

Corrigé du Devoir 2 : à rendre le 25 octobre

1. EXERCICES

Exercices 15, 6, 17 de la feuille de TD1.

Solution : voir le corrigé du TD1.

2. PROLONGEMENT

Soit $f \in C^1(]a, b[, \mathbb{R}^n)$ avec $a < b$. On suppose qu'il existe $L \in \mathbb{R}^n$ tel que $\lim_{t \rightarrow b^-} f'(t) = L$.

- (1) Montrez qu'il existe $\delta > 0$ tel que f' est bornée sur $[b - \delta, b[\subset]a, b[$.

Solution : Comme $\lim_{t \rightarrow b^-} \|f'(t)\| = \|L\| < \|L\| + 1$, Il existe $\delta' > 0$ tel que pour tout $t \in]a, b[\cap]b - \delta', b + \delta'[$, on a $\|f'(t)\| \leq \|L\| + 1 := M$. En prenant $\delta := \min\{b - a, \delta'\}/2$, on a la conclusion.

- (2) Montrez que $f(t)$ admet une limite, notée $l \in \mathbb{R}^n$, lorsque $t \rightarrow b^-$. On note $\tilde{f}$ le prolongement de f par continuité à $]a, b]$.

Solution : Comme $\|f(t)\| \leq M$ sur $[b - \delta, b[$, il suit de l'inégalité des accroissements finis que $\|f(t) - f(s)\| \leq M|t - s|$ pour tout $t, s \in [b - \delta, b[$. Pour montrer l'existence du prolongement, deux possibilités (en fait, ce sont les mêmes) :

- 1ère possibilité : Utiliser le th de prolongement. f est uniformément continue sur $[b - \delta, b[$ et à valeur dans $\mathbb{R}^n$ complet, elle admet donc un unique prolongement par continuité sur son adhérence $\overline{[b - \delta, b[} = [b - \delta, b]$. On en déduit le prolongement $\tilde{f}$ sur $]a, b]$.
- 2ème possibilité : démontrer ce théorème dans un cas particulier. Soit $(t_p)_p$ suite telle que $t_p \in [b - \delta, b[$ et $\lim_{p \rightarrow \infty} t_p = b$. Alors $\|f(t_p) - f(t_q)\| \leq M|t_p - t_q|$ pour tous $p, q \in \mathbb{N}$. Comme (t_p) est de Cauchy, alors $(f(t_p))_p$ aussi et elle admet donc une limite notée $l \in \mathbb{R}^n$. Pour $t \in [b - \delta, b[$, on a donc

$$\|f(t) - l\| \leq \|f(t) - f(t_p)\| + \|f(t_p) - l\| \leq M|t - t_p| + \|f(t_p) - l\| \leq M|t - b| + M|t_p - b| + \|f(t_p) - l\|.$$

Soit $\epsilon > 0$ et soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $|t_p - b| < \epsilon/(3M)$ et $\|f(t_p) - l\| < \epsilon/3$.

Pour $|t - b| < \epsilon/(3M)$, on a alors $\|f(t) - l\| < \epsilon$, et donc $f(t)$ admet l comme limite lorsque $t \rightarrow b^-$.

- (3) On suppose que $n = 1$. En utilisant l'égalité des accroissements finis, montrez que $\tilde{f}$ est dérivable en b et que sa dérivée est L .

Solution : Soit $\epsilon > 0$ et soit $\alpha > 0$ tel que $\|f'(t) - L\| < \epsilon$ pour $t \in]a, b[\cap]b - \alpha, b[$. Soit $t \in]b - \alpha, b$. Comme $\tilde{f}$ est continue sur $[t, b]$ et dérivable sur $]t, b[$, il existe $c_t \in]t, b[\subset]b - \alpha, b[$ tel que

$$\frac{\tilde{f}(t) - \tilde{f}(b)}{t - b} = f'(c_t).$$

(Ceci est spécifique à la dimension $n = 1$). Et donc

$$\left| \frac{\tilde{f}(t) - \tilde{f}(b)}{t - b} - L \right| = |f'(c_t) - L| < \epsilon \text{ car } c_t \in]b - \alpha, b[.$$

Donc le ratio admet une limite lorsque $t \rightarrow b^-$, donc $\tilde{f}$ est dérivable en b et $\tilde{f}'(b) = L$.

- (4) (Plus difficile) : dans le cas général, pour $x < b$, en appliquant l'inégalité des accroissements finis à $t \mapsto f(t) - Lt$ sur $[x, b - \epsilon]$ avec $\epsilon > 0$ petit, montrez que $\tilde{f}$ est dérivable en b et que sa dérivée est L .

