

TD5 : Systèmes linéaires

Exercice 1. Intégrez le système différentiel suivant,

$$\begin{cases} x' = -3x + 3y + e^t \\ y' = -6x + 8y \end{cases} \quad (1)$$

Exercice 2. Intégrez le système suivant

$$\begin{cases} x' = -3x + 3y + e^t \\ y' = -6x + 8y + e^{-t} \end{cases} \quad (2)$$

Exercice 3. Intégrez le système suivant

$$\begin{cases} x' = 3x + 3y - 3z + 1 \\ y' = 2x + 4y - 2z \\ z' = -x + y + z + 2e^{2t} \end{cases} \quad (3)$$

Solution de l'exo 1 : Commençons par l'équation homogène $X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$. Diagonalisons A . On a

$$\chi_A = \begin{vmatrix} -3-X & 3 \\ -6 & 8-X \end{vmatrix} = (-3-X)(8-X) + 18 = X^2 - 5X - 6 = (X+1)(X-6)$$

donc deux valeurs propres -1 et 6 en dimension 2, la matrice est Dz.

Espace propre de -1 . On a

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 3y = -x \\ -6x + 8y = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 3y = 0 \end{cases} \text{ donc } E_{-1} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Espace propre de 6 . On a

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 3y = 6x \\ -6x + 8y = 6y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x \end{cases} \text{ donc } E_6 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

et donc

$$A = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} P^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

et donc pour $t \in \mathbb{R}$, on a

$$e^{tA} = P e^{tD} P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{6t} \end{pmatrix} P^{-1}$$

Ainsi

$$X' = AX \Leftrightarrow X = e^{tA} X(0) = P \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{6t} \end{pmatrix} P^{-1} X(0)$$

en posant $P^{-1}X(0) = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$, on a

$$X' = AX \Leftrightarrow X = e^{tA} X(0) = P \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{6t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{6t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3C_1 e^{-t} + C_2 e^{6t} \\ 2C_1 e^{-t} + 3C_2 e^{6t} \end{pmatrix}$$

Système avec second membre. On cherche des solution de (1) sous la forme

$$\begin{cases} x(t) = 3C_1(t)e^{-t} + C_2(t)e^{6t} \\ y(t) = 2C_1(t)e^{-t} + 3C_2(t)e^{6t} \end{cases}$$

Le couple (x, y) est alors solution de (1) si et seulement si

$$\begin{cases} 3C_1'(t)e^{-t} + C_2'(t)e^{6t} = e^t \\ 2C_1'(t)e^{-t} + 3C_2'(t)e^{6t} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(t)e^{-t} = \frac{3}{7}e^t \\ C_2'(t)e^{6t} = -\frac{2}{7}e^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(t) = \frac{3}{7}e^{2t} \\ C_2'(t) = -\frac{2}{7}e^{-5t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1(t) = \frac{3}{14}e^{2t} + A \\ C_2(t) = \frac{2}{35}e^{-5t} + B \end{cases}$$

En choisissant $A = B = 0$, on obtient comme solution particulière

$$\left\{ \begin{array}{l} x_p(t) = 3C_1(t)e^{-t} + C_2(t)e^{6t} = \frac{9}{14}e^{2t}e^{-t} + \frac{2}{35}e^{-5t}e^{6t} = \frac{7}{10}e^t \\ y_p(t) = 2C_1(t)e^{-t} + 3C_2(t)e^{6t} = \frac{3}{5}e^t \end{array} \right\}$$

donc

$$(x, y) \text{ solution de (1)} \Leftrightarrow \exists A, B \in \mathbb{R} \text{ tels que } \left\{ \begin{array}{l} x(t) = \frac{7}{10}e^t + 3Ae^{-t} + Be^{6t} \\ y(t) = \frac{3}{5}e^t + 2Ae^{-t} + 3Be^{6t} \end{array} \right\}$$

Solution de l'exo 2 : L'équation homogène a déjà été résolue. Il suffit de trouver une solution particulière avec la variation de la constante. On cherche des solution de (2) sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = 3C_1(t)e^{-t} + C_2(t)e^{6t} \\ y(t) = 2C_1(t)e^{-t} + 3C_2(t)e^{6t} \end{array} \right\}$$

Le couple (x, y) est alors solution de (2) si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{l} 3C_1'(t)e^{-t} + C_2'(t)e^{6t} = e^t \\ 2C_1'(t)e^{-t} + 3C_2'(t)e^{6t} = e^{-t} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 7C_1'(t)e^{-t} = 3e^t - e^{-t} \\ -7C_2'(t)e^{6t} = 2e^t - 3e^{-t} \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_1'(t) = \frac{3}{7}e^{2t} - \frac{1}{7}e^{-7t} \\ C_2'(t) = -\frac{2}{7}e^{-5t} + \frac{3}{7}e^{-7t} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_1(t) = \frac{3}{14}e^{2t} - \frac{1}{7}e^{-7t} + A \\ C_2(t) = \frac{2}{35}e^{-5t} - \frac{3}{49}e^{-7t} + B \end{array} \right\}$$

