur $[0, t_0]$, déduisez-en une contradiction.

Solution : Comme y continue sur $[0, 1]$ compacte, elle atteint son maximum en un point $t_M \in [0, 1]$. D'après la question précédente, $y(t_M) > 0$, et donc $t_M \in]0, 1[$. Il s'ensuit que $y'(t_M) = 0$ et $y''(t_M) \leq 0$. Ceci contredit l'identité $-y''(t_M) + q(t_M)y(t_M) = 0$. Donc $y \equiv 0$.

- (4) Dans le cas général, étudiez les variations de $t \mapsto e^{-\int_0^t p(s) ds} y'(t)$ sur $[0, t_0]$ et déduisez-en aussi une contradiction.

Solution : Soit f cette fonction. Elle est dérivable et

$$f'(t) = e^{-\int_0^t p(s) ds} (y''(t) - p(t)y'(t)) = e^{-\int_0^t p(s) ds} q(t)y(t) \geq 0 \text{ pour } 0 \leq t \leq t_0.$$

Donc f croissante sur $[0, t_0]$. Or $f(0) = y'(0) > 0$ et $f(t_0) = e^{-\int_0^{t_0} p(s) ds} y'(t_0) \leq 0$, ce qui contredit la croissance. Donc $y \equiv 0$.

2ème étape : Résolution du problème de Dirichlet avec $f \equiv 0$. On pose $E := \{y \in C^2([0, 1]) / -y'' + py' + qy = 0 \text{ sur } [0, 1]\}$ et

$$\begin{aligned} T : E &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ y &\mapsto (y(0), y(1)) \end{aligned}$$

En étudiant l'application linéaire T , montrez que pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, il existe un unique $y \in C^2([0, 1])$ tel que $-y'' + py' + qy = 0$ sur $[0, 1]$ et $y(0) = \alpha, y(1) = \beta$.

Solution : L'application est clairement linéaire. D'après la première étape, $\text{Ker } T = \{0\}$, donc T est injective. Il suit du cours que $\dim_{\mathbb{R}} E = 2 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2$: donc T est bijective. La conclusion est exactement la surjectivité.

3ème étape : Résolution du problème de Dirichlet en général. En vous ramenant au cas $f \equiv 0$, montrez l'existence et l'unicité de la solution de (E) .

Solution : Soit $y_0 \in C^2([0, 1])$ solution de $-y_0'' + py_0' + qy_0 = f$ avec $y_0(0) = y_0'(0) = 0$: l'existence est une application directe du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire. Soit $y \in C^2([0, 1])$. Alors y est solution de (E) ssi $z := y - y_0$ est solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} -z'' + pz' + qz = 0 \quad \text{dans } [0, 1] \\ z(0) = 0 \\ z(1) = -y_0(1) \end{array} \right\}.$$

Il suit de l'étape précédente qu'on a existence et unicité de cette solution. On en déduit l'existence et l'unicité de la solution de (E) .

4ème étape : Nécessité de la condition sur q . Pour $\omega > 0$, on considère l'équation

$$\left\{ \begin{array}{l} y'' + \omega^2 y = 0 \quad \text{dans } [0, 1] \\ y(0) = y(1) = 0 \end{array} \right\}. \quad (E_\omega)$$

En résolvant explicitement cette équation, montrez qu'il existe un ensemble $\Lambda \in]0, +\infty[$ dénombrable tel que :

- Si $\omega \notin \Lambda$, alors la fonction nulle est la seule solution de (E_ω)
- Si $\omega \in \Lambda$, il y a une infinité de solutions de (E_ω) .

Solution : y est solution de $y'' + \omega^2 y = 0$ ssi il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $y(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ pour tout t . Il suit de $y(0) = 0$ que $A = 0$. Avec $y(1) = 0$, on obtient $B \sin \omega = 0$. Soit $\Lambda = \pi \mathbb{N}^*$. Alors :

- Si $\omega \notin \Lambda$, alors $\sin \omega \neq 0$ et donc $B = 0$ puis $y \equiv 0$.
- Si $\omega \in \Lambda$, alors $\sin \omega = 0$ et donc y solution de (E_ω) ssi il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que $y(t) = B \sin(\omega t)$ pour tout t .

