

Examen final du 12 décembre (3h)

On pourra utiliser sans démonstration le lemme suivant :

Lemme : On se donne $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = l$ existe. Alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ existe et vaut l .

1. LE WRONSKIEN

Exercice 1. Soit $A \in C^0(I, M_n(\mathbb{R}))$ et soit l'équation différentielle $Y' = A(t)Y$, notée (E) avec $Y \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$. Pour $Y_1, \dots, Y_n$ des solutions de (E) , on définit le *wronskien* par $w(t) := \det(Y_1(t), \dots, Y_n(t))$ pour tout $t \in I$.

- (1) Montrez que $w(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$ ssi $w \not\equiv 0$ ssi $(Y_1, \dots, Y_n)$ est une famille libre dans $C^1(I, \mathbb{R}^n)$.
- (2) Montrez que pour tout $t_0 \in I$, on a

$$w(t) = w(t_0) \cdot e^{\int_{t_0}^t \text{Tr}(A(s)) ds} \text{ pour tout } t \in I.$$

- (3) Écrivez le wronskien de l'équation $y'' + qy = 0$ avec $q \in C^0(I)$.

Exercice 2. Soient $a, b \in C^0(\mathbb{R})$ et soient $y_1, y_2 \in C^2(\mathbb{R})$ deux solutions linéairement indépendantes de $y'' + ay' + by = 0$.

- (1) Justifiez l'existence de y_1, y_2 .
- (2) **On admet** que les zéros éventuels de y_1 sont isolés.
- (3) En utilisant le wronskien, montrez qu'entre deux zéros consécutifs de y_1 , il y a exactement un zéro de y_2 .

2. EXERCICES

Exercice 3. On cherche ici les solutions $y \in C^1(]0, +\infty[)$ de

$$y' \ln t + 2ty^2 - \frac{y}{t} = 0. \quad (E)$$

- (1) En posant $z(t) := \frac{y(t)}{\ln t}$, donnez l'équation différentielle vérifiée par z sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$. Dorénavant, on pose $I_1 =]0, 1[$ et $I_2 =]1, +\infty[$.
- (2) Montrez que si z s'annule quelque part sur I_1 , alors z s'annule partout sur I_1 . On admet qu'on a le même résultat pour I_2 .
- (3) Résolvez l'équation différentielle vérifiée par z sur I_1 , puis sur I_2 .
- (4) Déduisez-en les solutions de (E) sur I_1 et sur I_2 .
- (5) Recollement (plus dur) : déterminez les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$.

Exercice 4. Résolution du système

$$\begin{cases} x' = x + z + e^t + 1 \\ y' = -y - z \\ z' = 2y + z \end{cases}$$

3. PROBLÈME

On considère les solutions $u \in C^2(I)$, I intervalle, de

$$-u'' + u = u^4$$

telles que

$$u(0) > 0, u'(0) = 0 \text{ et } u(t) > 0 \text{ pour tout } t \in I.$$

- (1) Montrez l'existence d'une solution constante à ce problème
- (2) Justifiez qu'on peut supposer que I est un intervalle maximal.

- (3) Montrez qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{(u')^2}{2} + \frac{u^5}{5} - \frac{u^2}{2} = C \text{ sur } I.$$

- (4) Montrez que u est bornée et que l'intervalle maximal est $I = \mathbb{R}$.
 (5) Montrez que u est **paire**.
 (6) Tableau de variation et graphe approximatif de $X \mapsto \frac{X^5}{5} - \frac{X^2}{2}$ sur $[0, +\infty[$.
 (7) Montrez que $u \equiv 1$ si et seulement si $C = \frac{-3}{10}$.

On suppose dorénavant que $C \neq \frac{-3}{10}$.

- (8) On suppose que u admet au moins trois points critiques. Montrez alors que u est périodique.
 (9) On suppose que u admet au plus deux points critiques.
 (a) En utilisant la parité, montrez que u n'admet qu'un seul point critique.
 (b) Montrez que u, u', u'' admettent des limites en $\pm\infty$.
 (c) Montrez que ces limites sont nulles.
 (10) Concluez en décrivant les propriétés de u suivant la valeur de $u(0) > 0$.

4. HYPERSURFACE STABLE

On se donne $X \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ tel que $\langle X(p), p \rangle = 0$ pour tout $p \in \mathbb{R}^n$ (on a pris le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$, et $\|\cdot\|$ est la norme associée). On se donne $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ une solution de $x'(t) = X(x(t))$ pour tout $t \in I$. On suppose que $0 \in I$ et que

$$x(0) \in \mathbb{S} = \{z \in \mathbb{R}^n / \|z\|^2 = 1\}$$

Montrez que $x(t) \in \mathbb{S}$ pour tout $t \in I$.

Généralisation I. On se donne une fonction $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et on définit l'ensemble $M := f^{-1}(\{0\})$. On se donne $X \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ qui vérifie

$$X(p) \in \text{Ker } df_p \text{ pour tout } p \in \mathbb{R}^n$$

On se donne $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ une solution de $x'(t) = X(x(t))$ pour tout $t \in I$. Montrez que

$$\{\text{il existe } t_0 \in I \text{ tel que } x(t_0) \in M\} \Leftrightarrow \{x(t) \in M \text{ pour tout } t \in I\}$$

Généralisation II (plus dur). On se donne une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que $f(p_0) = 0$, $\partial_1 f(p) \neq 0$ pour tout $p \in \mathbb{R}^n$ et on définit l'ensemble $M := f^{-1}(\{0\})$. On se donne $X \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ qui vérifie

$$X(p) \in \text{Ker } df_p \text{ pour tout } p \in \mathbb{R}^n.$$

On se donne $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ une solution de $x'(t) = X(x(t))$ pour tout $t \in I$, avec $x(0) = p_0 \in M$. Le but est de montrer que $x(t) \in M$ pour tout $t \in I$.

- (1) On pose $\varphi(x_1, \dots, x_n) := (f(x_1, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Montrez qu'il existe $\delta > 0$ et un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ qui contient p_0 tels que $\varphi : U \rightarrow B(0, \delta)$ est un C^∞ -difféomorphisme avec $\varphi(p_0) = 0$.
 (2) Montrez que $M \cap U = \varphi^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1} \cap B(0, \delta))$.

Pour simplifier la preuve, on va supposer dorénavant que $U = \mathbb{R}^n$ et $\delta = \infty$

- (3) On pose $\tilde{X}(q) := d\varphi_{\varphi^{-1}(q)}(X(\varphi^{-1}(q)))$ pour tout $q \in \mathbb{R}^n$. On pose $u(t) = \varphi \circ x(t)$ pour tout $t \in I$. Montrez que

$$\begin{cases} u'(t) = \tilde{X}(u(t)) & \text{pour tout } t \in I \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

- (4) En utilisant $X(p) \in \text{Ker } df_p$ pour tout $p \in M$, montrez que $\tilde{X}(q) \in \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ pour tout $q \in \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$.
 (5) On pose $Y(y) = \Pi(\tilde{X}(0, y)) \in \mathbb{R}^{n-1}$ pour tout $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ où Π désigne la projection canonique $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_2, \dots, x_n)$. Soit $v \in C^1(J, \mathbb{R}^{n-1})$, $0 \in J$, la solution maximale de

$$\begin{cases} v'(t) = Y(v(t)) & \text{pour tout } t \in J \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

Montrez que $u(t) = (0, v(t)) \in \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ pour tout $t \in I \cap J$.

- (6) Déduisez-en que $x(t) \in M$ pour tout $t \in I$