

## Devoir 1 : à rendre la semaine du 22 septembre

### 1. EXERCICES

**Exercice 1.** Déterminez toutes les solutions  $y \in C^1(\mathbb{R})$  de  $xy' = y$ . Que vaut  $y(0)$  ?

**Exercice 2.** soit  $f \in C^1(\mathbb{R})$ . Soient deux fonctions  $y_1, y_2 \in C^1(I)$ ,  $I$  intervalle, solutions de  $y_i'' = f(y_i)$  sur  $I$  pour  $i = 1, 2$ . On suppose que ces deux fonctions coïncident en un point de maximum pour chacune. Montrez qu'elles coïncident partout. Que se passe-t-il si elles coïncident en un point qui est maximum pour  $y_1$  et minimum pour  $y_2$  ?

**Exercice 3.** (MFA) Rédigez la preuve du théorème d'unicité : si deux fonctions sont solutions de la même EDO avec même condition initiale (et qq autres hypothèses), alors elles coïncident sur l'intersection de leurs domaines de définition. Dans le cours, le résultat a été démontré dans un cas particulier ( $I = J = \mathbb{R}$ ), il faut traiter le cas général.

### 2. CONFINEMENT DANS UNE BOULE

On se donne un champ de vecteur  $X \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  et on note  $B = B(0, 1)$  la boule unité de  $\mathbb{R}^n$  centrée en 0. On suppose que

$$\langle X(p), p \rangle < 0 \text{ pour tout } p \in \partial B.$$

On se donne  $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$  une solution de  $x'(t) = X(x(t))$  pour tout  $t \in I$ , où  $I$  est un intervalle d'intérieur non-vidé.

- Montrez que s'il existe  $t_0 \in I$  tel que  $x(t_0) \in \partial B$ , alors il existe  $\delta > 0$  tel que  $x(t) \in B$  pour tout  $t \in ]t_0, t_0 + \delta[ \cap I$ . On pourra utiliser  $t \mapsto \|x(t)\|^2$  où  $\|\cdot\|$  est la norme Euclidienne usuelle.
- Montrez que s'il existe  $t_1 \in I$  tel que  $x(t_1) \in B$ , alors  $x(t) \in B$  pour tout  $t \in ]t_1, +\infty[ \cap I$ .
- On suppose qu'il existe  $T \in I$  tel que  $x(T) \in \overline{B}$ . Montrez alors que  $x(t) \in \overline{B}$  pour tout  $t \in I, t \geq T$ .

### 3. CONTINUITÉ PAR RAPPORT AUX CONDITIONS INITIALES

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  d'intérieur non vide et  $U$  un ouvert non-vidé de  $\mathbb{R}^n$ . On se donne  $f : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  continue et localement Lipschitzienne en la seconde variable. Pour  $t_0 \in I$  et  $x_0 \in U$ , il suit du théorème de Cauchy-Lipschitz qu'il existe  $\delta > 0$  tel qu'il existe une unique solution  $x \in C^1([t_0 - \delta, t_0 + \delta] \cap I, U)$  de

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) & \text{sur } [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \cap I \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Le but de cet exercice est de montrer que :

- La taille  $\delta > 0$  de l'intervalle peut être choisie indépendamment de  $x_0$  ;
- L'application  $x_0 \mapsto x \in C^1$  est continue (cet énoncé sera bien entendu précisé).

La preuve est proposée dans 3 cas, du plus restrictif au plus général. Il faut au minimum traiter le 1er cas. Les MFAs doivent faire au moins les Cas 1 et 2.

**Cas 1 : Le plus simple, Cf l'exo de TD.** On suppose que  $I = \mathbb{R}$ ,  $U = \mathbb{R}^n$  et il existe  $K > 0$  tel que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq K\|x - y\| \text{ pour tout } t \in \mathbb{R} \text{ et } x, y \in \mathbb{R}^n,$$

où  $\|\cdot\|$  est une norme sur  $\mathbb{R}^n$ .

**1.1.** En reprenant la preuve du TD, montrez qu'il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $p \in \mathbb{R}^n$ , il existe une unique fonction  $x_p \in C^1([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \mathbb{R}^n)$  telle que

$$\begin{cases} x_p'(t) = f(t, x_p(t)) & \text{sur } [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \\ x_p(t_0) = p. \end{cases}$$

**1.2.** En utilisant la représentation intégrale  $x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t \dots$ , montrez qu'il existe  $0 < \delta_1 \leq \delta$  et  $C > 0$  tels que pour tous  $p, q \in \mathbb{R}^n$ , on a

$$\sup_{t \in [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1]} \|x_p(t) - x_q(t)\| \leq C\|p - q\|.$$

(Avec un choix judicieux de  $\delta$  à la question précédente, il est possible de prendre  $\delta_1 = \delta$ .)

**1.3.** Montrez que

$$\begin{cases} \mathbb{R}^n & \rightarrow (C^0([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{C^0}) \\ p & \mapsto x_p \end{cases}$$

est continue. Ici, pour  $u \in C^0([a, b], \mathbb{R}^n)$  ( $a < b$ ), on a noté  $\|u\|_{C^0} := \sup_{t \in [a, b]} \|u(t)\|$ .

**1.4.** Montrez que

$$\begin{cases} \mathbb{R}^n & \rightarrow (C^1([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{C^1}) \\ p & \mapsto x_p \end{cases}$$

est continue. Ici, pour  $u \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$  ( $a < b$ ), on a noté  $\|u\|_{C^1} := \|u\|_{C^0} + \|u'\|_{C^0}$ .

**Cas 2.** On suppose que  $I = \mathbb{R}$ ,  $U = \mathbb{R}^n$  et on suppose toujours que  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continue et localement continue en la seconde variable. On fixe  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ .

**2.1.** En reprenant la preuve du cours, montrez qu'il existe  $r > 0$  et  $\delta > 0$  tels que pour tout  $p \in B(x_0, r)$ , il existe une unique fonction  $x_p \in C^1([t_0 - \delta, t_0 + \delta], B(x_0, 2r))$  telle que

$$\begin{cases} x_p'(t) = f(t, x_p(t)) & \text{sur } [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \\ x_p(t_0) = p. \end{cases}$$

Attention, il va y avoir des subtilités entre  $B(x_0, 2r)$  et  $\overline{B(x_0, 2r)}$ .

**2.2.** En utilisant la représentation intégrale  $x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t \dots$ , montrez qu'il existe  $0 < \delta_1 \leq \delta$  et  $C > 0$  tels que pour tous  $p, q \in \mathbb{R}^n$ , on a

$$\sup_{t \in [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1]} \|x_p(t) - x_q(t)\| \leq C\|p - q\|.$$

(Avec un choix judicieux de  $\delta$  à la question précédente, il est possible de prendre  $\delta_1 = \delta$ .)

**2.3.** Montrez que

$$\begin{cases} B(x_0, r) & \rightarrow (C^0([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{C^0}) \\ p & \mapsto x_p \end{cases}$$

est continue. Ici, pour  $u \in C^0([a, b], \mathbb{R}^n)$  ( $a < b$ ), on a noté  $\|u\|_{C^0} := \sup_{t \in [a, b]} \|u(t)\|$ .

**2.4.** Montrez que

$$\begin{cases} B(x_0, r) & \rightarrow (C^1([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{C^1}) \\ p & \mapsto x_p \end{cases}$$

est continue. Ici, pour  $u \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$  ( $a < b$ ), on a noté  $\|u\|_{C^1} := \|u\|_{C^0} + \|u'\|_{C^0}$ .

**Cas 3.** Le cas général. Débrouillez-vous.