

Corrigé du Devoir 3 : à rendre le 10 décembre

1. EXERCICES

Exercice 1 de la feuille de TD4 (systèmes proies-prédateurs)

Solution : Cf TD4.

2. FONCTION DE LIAPUNOV

Soit $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ avec U ouvert non-vide de $\mathbb{R}^n$. On suppose qu'il existe $p \in U$ tel que $f(p) = 0$. Le but ici est de démontrer le

Théorème 1. *Soit $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ avec U ouvert non-vide de $\mathbb{R}^n$. On suppose qu'il existe $p \in U$ tel que $f(p) = 0$. On suppose que*

$Re(\lambda) < 0$ pour tout λ valeur propre complexe de $df_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Il existe alors $\delta > 0$ tel que pour tout $x_0 \in B(p, \delta) \subset U$, la solution maximale de $x' = f(x)$ avec $x(0) = x_0$ est définie sur $[0, +\infty[$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = p$.

Ce théorème a été démontré en cours dans le cas où f est C^2 et $df_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un endomorphisme symétrique ($\mathbb{R}^n$ étant muni du produit scalaire usuel). Ce problème est consacré à la preuve du théorème en toute généralité.

Pour simplifier, on note $A := df_p = df_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ qu'on considèrera soit comme un endomorphisme soit comme une matrice.

On dit que $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ admet une *fonction de Liapunov* au point $p \in U$ tel que $f(p) = 0$ s'il existe une forme bilinéaire $B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- B est bilinéaire symétrique,
- B est définie positive,
- Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ non nul, on a $B(AX, X) < 0$.

On dit alors que $Q(X) := B(X, X)$ pour $X \in \mathbb{R}^n$ est une fonction de Liapunov. Attention : la définition varie d'un ouvrage à l'autre!!!!

2.1. Considérations générales sur les fonctions de Liapunov. 1. Montrez que si f admet une fonction de Liapunov en un point p , alors les valeurs propres réelles de df_p sont toutes strictement négatives.

Solution : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A . Il existe donc $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$. Donc $0 > B(AX, X) = \lambda B(X, X)$. Or B est définie positive, donc $B(X, X) > 0$, donc $\lambda < 0$.

2. Déterminez une fonction de Liapunov dans le cas où df_p est symétrique à valeurs propres négatives.

Solution : Posons $B(X, X) = \langle X, Y \rangle_{\mathbb{R}}$, le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres, il existe donc $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $Ae_i = \lambda_i e_i$ pour $i = 1, \dots, n$. Soit $X \in \mathbb{R}^n$ et soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ ses coordonnées dans $(e_1, \dots, e_n)$. On a donc $AX = \sum_i \lambda_i x_i e_i$ et donc $B(AX, X) = \sum_i \lambda_i x_i^2$. Or $\lambda_i < 0$ pour tout i et $(x_1, \dots, x_n) \neq 0$, donc $B(AX, X) < 0$. Comme en plus B est un produit scalaire, on a bien une fonction de Liapunov.

3. Montrez que si f admet une fonction de Liapunov en p , alors il existe $\alpha > 0$ tel que $B(AX, X) \leq -\alpha Q(X)$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$.

Solution : Soit

$$M := \sup\{B(AX, X) / X \in S_Q\} \text{ où } S_Q := \{X \in \mathbb{R}^n / Q(X) = 1\}.$$

Comme Q provient d'un produit scalaire, alors $\sqrt{Q}$ est une norme, donc continue. Donc S_Q est fermé borné dans $\mathbb{R}^n$ de dimension finie, donc compact. Soit $X_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $X_0 \neq 0$, donc $Q(X_0) \neq 0$, puis $\sqrt{Q(X_0)}^{-1/2} X_0 \in S_Q$ qui est donc non-vide. Comme B est continue pour la topologie d'evn induite par Q et que S_Q est compact non-vide, alors M existe et est atteint en un vecteur $X_1 \in S_Q$. Donc $Q(X_1) = 1$ et $X_1 \neq 0$. Il suit donc que $M = B(AX_1, X_1) < 0$, et on pose $\alpha := -M > 0$. Pour $X \in \mathbb{R}^n$ non nul, on pose $X' = (Q(X))^{-1/2} X \in S_Q$. Donc $B(AX, X) = Q(X)B(X', X') \leq -\alpha Q(X)$. Cette inégalité restant valable pour $X = 0$, le résultat est prouvé.

2.2. Preuve du théorème si une fonction de Liapunov existe. 4. On suppose que $f \in C^2(U, \mathbb{R}^n)$ admet une fonction de Liapunov au point p . En vous inspirant de la preuve du cours, montrez qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x_0 \in B(p, \delta) \subset U$, la solution maximale de $x' = f(x)$ avec $x(0) = x_0$ est définie sur $[0, +\infty[$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = p$.

