

Corrigé de l'examen final du 12 décembre (3h)

On pourra utiliser sans démonstration le lemme suivant :

Lemme : On se donne $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = l$ existe. Alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ existe et vaut l .

1. LE WRONSKIEN

Exercice 1. Soit $A \in C^0(I, M_n(\mathbb{R}))$ et soit l'équation différentielle $Y' = A(t)Y$, notée (E) avec $Y \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$. Pour $Y_1, \dots, Y_n$ des solutions de (E), on définit le *wronskien* par $w(t) := \det(Y_1(t), \dots, Y_n(t))$ pour tout $t \in I$.

- (1) Montrez que $w(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$ ssi $w \not\equiv 0$ ssi $(Y_1, \dots, Y_n)$ est une famille libre dans $C^1(I, \mathbb{R}^n)$.

Solution : On est dans les hypothèses de Cauchy-Lipschitz linéaire. Notons (i), (ii) et (iii) les trois assertions. (i) $\Rightarrow$ (ii) est claire.

Montrons que (iii) $\Rightarrow$ (i). On suppose la famille $(Y_1, \dots, Y_n)$ libre. Supposons qu'il existe $t_0 \in I$ tel que $w(t_0) = 0$. Donc la famille $(Y_1(t_0), \dots, Y_n(t_0))$ est liée, donc il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ non tous nuls tels que $\sum_i \lambda_i Y_i(t_0) = 0$. Soit $Z := \sum_i \lambda_i Y_i$. Alors $Z' = AZ$ et $Z(t_0) = 0$. Par unicité, $Z \equiv 0$, donc $\sum_i \lambda_i Y_i$ donc la famille $(Y_1, \dots, Y_n)$ est liée dans $C^1(I, \mathbb{R}^n)$, ce qui est absurde. Donc $w(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$.

Montrons que (ii) $\Rightarrow$ (iii). On suppose $w \not\equiv 0$. Si $(Y_1, \dots, Y_n)$ est liée dans $C^1(I, \mathbb{R}^n)$, alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ non tous nuls tels que $\sum_i \lambda_i Y_i = 0$. Donc pour tout $t \in I$, $\sum_i \lambda_i Y_i(t) = 0$, donc $(Y_1(t), \dots, Y_n(t))$ est liée dans $\mathbb{R}^n$, donc $w(t) = 0$, ce qui est absurde. Donc $(Y_1, \dots, Y_n)$ est libre dans $C^1(I, \mathbb{R}^n)$.

- (2) Montrez que pour tout $t_0 \in I$, on a

$$w(t) = w(t_0) \cdot e^{\int_{t_0}^t \text{Tr}(A(s)) ds} \text{ pour tout } t \in I.$$

Solution : La fonction w est C^1 comme composée. Comme le déterminant est multilinéaire, on a

$$\begin{aligned} w'(t) &= \det(Y_1'(t), Y_2(t), \dots, Y_n(t)) + \dots + \det(Y_1(t), Y_2(t), \dots, Y_n'(t)) \\ &= \det(AY_1(t), Y_2(t), \dots, Y_n(t)) + \dots + \det(Y_1(t), Y_2(t), \dots, AY_n(t)) \end{aligned}$$

pour tout $t \in I$. Montrons que pour tous $X_1, \dots, X_n \in \mathbb{R}^n$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$, on a

$$\det(AX_1, X_2, \dots, X_n) + \dots + \det(X_1, X_2(t), \dots, AX_n) = \text{Tr}(A) \det(X_1, X_2, \dots, X_n).$$

Pour cela, on note $f(X_1, \dots, X_n)$ le membre de gauche. On remarque que f est multilinéaire et alternée, donc proportionnelle au déterminant. Il existe donc $k \in \mathbb{R}$ tel que $f(X_1, \dots, X_n) = k \det(X_1, \dots, X_n)$ pour tous $X_1, \dots, X_n \in \mathbb{R}^n$. En prenant la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on obtient $k = \text{Tr}(A)$ ce qui prouve l'identité recherchée.

