

# TD Modélisation - Informatique:

## Construction d'un cône de scories (4h)

### Objectifs:

Le but du projet est de **regarder ce qui contrôle la construction d'un cône de scories** tels ceux qui se sont construits sur les flancs du mont Etna (voir l'article *McGetchin et al.*, 1974). Ce sont en général des objets surprenants par leur symétrie, leurs formes similaires avec des pentes assez raides se branchant progressivement sur les surfaces sur lesquelles ils reposent. Ils sont générés par l'expulsion régulière de gaz dans le cratère du cône, le gaz entraînant avec lui scories, cendres et bombes. Suivant leur température lorsqu'ils touchent le sol, ces éjectas se soudent plus ou moins entre eux.



### 1. Présentation du problème

Il est proposé de modéliser la croissance d'un cône en 2D (coupe radiale au travers du cône) en supposant que les trajectoires sont "balistiques" sans frottement dans l'air, c'est à dire sont des paraboles dépendant uniquement de la vitesse et de l'angle initiaux du projectile.

La description mathématique de cette trajectoire peut être dérivée à partir des équations du mouvement sous une accélération constante. Pour cela:

1. Ecrire les équations du mouvement pour un projectile sous une accélération constante (la gravité) dans les directions verticales ( $y$ ) et horizontales ( $x$ ) en fonction du temps.  $y(t)$  et  $x(t)$  sont les positions verticales et horizontales au temps respectivement.
2. Supposer que le projectile est lancé depuis l'origine  $x_0, y_0$  avec une vitesse initiale  $v_0$  à un angle initial  $\theta$  par rapport à l'horizontale.
3. Substituer les conditions initiales dans les équations du mouvements.
4. Combiner les deux équations en isolant  $t$  dans l'équation de la position horizontale par rapport au temps et en le substituant dans l'autre.

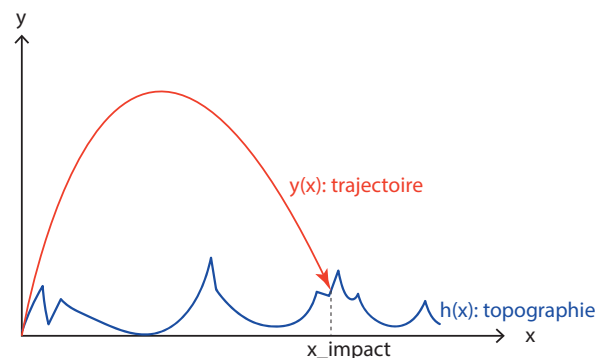
### 2. Programmation initiale

- **Étape 1 : Implémentation du maillage.** La hauteur,  $h$ , du cône dépend du temps et de l'espace  $x$ . Choisir une distance en  $x$  maximale,  $x_{\max}=400$ , et un pas en  $x$ ,  $dx=2$ . Ces paramètres définissent la taille du maillage et donc les temps de calcul (ils pourront être

modifiés par la suite). Construire un axe des  $x$  grâce à la fonction `arange` de `numpy`, de 0 à  $x_{\max}$ . Le cratère est centré en 0. Combien de points en  $x$  comporte alors votre maillage ? Initialiser le maillage de la topographie,  $h$ , à 0 m. Nous considérerons ensuite pour simplifier que les points de  $-x_{\max}$  à 0 sont une symétrie de la topographie du cône de 0 à  $x_{\max}$ .

- **Étape 2 : Initialisation.** Définir les paramètres initiaux à partir des résultats de McGetchin page 3265: la hauteur moyenne des particules ( $dh=0.8$ ), la vitesse initiale des éjectas,  $v_0$ , une variation d'angle maximale,  $dv_0$ , un angle maximal et minimal possible des éjectas ( $\theta_{\min}$ ,  $\theta_{\max}$ ). Définir aussi le nombre d'itérations ( $n_{\text{iter}}$ ), c'est à dire le nombre d'éjectas qui seront lancés. Commencer par un faible nombre d'itération,  $n_{\text{iter}}=10$ , par exemple.
- **Étape 3 :** Il s'agira ensuite d'écrire une fonction qui calcule une trajectoire parabolique,  $y$ , pour un angle initial,  $\text{angle}_0$ , une vitesse initiale,  $v_0$ , une hauteur initiale,  $h_0$ , et un maillage en  $x$  donnés. Vérifier la validité de la fonction en traçant la trajectoire d'un ejecta en fonction de  $x$ .
- **Étape 4 :** Pour chaque itération, "lancer" un ejecta avec un angle et une vitesse initiale aléatoires mais suivant des distributions de probabilité en accord avec les données mesurées par *McGetchin et al.* Utiliser la fonction `random.gauss(mu, sigma)` pour générer une distribution de probabilité de type gaussienne de la vitesse des éjectas ou la fonction `random.uniform(min, max)` pour générer des distributions uniformes des angles des éjectas.

