

Devoir 2 : à rendre le 25 octobre

1. EXERCICES

Exercices 15, 6, 17 de la feuille de TD1.

2. PROLONGEMENT

Soit $f \in C^1(]a, b[, \mathbb{R}^n)$ avec $a < b$. On suppose qu'il existe $L \in \mathbb{R}^n$ tel que $\lim_{t \rightarrow b^-} f'(t) = L$.

- (1) Montrez qu'il existe $\delta > 0$ tel que f' est bornée sur $[b - \delta, b[\subset]a, b[$.
- (2) Montrez que $f(t)$ admet une limite, notée $l \in \mathbb{R}^n$, lorsque $t \rightarrow b^-$. On note $\tilde{f}$ le prolongement de f par continuité à $]a, b]$.
- (3) On suppose que $n = 1$. En utilisant l'égalité des accroissements finis, montrez que $\tilde{f}$ est dérivable en b et que sa dérivée est L .
- (4) (Plus difficile) : dans le cas général, pour $x < b$, en appliquant l'inégalité des accroissements finis à $t \mapsto f(t) - Lt$ sur $[x, b - \epsilon]$ avec $\epsilon > 0$ petit, montrez que $\tilde{f}$ est dérivable en b et que sa dérivée est L .
- (5) Montrez que $\tilde{f}$ est C^1 sur $]a, b]$.

3. THÉORÈME DES BOUTS

En suivant le plan donné en cours, démontrez le théorème des bouts, à savoir :

Théorème 1. Soit $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue ll2v. On se donne $x \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$ une solution maximale de $x' = f(t, x)$ sur $J \subset I$. On suppose que $J =]a, b[$ avec

- $b < \infty$
- $b \in \text{Int}(I)$.

Alors $x(t)$ sort de tout compact de $\mathbb{R}^n$ quand $t \rightarrow b^-$.