Solution : Ici, on ne peut pas utiliser l'égalité des accroissements finis qui est fautive si $n > 1$. Soit $\alpha > 0$ et soit $\delta > 0$ tels que $\|f'(t) - L\| < \alpha$ pour tout $t \in [b - \delta, b[$. Pour $t \in]a, b[$, on définit $\varphi(t) := f(t) - Lt$. Soit $x \in [b - \delta, b[$ et soit $\epsilon < b - x$. On a $\varphi \in C^1([x, b - \epsilon], \mathbb{R}^n)$ et pour $t \in [x, b - \epsilon]$, on a $\|\varphi'(t)\| = \|f'(t) - L\| < \alpha$. Il suit de l'inégalité des accroissements finis que $\|\varphi(x) - \varphi(b - \epsilon)\| \leq \alpha|x - (b - \epsilon)|$ puis

$$\|f(x) - f(b - \epsilon) - L(x - (b - \epsilon))\| \leq \alpha|x - (b - \epsilon)|$$

pour tout $x \in [b - \delta, b]$ et $0 < \epsilon < b - x$. En faisant $\epsilon \rightarrow 0$, on obtient $\|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(b) - L(x - b)\| \leq \alpha|x - b|$ pour $x \in [b - \delta, b]$, et donc

$$\left\| \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(b)}{x - b} - L \right\| \leq \alpha \text{ pour tout } x \in [b - \delta, b].$$

Donc $\tilde{f}$ est dérivable en b et sa dérivée est L .

- (5) Montrez que $\tilde{f}$ est C^1 sur $]a, b]$.

Solution : Sur $]a, b[$, c'est bon. Il suffit de vérifier la limite de $\tilde{f}'$ en b : $\lim_{t \rightarrow b^-} \tilde{f}'(t) = \lim_{t \rightarrow b^-} f'(t) = L = \tilde{f}'(b)$, donc $\tilde{f}'$ est continue en b . Donc $\tilde{f} \in C^1(]a, b])$.

3. THÉORÈME DES BOUTS

En suivant le plan donné en cours, démontrez le théorème des bouts, à savoir :

Théorème 1. Soit $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue ll2v. On se donne $x \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$ une solution maximale de $x' = f(t, x)$ sur $J \subset I$. On suppose que $J =]a, b[$ avec

- $b < \infty$
- $b \in \text{Int}(I)$.

Alors $x(t)$ sort de tout compact de $\mathbb{R}^n$ quand $t \rightarrow b^-$.

Solution : Supposons par l'absurde qu'il existe un compact $K \subset \mathbb{R}^n$ et $0 < \epsilon < b - a$ tels que $x(t) \in K$ pour tout $t \in [b - \epsilon, b[$ avec $[b - \epsilon, b + \epsilon] \subset \text{Int}(I)$. Comme f est continue sur $[b - \epsilon, b + \epsilon] \times K$ compact, il existe $M > 0$ tel que $\|f(t, x)\| \leq M$ pour tout $t \in [b - \epsilon, b + \epsilon]$ et tout $x \in K$. Ainsi, $\|x'(t)\| \leq M$ pour tout $t \in [b - \epsilon, b[$. Il suit alors de l'inégalité des accroissements finis que

$$\|x(t) - x(s)\| \leq M|t - s| \text{ pour tout } t \in [b - \epsilon, b[.$$

Donc $x \in C^0([b - \epsilon, b], \mathbb{R}^n)$ est uniformément continue et $\mathbb{R}^n$ est complet. Ainsi (prolongement des fonctions uniformément continues sur une partie dense), x se prolonge continuellement sur $[b - \epsilon, b]$ par la fonction $\tilde{x}(t) = x(t)$ si $t < b$ et $\tilde{x}(b)l = \lim_{t \rightarrow b^-} x(t)$. On a aussi $\tilde{x} \in C^1([b - \epsilon, b], \mathbb{R}^n)$ et $\lim_{t \rightarrow b^-} \tilde{x}'(t) = \lim_{t \rightarrow b^-} x'(t) = \lim_{t \rightarrow b^-} f(t, x(t)) = f(b, l)$. Il suit alors du théorème de prolongement du premier exo que $\tilde{x} \in C^1([b - \epsilon, b], \mathbb{R}^n)$ et $\tilde{x}'(b) = f(b, l) = f(b, \tilde{x}(b))$. On a ainsi prolongé x en b en une solution C^1 de l'EDO, ce qui contredit la maximalité de la solution. Et donc $x(t)$ sort de tout compact lorsque $t \rightarrow b^-$.