Ainsi, pour tout $t \in I$, on a $w'(t) = \text{Tr}(A(t)) \det(Y_1(t), Y_2(t), \dots, Y_n(t)) = \text{Tr}(A(t))w(t)$. C'est une équation scalaire linéaire d'ordre 1 de type $w' = \omega w$, ce qui donne le résultat attendu.

- (3) Écrivez le wronskien de l'équation $y'' + qy = 0$ avec $q \in C^0(I)$. *Solution :* On transforme cette équation en une EDO d'ordre 1 en posant

$$Y(t) := \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \text{ et donc } Y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & 0 \end{pmatrix} Y(t)$$

pour tout $t \in I$. La matrice est de trace nulle. On se donne $y_1, y_2 \in C^2(I)$ deux solutions de $y'' + qy = 0$. Le wronskien est alors

$$w(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} \text{ et } w(t) = w(t_0) \text{ pour tout } t \in I.$$

Exercice 2. Soient $a, b \in C^0(\mathbb{R})$ et soient $y_1, y_2 \in C^2(\mathbb{R})$ deux solutions linéairement indépendantes de $y'' + ay' + by = 0$.

- (1) Justifiez l'existence de y_1, y_2 .

Solution : l'espace des solutions de $y'' + ay' + by = 0$ étant de dimension deux, il existe deux éléments linéairement indépendants.

- (2) **On admet** que les zéros éventuels de y_1 sont isolés.

- (3) En utilisant le wronskien, montrez qu'entre deux zéros consécutifs de y_1 , il y a exactement un zéro de y_2 . *Solution :* On pose

$$w(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t) \text{ pour tout } t \in I.$$

Il suit de l'exo précédent que $w(t)$ est de signe constant pour tout t . Soient $t_1 < t_2$ deux zéros isolés de y_1 . Du coup, y_1 est de signe constant sur $]t_1, t_2[$, mettons positif pour simplifier. Dans ce cas, Cf l'exo sur le problème de Dirichlet, on a

$$y_1(t_1) = y_1(t_2) = 0 \text{ et } y_1'(t_1) > 0 > y_1'(t_2).$$

Le Wronskien est alors

$$w(t_1) = -y_1'(t_1)y_2(t_1) \text{ et } w(t_2) = -y_1'(t_2)y_2(t_2).$$

Or $w(t_1)$ et $w(t_2)$ sont non-nuls et de même signe, $y_1'(t_1)$ et $y_1'(t_2)$ sont de signes opposés, donc $y_2(t_1)$ et $y_2(t_2)$ sont non-nuls et de signes opposés. La fonction y_2 étant continue, elle s'annule au moins une fois sur $]t_1, t_2[$.

Si y_2 s'annule une autre fois sur $]t_1, t_2[$, alors comme $y_2 \not\equiv 0$, ses zéros sont isolés et on trouve deux zéros consécutifs sur $]t_1, t_2[$. En échangeant les rôles de y_1 et y_2 , y_1 devrait alors s'annuler sur $]t_1, t_2[$: absurde car t_1 et t_2 sont des zéros consécutifs.

Donc y_2 s'annule exactement une fois sur $]t_1, t_2[$. Finalement, entre deux zéros consécutifs de y_1 , il y a exactement un zéro de y_2 .

2. EXERCICES

Exercice 3. On cherche ici les solutions $y \in C^1(]0, +\infty[)$ de

$$y' \ln t + 2ty^2 - \frac{y}{t} = 0. \quad (E)$$

- (1) En posant $z(t) := \frac{y(t)}{\ln t}$, donnez l'équation différentielle vérifiée par z sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$. Dorénavant, on pose $I_1 =]0, 1[$ et $I_2 =]1, +\infty[$

Solution :

$$z' = \frac{y' \ln t - y \times (1/t)}{(\ln t)^2} = \frac{-2ty^2}{(\ln t)^2} = -2tz^2$$

- (2) Montrez que si z s'annule quelque part sur I_1 , alors z s'annule partout sur I_1 . On admet qu'on a le même résultat pour I_2 .