En choisissant $A = B = 0$, on obtient comme solution particulière

$$\left\{ \begin{array}{l} x_p(t) = 3C_1(t)e^{-t} + C_2(t)e^{6t} = \frac{7}{10}e^t - \left(\frac{3}{7}t + \frac{3}{49}\right)e^{-t} \\ y_p(t) = \frac{3}{5}e^t - \left(\frac{2}{7}t + \frac{9}{49}\right)e^{-t} \end{array} \right\}$$

donc

$$(x, y) \text{ solution de (2)} \Leftrightarrow \exists A, B \in \mathbb{R} \text{ tels que } \left\{ \begin{array}{l} x(t) = \frac{7}{10}e^t - \left(\frac{3}{7}t + \frac{3}{49}\right)e^{-t} + 3Ae^{-t} + Be^{6t} \\ y(t) = \frac{3}{5}e^t - \left(\frac{2}{7}t + \frac{9}{49}\right)e^{-t} + 2Ae^{-t} + 3Be^{6t} \end{array} \right\}$$

Solution de l'exo 3 : Commençons par l'équation homogène $X' = AX$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Diagonalisons } A. \text{ On a}$$

$$\begin{aligned} \chi_A &= \begin{vmatrix} 3-X & 3 & -3 \\ 2 & 4-X & -2 \\ -1 & 1 & 1-X \end{vmatrix} \\ &= (3-X)((4-X)(1-X) + 2) - 2(3(1-X) + 3) - 1 \times (-6 + 3(4-X)) = -X^3 + 8X^2 - 12X \\ &= -X(X^2 - 8X + 12) = -X(X-2)(X-6) \end{aligned}$$

donc trois valeurs propres 0, 2 et 6 en dimension 3, la matrice est Dz.

Espace propre de 0. On a

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x + 3y - 3z = 0 \\ 2x + 4y - 2z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x = z \end{array} \right\} \Leftrightarrow \text{donc } E_0 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Espace propre de 2. On a

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x + 3y - 3z = 2x \\ 2x + 4y - 2z = 2y \\ -x + y + z = 2z \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 3y - 3z = 0 \\ 2x + 2y - 2z = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{array} \right\} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 3y - 3z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = z \end{array} \right\} \Leftrightarrow \text{donc } E_2 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Espace propre de 6. On a

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x + 3y - 3z = 6x \\ 2x + 4y - 2z = 6y \\ -x + y + z = 6z \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -3x + 3y - 3z = 0 \\ 2x - 2y - 2z = 0 \\ -x + y - 5z = 0 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x + y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ -x + y - 5z = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = 0 \\ y = x \end{array} \right\} \Leftrightarrow \text{donc } E_6 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et donc

$$A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} P^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc pour $t \in \mathbb{R}$, on a

$$e^{tA} = P e^{tD} P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{0t} = 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{6t} \end{pmatrix} P^{-1}$$

Ainsi

$$X' = AX \Leftrightarrow X = e^{tA} X(0) = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{6t} \end{pmatrix} P^{-1} X(0)$$

en posant $P^{-1}X(0) = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$, on a

$$X' = AX \Leftrightarrow X = e^{tA} X(0) = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{6t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{6t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = C_1 + C_3 e^{6t} \\ y(t) = C_2 e^{2t} + C_3 e^{6t} \\ z(t) = C_1 + C_2 e^{2t} \end{cases}}$$

Pour résoudre (3), on utilise la variation de la constante et on pose

$$\begin{cases} x_p(t) = C_1(t) + C_3(t) e^{6t} \\ y_p(t) = C_2(t) e^{2t} + C_3(t) e^{6t} \\ z_p(t) = C_1(t) + C_2(t) e^{2t} \end{cases}$$

qui est solution de (3) si et seulement si

$$\begin{cases} C_1'(t) + C_3'(t) e^{6t} = 1 \\ C_2'(t) e^{2t} + C_3'(t) e^{6t} = 0 \\ C_1'(t) + C_2'(t) e^{2t} = 2e^{2t} \end{cases}$$

en faisant $L_1 - L_2 \rightarrow L_1$, on obtient

$$\begin{cases} C_1'(t) - C_2'(t) e^{2t} = 1 \\ C_2'(t) e^{2t} + C_3'(t) e^{6t} = 0 \\ C_1'(t) + C_2'(t) e^{2t} = 2e^{2t} \end{cases}$$

puis en calculant $L_1 + L_3$ et $L_3 - L_1$, et en réinjectant dans L_2 on obtient

$$\begin{cases} C_1'(t) = e^{2t} + 1/2 \\ C_2'(t) e^{2t} = e^{2t} - 1/2 \\ C_3'(t) e^{6t} = -e^{2t} + 1/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(t) = \frac{e^{2t}}{2} + \frac{1}{2}t + A \\ C_2(t) = t + \frac{1}{4}e^{-2t} + B \\ C_3(t) = \frac{1}{4}e^{-4t} - \frac{1}{12}e^{-6t} + C \end{cases}$$

en choisissant $A = B = C = 0$ ceci donne la solution particulière

$$\begin{cases} x_p(t) = \frac{3}{4}e^{2t} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{12} \\ y_p(t) = te^{2t} + \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{6} \\ z_p(t) = \frac{e^{2t}}{2} + te^{2t} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \end{cases}$$

Ainsi, en additionnant la solution particulière et les solutions de l'équation homogène, on obtient

$$(x, y, z) \text{ solution de (3)} \Leftrightarrow \exists A, B, C \in \mathbb{R} \text{ tels que } \begin{cases} x(t) = \frac{3}{4}e^{2t} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{12} + A + Ce^{6t} \\ y(t) = te^{2t} + \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{6} + Be^{2t} + Ce^{6t} \\ z(t) = \frac{e^{2t}}{2} + te^{2t} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} + A + Be^{2t} \end{cases}$$