4. LE WRONSKIEN

Exercice 4. Soit $A \in C^0(I, M_n(\mathbb{R}))$ et soit l'équation différentielle $Y' = A(t)Y$, notée (E) avec $Y \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$. Pour $Y_1, \dots, Y_n$ des solutions de (E) , on définit le *wronskien* par $w(t) := \det(Y_1(t), \dots, Y_n(t))$ pour tout $t \in I$.

- (1) Montrez que $w(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$ ssi $w \not\equiv 0$ ssi $(Y_1, \dots, Y_n)$ est une famille libre dans $C^1(I, \mathbb{R}^n)$.

Solution : On est dans les hypothèses de Cauchy-Lipschitz linéaire. Notons (i), (ii) et (iii) les trois assertions. (i) $\Rightarrow$ (ii) est claire.

Montrons que (iii) $\Rightarrow$ (i). On suppose la famille $(Y_1, \dots, Y_n)$ libre. Supposons qu'il existe $t_0 \in I$ tel que $w(t_0) = 0$. Donc la famille $(Y_1(t_0), \dots, Y_n(t_0))$ est liée, donc il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ non tous nuls tels que $\sum_i \lambda_i Y_i(t_0) = 0$. Soit $Z := \sum_i \lambda_i Y_i$. Alors $Z' = AZ$ et $Z(t_0) = 0$. Par unicité, $Z \equiv 0$, donc $\sum_i \lambda_i Y_i$ donc la famille $(Y_1, \dots, Y_n)$ est liée dans $C^1(I, \mathbb{R}^n)$, ce qui est absurde. Donc $w(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$.

Montrons que (ii) $\Rightarrow$ (iii). On suppose $w \not\equiv 0$. Si $(Y_1, \dots, Y_n)$ est liée dans $C^1(I, \mathbb{R}^n)$, alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ non tous nuls tels que $\sum_i \lambda_i Y_i = 0$. Donc pour tout $t \in I$, $\sum_i \lambda_i Y_i(t) = 0$, donc $(Y_1(t), \dots, Y_n(t))$ est liée dans $\mathbb{R}^n$, donc $w(t) = 0$, ce qui est absurde. Donc $(Y_1, \dots, Y_n)$ est libre dans $C^1(I, \mathbb{R}^n)$.

- (2) Montrez que pour tout $t_0 \in I$, on a

$$w(t) = w(t_0) \cdot e^{\int_{t_0}^t \text{Tr}(A(s)) ds} \text{ pour tout } t \in I.$$

Solution : La fonction w est C^1 comme composée. Comme le déterminant est multilinéaire, on a

$$\begin{aligned} w'(t) &= \det(Y_1'(t), Y_2(t), \dots, Y_n(t)) + \dots + \det(Y_1(t), Y_2(t), \dots, Y_n'(t)) \\ &= \det(AY_1(t), Y_2(t), \dots, Y_n(t)) + \dots + \det(Y_1(t), Y_2(t), \dots, AY_n(t)) \end{aligned}$$

pour tout $t \in I$. Montrons que pour tous $X_1, \dots, X_n \in \mathbb{R}^n$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$, on a

$$\det(AX_1, X_2, \dots, X_n) + \dots + \det(X_1, X_2, \dots, AX_n) = \text{Tr}(A) \det(X_1, X_2, \dots, X_n).$$

Pour cela, on note $f(X_1, \dots, X_n)$ le membre de gauche. On remarque que f est multilinéaire et alternée, donc proportionnelle au déterminant. Il existe donc $k \in \mathbb{R}$ tel que $f(X_1, \dots, X_n) = k \det(X_1, \dots, X_n)$ pour tous $X_1, \dots, X_n \in \mathbb{R}^n$. En prenant la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on obtient $k = \text{Tr}(A)$ ce qui prouve l'identité recherchée.

Ainsi, pour tout $t \in I$, on a $w'(t) = \text{Tr}(A(t)) \det(Y_1(t), Y_2(t), \dots, Y_n(t)) = \text{Tr}(A(t))w(t)$. C'est une équation scalaire linéaire d'ordre 1 de type $w' = \omega w$, ce qui donne le résultat attendu.

- (3) Écrivez le wronskien de l'équation $y'' + qy = 0$ avec $q \in C^0(I)$.