Solution : $z' = f(t, z) = -2tz^2$ vérifie les conditions de CL car f est C^1 . S'il existe $t_0 \in I_1$ tel que $z(t_0) = 0$, alors z coïncide en t_0 avec la fonction nulle et elles vérifient toutes deux $z' = -2tz^2$: elles sont donc égales sur $I_1 \cap \mathbb{R}$, donc $z(t) = 0$ pour tout $t \in I_1$.

- (3) Résolvez l'équation différentielle vérifiée par z sur I_1 , puis sur I_2 .

Solution : Si z s'annule qq part sur I_1 , alors elle est identiquement nulle. Sinon, on écrit

$$\frac{z'}{z^2} = -2t \Rightarrow \left(\frac{1}{z}\right)' = 2t \Rightarrow \frac{1}{z(t)} = t^2 - c_1 \text{ pour tout } t \in I_1 =]0, 1[$$

pour une constante c_1 donnée. Comme $1/z(t) \neq 0$ sur I_1 , on a $c_1 \leq 0$ ou bien $c_1 \geq 1$. Ainsi

$$\text{soit } z \equiv 0 \text{ sur }]0, 1[\text{ soit } z(t) = \frac{1}{t^2 - c_1} \text{ sur }]0, 1[\text{ avec } c_1 \leq 0 \text{ ou } c_1 \geq 1$$

Avec le même raisonnement,

$$\text{soit } z \equiv 0 \text{ sur }]1, +\infty[\text{ soit } z(t) = \frac{1}{t^2 - c_2} \text{ sur }]1, +\infty[\text{ avec } c_2 \leq 1.$$

- (4) Déduisez-en les solutions de (E) sur I_1 et sur I_2 .

Solution :

$$\text{soit } y \equiv 0 \text{ sur }]0, 1[\text{ soit } y(t) = \frac{\ln t}{t^2 - c_1} \text{ sur }]0, 1[\text{ avec } c_1 \leq 0 \text{ ou } c_1 \geq 1$$

Avec le même raisonnement,

$$\text{soit } y \equiv 0 \text{ sur }]1, +\infty[\text{ soit } y(t) = \frac{\ln t}{t^2 - c_2} \text{ sur }]1, +\infty[\text{ avec } c_2 \leq 1.$$

- (5) Recollement (plus dur) : déterminez les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$.

Solution : On se donne $y \in C^1(]0, +\infty[)$ une solution. Pour $0 < t < 1$, si $y \not\equiv 0$, on a $y(t) = \frac{\ln t}{t^2 - c_1}$. A la limite $t \rightarrow 1^-$, on obtient alors

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} |y(t)| = +\infty \text{ si } c_1 \neq 1.$$

Par continuité de y , cette limite devrait être $|y(1)|$. Ceci impose $c_1 = 1$. Ainsi

$$\text{soit } y \equiv 0 \text{ sur }]0, 1[\text{ soit } y(t) = \frac{\ln t}{t^2 - 1} \text{ sur }]0, 1[.$$

Le même raisonnement sur $]1, +\infty[$ donne

$$\text{soit } y \equiv 0 \text{ sur }]1, +\infty[\text{ soit } y(t) = \frac{\ln t}{t^2 - 1} \text{ sur }]1, +\infty[.$$

Indépendamment, on a

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{\ln t}{t^2 - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{t+1} \frac{\ln t - \ln 1}{t - 1} = \frac{1}{2} (\ln)'(1) = \frac{1}{2}.$$

Supposons que $y \equiv 0$ sur $]0, 1[$. Par continuité en 1, on a alors $y(1) = 0$. Or, si $y(t) = \frac{\ln t}{t^2 - 1}$ pour $t > 1$, à la limite $t \rightarrow 1^+$ et par continuité, on obtient $y(1) = 1/2$, ce qui est contradictoire. Donc $y(t) = 0$ pour tout $t > 0$.