Solution : Pour simplifier, on suppose que $p = 0$. Toutes les normes étant équivalentes, on prend la norme $\|\cdot\| := \sqrt{Q}$. Comme f est C^2 , il suit de la formule de Taylor qu'il existe $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $C > 0$ et $r_1 > 0$ tels que

$$f(X) = AX + \|X\|^2 g(X) \text{ pour tout } X \in B(0, r_1) \subset \overline{B(0, r_1)} \subset U$$

avec $\|g(X)\| \leq C$ pour tout $X \in B(0, r_1)$. Soit $t \in I$ tel que $x(t) \in B(0, r_1)$. On a alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Q(x(t)) &= 2B(x'(t), x(t)) = 2B(f(x(t)), x(t)) \\ &= 2B(Ax(t), x(t)) + 2\|x(t)\|^2 B(g(x(t)), x(t)) \\ &\leq -2\alpha Q(x(t)) + 2\|x(t)\|^2 C Q(x(t)) \leq (-2\alpha + 2CQ(x(t))) Q(x(t)) \end{aligned}$$

On pose $r_2 := \min\{r_1, \alpha/2C\}$. On a alors

$$\frac{d}{dt} Q(x(t)) \leq -\alpha Q(x(t)) \text{ lorsque } x(t) \in B(0, r_2).$$

Rappelons qu'on a pris comme norme $\|\cdot\| := \sqrt{Q}$.

Soit $x_0 \in B(0, r_2)$ et soit $x \in C^1(I, U)$ solution maximale de $x' = f(x)$ avec $x(0) = x_0$, $0 \in I$. Montrons que $x(t) \in B(0, r_2)$ pour tout $t \geq 0$, $t \in I$. Sinon, il existe $T > 0$ tel que $x(T) \notin B(0, r_2)$. Soit alors $t_1 := \min\{t \geq 0 \text{ tel que } x(t) \in \mathbb{R}^n \setminus B(0, r_2)\}$. On a $t_1 > 0$ bien défini et $x(t) \in B(0, r_2)$ pour tout $0 \leq t < t_1$ et donc $\frac{d}{dt} Q(x(t)) \leq 0$ pour tout $t \in [0, t_1]$. Donc $t \mapsto Q(x(t))$ est décroissante et $Q(x(t_1)) \leq Q(x(0)) = Q(x_0) < r_2$, ce qui est absurde. D'où le résultat annoncé.

Donc, pour tout $t \geq 0$, $t \in I$, $x(t) \in B(0, r_2) \subset \overline{B(0, r_1)}$ qui est un compact de U . Comme $x(t)$ reste dans un compact, alors la borne sup de I est infinie, donc $[0, +\infty[\subset I$. On a donc

$$\frac{d}{dt} (e^{\alpha t} Q(x(t))) = e^{\alpha t} \left(\frac{d}{dt} Q(x(t)) + \alpha Q(x(t)) \right) \leq 0 \text{ pour tout } t \geq 0,$$

et donc $e^{\alpha t} Q(x(t)) \leq Q(x_0)$ puis $Q(x(t)) \leq Q(x_0) e^{-\alpha t}$ pour tout $t \geq 0$. Donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} Q(x(t)) = 0$ puis $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ car $\sqrt{Q}$ est une norme.

5. Même question dans le cas $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$

Solution : Il faut seulement modifier le début. Comme f est C^1 , il suit de la formule de Taylor qu'il existe $\epsilon : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $C > 0$ et $r_1 > 0$ tels que

$$f(X) = AX + \|X\|\epsilon(X) \text{ pour tout } X \in B(0, r_1) \subset \overline{B(0, r_1)} \subset U$$

avec $\lim_{X \rightarrow 0} \epsilon(X) = 0$. Soit $t \in I$ tel que $x(t) \in B(0, r_1)$. On a alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}Q(x(t)) &= 2B(x'(t), x(t)) = 2B(f(x(t)), x(t)) \\ &= 2B(Ax(t), x(t)) + 2\|x(t)\|B(\epsilon(x(t)), x(t)) \\ &\leq -2\alpha Q(x(t)) + 2\|x(t)\|^2\|\epsilon(x(t))\| \leq (-2\alpha + 2\|\epsilon(x(t))\|)Q(x(t)) \end{aligned}$$

Soit $r_3 > 0$ tel que $\|\epsilon(X)\| < \alpha/2$ pour $X \in B(0, r_3)$. On pose $r_4 := \min\{r_1, r_3\}$. On a alors

$$\frac{d}{dt}Q(x(t)) \leq -\alpha Q(x(t)) \text{ lorsque } x(t) \in B(0, r_2).$$

et la suite fonctionne pareillement.