- **Étape 5 :** Calculer pour chaque particule le point d'intersection ( $x_{\text{impact}}$ ) de sa trajectoire,  $y$ , avec la topographie,  $h$ , grâce à la fonction `argmax` de `numpy`. Rq: `np.argmax(y<1)` est équivalent à `np.where(y<1)` mais ne renvoie qu'un seul élément. Mettre à jour la topographie au point d'impact en tenant compte de la taille des éjectas ( $dh$ ). Prendre  $h(x=0)=0=\text{fixe}$  au cours du temps.



- **Étape 5 :** Itérer sur suffisamment d'éjectas pour créer une topographie de cône conséquente.
- **Étape 6 : Générer un film de l'évolution du cône de scories.** L'approche la plus simple pour faire une vidéo est de dessiner l'évolution de la topographie  $n_{\text{plots}}$  fois, et donc de réaliser  $n_{\text{iterations}} // n_{\text{plots}}$  dessins. Initialiser une nouvelle figure en tout début de code. Pour chaque itération, vérifier que le numéro d'itération est un multiple de  $n_{\text{iterations}} // n_{\text{plots}}$ , puis pour chaque dessin, utiliser les fonctions `plt.pause(0.05)` et `plt.draw()` dans la boucle pour faire une brève pause entre les images et dessiner la mise à jour.
- *Suggestion 1 (aisée) :* Représenter quelques paraboles de trajectoires pour donner l'impression d'un cône en construction façon photos du Stromboli, puis afficher la topographie.

- *Suggestion 2 (un peu plus technique car il faut alors construire une fonction à deux variables  $h(x, t)$  afin de sauvegarder la topographie, par conséquent le maillage sera à deux dimensions) : à chaque intervalle de sauvegarde et de représentation de la topographie, modifier la couleur de la dernière unité par rapport à la précédente pour faire apparaître la stratigraphie des dépôts (utiliser par exemple la fonction `plt.fill_between()`).*

- **Étape 7 : Explorer l'influence de l'angle déjection et de l'accélération gravitaire (prendre par exemple un  $g$  lunaire) sur les résultats.**

### 3. Explorer l'influence de la pente critique de stabilité

- Ajouter un angle critique de  $30^\circ$  de stabilité des pentes (on dira que les cendres ne sont pas suffisamment chaudes pour bien se souder et créer une cohésion à macro-échelle). Utiliser un calcul itératif : si au point d'atterrissage l'incrément de matière conduit à une pente vers l'aval supérieure à l'angle critique, alors on transfère l'éjecta,  $dh$ , vers la cellule aval et on teste la pente critique sur cette cellule aval vis à vis de la cellule suivante, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'éjecta arrive dans une cellule où elle est « stable ».
- **Comparer l'évolution de la morphologie cône avec le cas précédent. Que se passe-t'il lorsque les flancs du conduit atteignent la pente critique (taille du cratère, position et hauteur des crêtes) ?**

### 4. Explorer l'influence du coefficient de réabsorption au niveau du conduit

- Prendre le cas de figure où  $h(x=0)$  évolue au cours du temps c'est à dire au fur et à mesure que se construit le cône (en accord avec les coupes de la fig. 7 de McGetchin et al.). Supposer que le conduit reste ouvert et que tout éjecta qui "roule" au fond a une probabilité  $p$  de retomber dans le conduit et  $(1-p)$  de se souder sur le bord du conduit qu'elle contribue dans ce cas à élever.
- **Comparer l'évolution de la morphologie cône avec le cas précédent.**

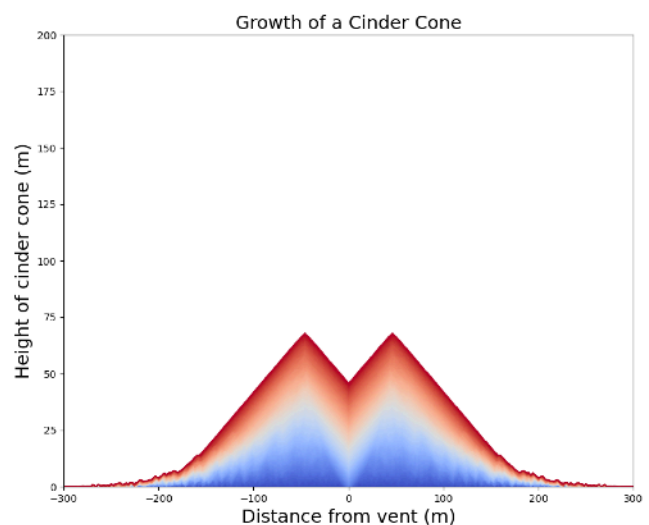


Fig: Résultat attendu avec une pente critique et un coefficient de réabsorption.

### Références

McGetchin, T. R., Settle, M., & Chouet, B. A. (1974). Cinder cone growth modeled after northeast crater, Mount Etna, Sicily. *Journal of Geophysical research*, 79(23), 3257-3272.