Supposons que $y(t) = \frac{\ln t}{t^2 - 1}$ pour $0 < t < 1$. Par le même raisonnement, on obtient $y(t) = \frac{\ln t}{t^2 - 1}$ pour $t > 0$, $t \neq 1$, et $y(1) = 1/2$. Finalement,

$$\text{soit } y \equiv 0 \text{ sur }]0, +\infty[, \text{ soit } y(t) = \begin{cases} \frac{\ln t}{t^2 - 1} & \text{si } t \neq 1 \\ y(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

On a vu que $y \in C^0(\mathbb{R})$. Il faut maintenant montrer qu'elle est C^1 . Dans le cas $z \equiv 0$, c'est évident. Dans l'autre cas, on a $y \in C^1(]0, 1[\cup]1, +\infty[)$ et le calcul direct donne

$$y'(t) = \frac{\frac{t^2-1}{t} - 2t \ln t}{(t^2 - 1)^2} = \frac{t^2 - 1 - 2t^2 \ln t}{t(t^2 - 1)^2} \text{ pour } t \neq 1.$$

Etudions la limite en 1. Par commodité, posons $t = 1 + h$ avec $h > -1$, $h \neq 0$ pour obtenir

$$\begin{aligned} y'(1+h) &= \frac{(1+h)^2 - 1 - 2(1+h)^2 \ln(1+h)}{(1+h)((1+h)^2 - 1)^2} = \frac{2h + h^2 - 2(1+2h+O(h^2))(h - h^2/2 + o(h))}{(1+o(1))(2h+o(h))^2} \\ &= \frac{2h + h^2 - 2((1+2h)h - h^2/2) + o(h^2)}{h^2(4+o(1))} = \frac{-2h^2 + o(h^2)}{h^2(4+o(1))} = \frac{-1}{2} + o(1) \end{aligned}$$

Donc $\lim_{t \rightarrow 1} y'(t) = -1/2$ existe. Comme y est continue en 0, elle est ainsi dérivable. De plus la dérivée est continue, donc y est C^1 .

Conclusion : Les deux fonctions ci-dessus sont les seules solutions C^1 du problème.

Exercice 4. Résolution du système

$$\begin{cases} x' = x + z + e^t + 1 \\ y' = -y - z \\ z' = 2y + z \end{cases}$$

3. PROBLÈME

On considère les solutions $u \in C^2(I)$, I intervalle, de

$$-u'' + u = u^4$$

telles que

$$u(0) > 0, u'(0) = 0 \text{ et } u(t) > 0 \text{ pour tout } t \in I.$$

- (1) Montrez l'existence d'une solution constante à ce problème

Solution : La fonction constante égale à 1.

- (2) Justifiez qu'on peut supposer que I est un intervalle maximal.

Solution : On a $u'' = f(u)$ avec $f : x \mapsto x - x^4$ une fonction C^1 . Pour $k > 0$, il existe donc une unique solution maximale sur I telle que $0 \in \text{Int}(I)$ et $u(0) = k$ et $u'(0) = 0$

- (3) Montrez qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{(u')^2}{2} + \frac{u^5}{5} - \frac{u^2}{2} = C \text{ sur } I.$$

Solution : Routine : il suffit de dériver le membre de gauche pour obtenir 0, donc constant sur l'intervalle I .

- (4) Montrez que u est bornée et que l'intervalle maximal est $I = \mathbb{R}$.

Solution : On a $F(u(t)) \leq C$ pour tout $t \in I$, avec $F(X) = \frac{X^5}{5} - \frac{X^2}{2}$ pour tout $X \geq 0$. Or $\lim_{X \rightarrow +\infty} F(X) = +\infty$, donc il existe $R > 0$ tel que $X > R \Rightarrow F(X) > C + 1$. Donc $u(t) \leq R$ pour tout $t \in I$. De plus $u > 0$, donc $|u(t)| \leq R$ pour tout t , donc u est bornée. Comme $(u')^2 = 2(C - F(u))$, on a aussi u' bornée, donc $(u(t), u'(t))$ est uniformément bornée dans $\mathbb{R}^2$. Il suit du théorème d'explosion que l'intervalle I est $\mathbb{R}$.

- (5) Montrez que u est **paire**.

Solution : Posons $v(t) = u(-t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On a $-v'' + v = v^4$, $v(0) = u(0)$ et $v'(0) = -u'(0) = 0 = u'(0)$. Par unicité dans CL, on a $u \equiv v$ sur $\mathbb{R}$, puis $u(t) = u(-t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

- (6) Tableau de variation et graphe approximatif de $X \mapsto \frac{X^5}{5} - \frac{X^2}{2}$ sur $[0, +\infty[$.