2.3. Existence d'une fonction de Liapunov sous les hypothèses du théorème. Sans perdre en généralité, on prend $p = 0 \in U$. On suppose que les valeurs propres complexes de $A = df_p$ sont toutes de partie réelle strictement négative

6. On suppose que A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$. Il existe donc $P \in Gl_n(\mathbb{C})$ et $D \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonale telles que $A = PDP^{-1}$. On note

$$\langle z, z' \rangle_{\mathbb{C}} := \sum_j z_j \overline{z'_j} \text{ pour } z, z' \in \mathbb{C}^n$$

le produit Hilbertien usuel sur $\mathbb{C}^n$, et $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ la norme associée. Montrez que $Q(X) := \|P^{-1}X\|_{\mathbb{C}}^2$ pour $X \in \mathbb{R}^n$ est une fonction de Liapunov. Au cours du calcul, on pourra avantageusement utiliser $\tilde{X} = P^{-1}X \in \mathbb{C}^n$.

Solution : On écrit la forme polaire B comme

$$\begin{aligned} B(X, Y) &= \frac{Q(X+Y) - Q(X) - Q(Y)}{2} = \frac{\langle P^{-1}X, P^{-1}Y \rangle_{\mathbb{C}} + \langle P^{-1}Y, P^{-1}X \rangle_{\mathbb{C}}}{2} \\ &= \Re \langle P^{-1}X, P^{-1}Y \rangle_{\mathbb{C}} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

pour $X, Y \in \mathbb{R}^n$. On a B bilinéaire, symétrique (le corps de base est $\mathbb{R}$). Pour $X \in \mathbb{R}^n$, $B(X, X) = Q(X) = \|P^{-1}X\|_{\mathbb{C}}^2 \geq 0$, avec égalité ssi $P^{-1}X = 0$ (dans $\mathbb{C}^n$) ssi $X = 0$ (dans $\mathbb{C}^n$) et donc dans $\mathbb{R}^n$ car $X \in \mathbb{R}^n$. Donc B est bien un produit scalaire.

Pour $X \in \mathbb{R}^n$, notons $\tilde{X} = P^{-1}X \in \mathbb{C}^n$ de sorte que

$$B(AX, X) = \Re \langle P^{-1}AX, P^{-1}X \rangle_{\mathbb{C}} = \Re \langle P^{-1}AP\tilde{X}, \tilde{X} \rangle_{\mathbb{C}} = \Re \langle D\tilde{X}, \tilde{X} \rangle_{\mathbb{C}}$$

En notant $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) \in \mathbb{C}^n$ et $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in M_n(\mathbb{C})$, on obtient

$$B(AX, X) = \Re \sum_i \lambda_i \tilde{x}_i \overline{\tilde{x}_i} = \Re \sum_i \lambda_i |\tilde{x}_i|^2 = \sum_i \Re(\lambda_i) |\tilde{x}_i|^2$$

Avec $X \neq 0$, on a aussi $\tilde{X} \neq 0$. Comme $\Re(\lambda_i) < 0$ pour tout i , on a $B(AX, X) < 0$ lorsque $X \neq 0$, ce qui donne une fonction de Liapunov.

7. Dans le cas général, on se donne une base $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle A est triangulaire supérieure. Pour $\mu > 0$ et $i = 1, \dots, n$, on définit $\tilde{e}_i := \mu^i e_i$. Montrez que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\mu > 0$ et $P \in Gl_n(\mathbb{C})$, $D, N \in M_n(\mathbb{C})$ tels que $A = P(D + N)P^{-1}$ avec D diagonale et $\|N\|_{\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n} < \epsilon$ où $\|\cdot\|_{\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n}$ est la norme d'opérateur subordonnée à $\|\cdot\|_{\mathbb{C}^n}$. Montrez que pour $\epsilon > 0$ assez petit, $Q(X) := \|P^{-1}X\|_{\mathbb{C}}^2$ pour $X \in \mathbb{R}^n$ est une fonction de Liapunov.

