

Devoir 3 : à rendre le 10 décembre

1. EXERCICES

Exercice 1 de la feuille de TD4 (systèmes proies-prédateurs)

2. FONCTION DE LIAPUNOV

Soit $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ avec U ouvert non-vide de $\mathbb{R}^n$. On suppose qu'il existe $p \in U$ tel que $f(p) = 0$. Le but ici est de démontrer le

Théorème 1. *Soit $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ avec U ouvert non-vide de $\mathbb{R}^n$. On suppose qu'il existe $p \in U$ tel que $f(p) = 0$. On suppose que*

$$\operatorname{Re}(\lambda) < 0 \text{ pour tout } \lambda \text{ valeur propre complexe de } df_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Il existe alors $\delta > 0$ tel que pour tout $x_0 \in B(p, \delta) \subset U$, la solution maximale de $x' = f(x)$ avec $x(0) = x_0$ est définie sur $[0, +\infty[$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = p$.

Ce théorème a été démontré en cours dans le cas où f est C^2 et $df_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un endomorphisme symétrique ($\mathbb{R}^n$ étant muni du produit scalaire usuel). Ce problème est consacré à la preuve du théorème en toute généralité.

Pour simplifier, on note $A := df_p = df_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ qu'on considèrera soit comme un endomorphisme soit comme une matrice.

On dit que $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ admet une *fonction de Liapunov* au point $p \in U$ tel que $f(p) = 0$ s'il existe une forme bilinéaire $B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- B est bilinéaire symétrique,
- B est définie positive,
- Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ non nul, on a $B(AX, X) < 0$.

On dit alors que $Q(X) := B(X, X)$ pour $X \in \mathbb{R}^n$ est une fonction de Liapunov. Attention : la définition varie d'un ouvrage à l'autre!!!!

2.1. Considérations générales sur les fonctions de Liapunov. 1. Montrez que si f admet une fonction de Liapunov en un point p , alors les valeurs propres réelles de df_p sont toutes strictement négatives.

2. Déterminez une fonction de Liapunov dans le cas où df_p est symétrique à valeurs propres négatives.

3. Montrez que si f admet une fonction de Liapunov en p , alors il existe $\alpha > 0$ tel que $B(AX, X) \leq -\alpha Q(X)$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$.

2.2. Preuve du théorème si une fonction de Liapunov existe. 4. On suppose que $f \in C^2(U, \mathbb{R}^n)$ admet une fonction de Liapunov au point p . En vous inspirant de la preuve du cours, montrez qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x_0 \in B(p, \delta) \subset U$, la solution maximale de $x' = f(x)$ avec $x(0) = x_0$ est définie sur $[0, +\infty[$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = p$.

5. Même question dans le cas $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$

2.3. Existence d'une fonction de Liapunov sous les hypothèses du théorème. Sans perdre en généralité, on prend $p = 0 \in U$. On suppose que les valeurs propres complexes de $A = df_p$ sont toutes de partie réelle strictement négative

6. On suppose que A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$. Il existe donc $P \in Gl_n(\mathbb{C})$ et $D \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonale telles que $A = PDP^{-1}$. On note

$$\langle z, z' \rangle_{\mathbb{C}} := \sum_j z_j \overline{z'_j} \text{ pour } z, z' \in \mathbb{C}^n$$

le produit Hilbertien usuel sur $\mathbb{C}^n$, et $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ la norme associée. Montrez que $Q(X) := \|P^{-1}X\|_{\mathbb{C}}^2$ pour $X \in \mathbb{R}^n$ est une fonction de Liapunov. Au cours du calcul, on pourra avantageusement utiliser $\tilde{X} = P^{-1}X \in \mathbb{C}^n$.

7. Dans le cas général, on se donne une base $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle A est triangulaire supérieure. Pour $\mu > 0$ et $i = 1, \dots, n$, on définit $\tilde{e}_i := \mu^i e_i$. Montrez que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\mu > 0$ et $P \in Gl_n(\mathbb{C})$, $D, N \in M_n(\mathbb{C})$ tels que $A = P(D + N)P^{-1}$ avec D diagonale et $\|N\|_{\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n} < \epsilon$ où $\|\cdot\|_{\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n}$ est la norme d'opérateur subordonnée à $\|\cdot\|_{\mathbb{C}^n}$. Montrez que pour $\epsilon > 0$ assez petit, $Q(X) := \|P^{-1}X\|_{\mathbb{C}}^2$ pour $X \in \mathbb{R}^n$ est une fonction de Liapunov.

8. Concluez quant au théorème.

3. RÉSOLUTIONS EXPLICITES

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} x' = 5x - y \\ y' = -y + 5x \end{array} \right\} \\ & \left\{ \begin{array}{l} x' = x + y \\ y' = -4x - 3y \end{array} \right\} \\ & \left\{ \begin{array}{l} x' = x + y + e^{-t} \\ y' = -4x - 3y \end{array} \right\} \end{aligned}$$