Solution : On transforme cette équation en une EDO d'ordre 1 en posant

$$Y(t) := \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \text{ et donc } Y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & 0 \end{pmatrix} Y(t)$$

pour tout $t \in I$. La matrice est de trace nulle. On se donne $y_1, y_2 \in C^2(I)$ deux solutions de $y'' + qy = 0$. Le wronskien est alors

$$w(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} \text{ et } w(t) = w(t_0) \text{ pour tout } t \in I.$$

Exercice 5. Soient $a, b \in C^0(\mathbb{R})$ et soient $y_1, y_2 \in C^2(\mathbb{R})$ deux solutions linéairement indépendantes de $y'' + ay' + by = 0$ (on justifiera leur existence).

- (1) Montrez que les zéros éventuels de y_1 sont isolés.

Solution : Comme y_1, y_2 forment une famille libre, alors $y_1 \not\equiv 0$. Donc, Cf ce qui avait été prouvé dans un des premiers TDs, les zéros éventuels sont isolés.

- (2) En utilisant le wronskien, montrez qu'entre deux zéros consécutifs de y_1 , il y a exactement un zéro de y_2 .

Solution : On pose

$$w(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t) \text{ pour tout } t \in I.$$

Il suit de l'exo précédent que $w(t)$ est de signe constant pour tout t . Soient $t_1 < t_2$ deux zéros isolés de y_1 . Du coup, y_1 est de signe constant sur $]t_1, t_2[$, mettons positif pour simplifier. Dans ce cas, Cf l'exo sur le problème de Dirichlet, on a

$$y_1(t_1) = y_1(t_2) = 0 \text{ et } y_1'(t_1) > 0 > y_1'(t_2).$$

Le Wronskien est alors

$$w(t_1) = -y_1'(t_1)y_2(t_1) \text{ et } w(t_2) = -y_1'(t_2)y_2(t_2).$$

Or $w(t_1)$ et $w(t_2)$ sont non-nuls et de même signe, $y_1'(t_1)$ et $y_1'(t_2)$ sont de signes opposés, donc $y_2(t_1)$ et $y_2(t_2)$ sont non-nuls et de signes opposés. La fonction y_2 étant continue, elle s'annule au moins une fois sur $]t_1, t_2[$.

Si y_2 s'annule une autre fois sur $]t_1, t_2[$, alors comme $y_2 \not\equiv 0$, ses zéros sont isolés et on trouve deux zéros consécutifs sur $]t_1, t_2[$. En échangeant les rôles de y_1 et y_2 , y_1 devrait alors s'annuler sur $]t_1, t_2[$: absurde car t_1 et t_2 sont des zéros consécutifs.

Donc y_2 s'annule exactement une fois sur $]t_1, t_2[$. Finalement, entre deux zéros consécutifs de y_1 , il y a exactement un zéro de y_2 .

Exercice 6. Soient $q, Q \in C^0(\mathbb{R})$ telles que $Q \geq q$ et soient $x, y \in C^2(\mathbb{R})$ telles que $x'' + qx = 0$ et $y'' + Qy = 0$ avec $x \not\equiv 0$. En vous inspirant du wronskien d'une équation d'ordre deux, montrez qu'entre deux zéros éventuels de x , il y a au moins un zéro de y .

Solution : On pose

$$w(t) = \begin{vmatrix} x(t) & y(t) \\ x'(t) & y'(t) \end{vmatrix} = x(t)y'(t) - x'(t)y(t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

En dérivant, on obtient

$$w' = x'y' + xy'' - x''y - x'y' = -Qxy + qxy = -(Q - q)xy.$$

Supposons qu'il existe deux zéros distincts $t_1 < t_2$ de x . Comme $x \not\equiv 0$, ce sont des zéros isolés. Comme à l'exo précédent, on se donne $t_3 \in]t_1, t_2[$ un zéro tel que x ne s'annule pas sur $]t_1, t_3[$. Quitte à changer x en $-x$, on peut supposer que

$$x(t_1) = x(t_3) = 0 \text{ et } x'(t_1) > 0 > x'(t_3).$$

Supposons que y ne s'annule pas sur $[t_1, t_2]$. Par continuité, elle reste de signe constant, et, quitte à changer y en $-y$, on peut supposer que $y(t) > 0$ sur $[t_1, t_2]$.

Ainsi, $w'(t) \leq 0$ sur $[t_1, t_3]$, donc $w(t_1) \geq w(t_3)$. Or

$$w(t_1) = -x'(t_1)y(t_1) < 0 \text{ et } w(t_3) = -x'(t_3)y(t_3) > 0,$$

ce qui contredit $w(t_1) \geq w(t_3)$. Donc y s'annule sur $[t_1, t_2]$.