Solution : On fait systématiquement l'analogie entre les morphismes et les matrices. Comme A est triangulaire supérieure dans la base $(e_1, \dots, e_n)$, pour tout $j = 1, \dots, n$,

on écrit $Ae_j = \lambda_j e_j + \sum_{i < j} n_{ij} e_i$ avec $\lambda_i, n_{ij} \in \mathbb{C}^n$. Ainsi, on a $A\tilde{e}_j = \lambda_j \tilde{e}_j + \sum_{i < j} n_{ij} \mu^{j-i} \tilde{e}_i$ pour tout j . Et donc dans $\tilde{\beta} := (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)$, on a $A = D + N$ avec $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $N_{ij} = \mu^{j-i} n_{ij}$ si $i < j$ et 0 sinon. Ainsi $|N_{ij}| \leq \mu |n_{ij}|$ pour tous i, j et $\mu \in [0, 1]$. En prenant μ assez petit, pour tout $\epsilon > 0$, on trouve une base telle que $\|N\|_{\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n} < \epsilon$. On reprend alors les notations de l'étape précédente, ce qui donne pour $X \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} B(AX, X) &= \Re \langle P^{-1}AX, P^{-1}X \rangle_{\mathbb{C}} = \Re \langle P^{-1}AP\tilde{X}, \tilde{X} \rangle_{\mathbb{C}} = \Re \langle (D + N)\tilde{X}, \tilde{X} \rangle_{\mathbb{C}} \\ &= \Re \langle D\tilde{X}, \tilde{X} \rangle_{\mathbb{C}} + \Re \langle N\tilde{X}, \tilde{X} \rangle_{\mathbb{C}} \\ &\leq \sum_i \Re(\lambda_i) |\tilde{x}_i|^2 + \epsilon \|\tilde{X}\|_{\mathbb{C}^n}^2 \leq (2 \max_i \Re(\lambda_i) + \epsilon) \|\tilde{X}\|_{\mathbb{C}^n}^2 \end{aligned}$$

Pour $\epsilon > 0$ assez petit, on a $B(AX, X) < 0$ lorsque $X \neq 0$.

8. Concluez quant au théorème.

Solution : Dans le cas général, $A \in M_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable dans $\mathbb{C}$. D'après **7.**, il existe une fonction de Liapunov. D'après **5.**, on a la stabilité et le théorème est prouvé.

3. RÉOLUTIONS EXPLICITES

$$\begin{cases} x' = 5x - y \\ y' = -y + 5x \end{cases} \quad (1)$$

Solution : On écrit le système comme $X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$. Diagonalisons A . On a

$$\chi_A = \begin{vmatrix} 5-X & -1 \\ 5 & -1-X \end{vmatrix} = (5-X)(-1-X) + 5 = X^2 - 4X = X(X-4)$$

donc deux valeurs propres 0 et 4 en dimension 2, la matrice est Dz.

Espace propre de 0. On a

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - y = 0 \\ 5x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5x \end{cases} \text{ donc } E_0 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Espace propre de 4. On a

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - y = 4x \\ 5x - y = 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \end{cases} \text{ donc } E_4 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et donc

$$A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

et donc pour $t \in \mathbb{R}$, on a

$$e^{tA} = P e^{tD} P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{0 \times t} & 0 \\ 0 & e^{4t} \end{pmatrix} P^{-1}$$

Ainsi

$$X' = AX \Leftrightarrow X = e^{tA} X(0) = P \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{6t} \end{pmatrix} P^{-1} X(0)$$

en posant $P^{-1}X(0) = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$, on a

$$X' = AX \Leftrightarrow X = e^{tA} X(0) = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + C_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et donc

$$(x, y) \text{ solution de (1)} \Leftrightarrow \exists C_1, C_2 \in \mathbb{R} \text{ tels que } \begin{cases} x(t) = C_1 + C_2 e^{4t} \\ y(t) = 5C_1 + C_2 e^{4t} \end{cases}$$

(Pour celles et ceux qui n'ont pas remarqué la permutation de x et y dans la seconde ligne...)

$$\begin{cases} x' = 5x - y \\ y' = -x + 5y \end{cases} \quad (1bis)$$

Solution : On écrit le système comme $X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$. Diagonalisons A . On a

$$\chi_A = \begin{vmatrix} 5-X & -1 \\ -1 & 5-X \end{vmatrix} = (5-X)^2 - 1 = X^2 - 10X + 24 = (X-4)(X-6)$$

donc deux valeurs propres 4 et 6 en dimension 2, la matrice est Dz.

