

TD4 : Equations linéaires et une étude qualitative

1. LE SYSTÈME DE LOTKA-VOLTERRA

(Aussi appelé "proies-prédateurs").

Exercice 1. On considère une solution maximale $(x, y) \in C^1(I, \mathbb{R}^2)$ du système $x' = ax - bxy$ et $y' = -cy + dxy$ avec $a, b, c, d > 0$ et on suppose qu'il existe $t_0 \in I$ tel que $x(t_0) > 0$ et $y(t_0) > 0$.

- (1) Montrez que $x > 0$ et $y > 0$ sur leur intervalle de définition.
- (2) En utilisant le système, montrez que x et y restent bornés en temps fini. Déduisez-en que x, y sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier.
- (3) On pose $H(x, y) := by + dx - a \ln y - c \ln x$ pour $x, y > 0$. Montrez que $t \mapsto H(x(t), y(t))$ est constante sur $\mathbb{R}$.
- (4) En utilisant la fonction H et les variations de x et y , montrez que (x, y) est périodique.

2. UN SYSTÈME LINÉAIRE EXPLICITE

Exercice 2. Intégrez le système différentiel suivant, où les fonctions sont à valeur dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x' = 5x + 4y + 2z + e^{-t} \\ y' = 4x + 5y + 4z + e^t \sin t \\ z' = -12x - 14y - 9z + e^t \cos t \end{cases}$$

3. UN PROBLÈME DE TYPE DIRICHLET

Exercice 3. On se donne $p, q \in C^0([0, 1])$ telles que $q(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0, 1]$. On cherche à montrer que pour tout $f \in C^0([0, 1])$, il existe une unique fonction $y \in C^2([0, 1])$ telle que

$$\begin{cases} -y'' + py' + qy = f & \text{dans } [0, 1] \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}.$$

1ère étape : Unicité. On commence par étudier l'unicité. Pour cela, on se donne $y \in C^2([0, 1])$ telle que

$$\begin{cases} -y'' + py' + qy = 0 & \text{dans } [0, 1] \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}. \quad (E)$$

On suppose que $y \not\equiv 0$.

- Montrez que $y'(0) \neq 0$. Sans perdre en généralité, on suppose que $y'(0) > 0$
- Montrez qu'il existe $t_0 \in]0, 1]$ tel que $y(0) = y(t_0) = 0$ et $y(t) > 0$ pour tout $t \in]0, t_0[$. Que peut-on dire de $y'(t_0)$? Faites un dessin.
- On suppose dans cette question seulement que $q > 0$. En étudiant un point de maximum de y sur $[0, t_0]$, déduisez-en une contradiction.
- Dans le cas général, étudiez les variations de $t \mapsto e^{-\int_0^t p(s) ds} y'(t)$ sur $[0, t_0]$ et déduisez-en aussi une contradiction.

2ème étape : Résolution du problème de Dirichlet avec $f \equiv 0$. On pose $E := \{y \in C^2([0, 1]) / -y'' + py' + qy = 0 \text{ sur } [0, 1]\}$ et

$$\begin{aligned} T: E &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ y &\mapsto (y(0), y(1)) \end{aligned}$$

En étudiant l'application linéaire T , montrez que pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, il existe un unique $y \in C^2([0, 1])$ tel que $-y'' + py' + qy = 0$ sur $[0, 1]$ et $y(0) = \alpha, y(1) = \beta$.

3ème étape : Résolution du problème de Dirichlet en général. En vous ramenant au cas $f \equiv 0$, montrez l'existence et l'unicité de la solution de (E) .

4ème étape : Nécessité de la condition sur q . Pour $\omega > 0$, on considère l'équation

$$\left\{ \begin{array}{l} y'' + \omega^2 y = 0 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{array} \right. \text{ dans } [0, 1] \quad (E_\omega)$$

En résolvant explicitement cette équation, montrez qu'il existe un ensemble $\Lambda \in]0, +\infty[$ dénombrable tel que :

- Si $\omega \notin \Lambda$, alors la fonction nulle est la seule solution de (E_ω)
- Si $\omega \in \Lambda$, il y a une infinité de solutions de (E_ω) .

4. LE WRONSKIEN

Exercice 4. Soit $A \in C^0(I, M_n(\mathbb{R}))$ et soit l'équation différentielle $Y' = A(t)Y$, notée (E) avec $Y \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$. Pour $Y_1, \dots, Y_n$ des solutions de (E) , on définit le *wronskien* par $w(t) := \det(Y_1(t), \dots, Y_n(t))$ pour tout $t \in I$.

- (1) Montrez que $w(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$ ssi $w \not\equiv 0$ ssi $(Y_1, \dots, Y_n)$ est une famille libre dans $C^1(I, \mathbb{R}^n)$.
- (2) Montrez que pour tout $t_0 \in I$, on a

$$w(t) = w(t_0) \cdot e^{\int_{t_0}^t \text{Tr}(A(s)) ds} \text{ pour tout } t \in I.$$

- (3) Écrivez le wronskien de l'équation $y'' + qy = 0$ avec $q \in C^0(I)$.

Exercice 5. Soient $a, b \in C^0(\mathbb{R})$ et soient $y_1, y_2 \in C^2(\mathbb{R})$ deux solutions linéairement indépendantes de $y'' + ay' + by = 0$ (on justifiera leur existence).

- (1) Montrez que les zéros éventuels de y_1 sont isolés.
- (2) En utilisant le wronskien, montrez qu'entre deux zéros consécutifs de y_1 , il y a exactement un zéro de y_2 .

Exercice 6. Soient $q, Q \in C^0(\mathbb{R})$ telles que $Q \geq q$ et soient $x, y \in C^2(\mathbb{R})$ telles que $x'' + qx = 0$ et $y'' + Qy = 0$. En vous inspirant du wronskien d'une équation d'ordre deux, montrez qu'entre deux zéros éventuels de x , il y a au moins un zéro de y .