- (7) Montrez que $u \equiv 1$ si et seulement si $C = \frac{3}{10}$.

On suppose dorénavant que $C \neq \frac{3}{10}$.

- (8) On suppose que u admet au moins trois points critiques. Montrez alors que u est périodique.

- (9) On suppose que u admet au plus deux points critiques.

(a) En utilisant la parité, montrez que u n'admet qu'un seul point critique.

(b) Montrez que u, u', u'' admettent des limites en $\pm\infty$.

(c) Montrez que ces limites sont nulles.

- (10) Concluez en décrivant les propriétés de u suivant la valeur de $u(0) > 0$.

4. HYPERSURFACE STABLE

On se donne $X \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ tel que $\langle X(p), p \rangle = 0$ pour tout $p \in \mathbb{R}^n$ (on a pris le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$, et $\|\cdot\|$ est la norme associée). On se donne $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ une solution de $x'(t) = X(x(t))$ pour tout $t \in I$. On suppose que $0 \in I$ et que

$$x(0) \in \mathbb{S} = \{z \in \mathbb{R}^n / \|z\|^2 = 1\}$$

Montrez que $x(t) \in \mathbb{S}$ pour tout $t \in I$.

Généralisation I. On se donne une fonction $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et on définit l'ensemble $M := f^{-1}(\{0\})$. On se donne $X \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ qui vérifie

$$X(p) \in \text{Ker } df_p \text{ pour tout } p \in \mathbb{R}^n$$

On se donne $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ une solution de $x'(t) = X(x(t))$ pour tout $t \in I$. Montrez que

$$\{\text{il existe } t_0 \in I \text{ tel que } x(t_0) \in M\} \Leftrightarrow \{x(t) \in M \text{ pour tout } t \in I\}$$

Généralisation II (plus dur). On se donne une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que $f(p_0) = 0$, $\partial_1 f(p) \neq 0$ pour tout $p \in \mathbb{R}^n$ et on définit l'ensemble $M := f^{-1}(\{0\})$. On se donne $X \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ qui vérifie

$$X(p) \in \text{Ker } df_p \text{ pour tout } p \in M.$$

On se donne $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ une solution de $x'(t) = X(x(t))$ pour tout $t \in I$, avec $x(0) = p_0 \in M$. Le but est de montrer que $x(t) \in M$ pour tout $t \in I$.

- (1) On pose $\varphi(x_1, \dots, x_n) := (f(x_1, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Montrez qu'il existe $\delta > 0$ et un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ qui contient p_0 tels que $\varphi : U \rightarrow B(0, \delta)$ est un C^∞ -difféomorphisme avec $\varphi(p_0) = 0$.

- (2) Montrez que $M \cap U = \varphi^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1} \cap B(0, \delta))$.

Pour simplifier la preuve, on va supposer dorénavant que $U = \mathbb{R}^n$ et $\delta = \infty$

- (3) On pose $\tilde{X}(q) := d\varphi_{\varphi^{-1}(q)}(X(\varphi^{-1}(q)))$ pour tout $q \in \mathbb{R}^n$. On pose $u(t) = \varphi \circ x(t)$ pour tout $t \in I$. Montrez que

$$\begin{cases} u'(t) = \tilde{X}(u(t)) & \text{pour tout } t \in I \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

- (4) En utilisant $X(p) \in \text{Ker } df_p$ pour tout $p \in M$, montrez que $\tilde{X}(q) \in \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ pour tout $q \in \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$.

- (5) On pose $Y(y) = \Pi(\tilde{X}(0, y)) \in \mathbb{R}^{n-1}$ pour tout $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ où Π désigne la projection canonique $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_2, \dots, x_n)$. Soit $v \in C^1(J, \mathbb{R}^{n-1})$, $0 \in J$, la solution maximale de

$$\begin{cases} v'(t) = Y(v(t)) & \text{pour tout } t \in J \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

Montrez que $u(t) = (0, v(t)) \in \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ pour tout $t \in I \cap J$.

- (6) Déduisez-en que $x(t) \in M$ pour tout $t \in I$