Espace propre de 4. On a

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4 \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - y = 4x \\ -x + 5y = 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \end{cases} \text{ donc } E_4 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Espace propre de 6. On a

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - y = 6x \\ -x + 5y = 6y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \end{cases} \text{ donc } E_6 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

et donc

$$A = P \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} P^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et donc pour $t \in \mathbb{R}$, on a

$$e^{tA} = P e^{tD} P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{4t} & 0 \\ 0 & e^{6t} \end{pmatrix} P^{-1}$$

Ainsi

$$X' = AX \Leftrightarrow X = e^{tA} X(0) = P \begin{pmatrix} e^{4t} & 0 \\ 0 & e^{6t} \end{pmatrix} P^{-1} X(0)$$

en posant $P^{-1} X(0) = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$, on a

$$X' = AX \Leftrightarrow X = e^{tA} X(0) = P \begin{pmatrix} e^{4t} & 0 \\ 0 & e^{6t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = C_1 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{6t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

et donc

$$(x, y) \text{ solution de (1bis)} \Leftrightarrow \exists C_1, C_2 \in \mathbb{R} \text{ tels que } \begin{cases} x(t) = C_1 e^{4t} + C_2 e^{6t} \\ y(t) = C_1 e^{4t} - C_2 e^{6t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -4x - 3y \end{cases} \quad (2)$$

Solution : On écrit $X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$. Diagonalisons A . On a

$$\chi_A = \begin{vmatrix} 1-X & 1 \\ -4 & -3-X \end{vmatrix} = (1-X)(-3-X) + 4 = X^2 + 2X + 1 = (X+1)^2$$

donc une seule valeur propre -1 en dimension 2 : on ne peut pas encore conclure.

Espace propre de -1 . On a

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -x \\ -4x - 3y = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \end{cases} \text{ donc } E_{-1} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Et donc A n'est pas diagonalisable. On pose $e_1 := (1, -2)$ et on complète avec un vecteur quelconque non colinéaire à e_1 : par exemple $e_2 := (0, 1)$. On a $Ae_1 = -e_1$ et

$$Ae_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_1 - e_2$$

et donc

$$\text{Mat}_{(e_1, e_2)} A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, en notant P la matrice de (e_1, e_2) dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, on obtient

$$A = P(D + N)P^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

avec $DN = ND$ et $N^2 = 0$. Ainsi, pour $t \in \mathbb{R}$, on a

$$e^{tA} = Pe^{tD+tN}P^{-1} = Pe^{tD}e^{tN}P^{-1} = Pe^{tD}(1+tN)P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Ainsi

$$X' = AX \Leftrightarrow X = e^{tA}X(0) = P \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} P^{-1}X(0)$$

en posant $P^{-1}X(0) = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$, on a

$$X' = AX \Leftrightarrow X = e^{tA}X(0) = P \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1e^{-t} + C_2te^{-t} \\ -2C_1e^{-t} + C_2(1-2t)e^{-t} \end{pmatrix}$$

et donc

$$(x, y) \text{ solution de (2)} \Leftrightarrow \exists C_1, C_2 \in \mathbb{R} \text{ tels que } \begin{cases} x(t) = C_1e^{-t} + C_2te^{-t} \\ y(t) = -2C_1e^{-t} + C_2(1-2t)e^{-t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x + y + e^{-t} \\ y' = -4x - 3y \end{cases} \quad (3)$$

Solution : le système homogène a été résolu dans la question précédente. On utilise la variation de la constante et on cherche des solutions sous la forme

$$\begin{cases} x_p(t) = C_1(t)e^{-t} + C_2(t)te^{-t} \\ y_p(t) = -2C_1(t)e^{-t} + C_2(t)(1-2t)e^{-t} \end{cases}$$

Le couple (x, y) est alors solution du système si et seulement si

$$\begin{aligned} & \begin{cases} C_1'(t)e^{-t} + C_2'(t)te^{-t} = e^{-t} \\ -2C_1'(t)e^{-t} + C_2'(t)(1-2t)e^{-t} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(t) + C_2'(t)t = 1 \\ -2C_1'(t) + C_2'(t)(1-2t) = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(t) + C_2'(t)t = 1 \\ C_2'(t) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(t) = 1-2t \\ C_2'(t) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1(t) = t - t^2 + A \\ C_2(t) = 2t + B \end{cases} \end{aligned}$$

En choisissant $A = B = 0$, on obtient comme solution particulière

$$\begin{cases} x_p(t) = C_1(t)e^{-t} + C_2(t)te^{-t} = (t + t^2)e^{-t} \\ y_p(t) = -2C_1(t)e^{-t} + C_2(t)(1-2t)e^{-t} = -2t^2e^{-t} \end{cases}$$

donc

$$(x, y) \text{ solution de (3)} \Leftrightarrow \exists A, B \in \mathbb{R} \text{ tels que } \begin{cases} x(t) = (t + t^2)e^{-t} + Ae^{-t} + Bte^{-t} \\ y(t) = -2t^2e^{-t} - 2Ae^{-t} + B(1-2t)e^{-t} \end{cases}$$