

## Corrigé du TD2 : Ensembles de définition et valeur absolue

**Exercice 1.** Déterminez les ensembles de définition des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{llll}
 (a) x \mapsto x^3 - 5x + \frac{1}{x} & (b) x \mapsto \frac{1}{x^2+2x-3} & (c) x \mapsto \frac{x^2-6x+5}{x^2+2x-3} & (d) x \mapsto \sqrt{x^2-5x+6} \\
 (e) x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x-1}-2} & (f) x \mapsto \frac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-5x+6} & (g) x \mapsto \sqrt{\frac{x-1}{x-3}} & (h) x \mapsto \sqrt{x(x-1)(x-2)} \\
 (i) x \mapsto x - \frac{x}{\sqrt{x+1}} & (j) x \mapsto \frac{x-3}{(x-1)\sqrt{x-2}} & (k) x \mapsto \sqrt{1 - \frac{x+1}{x^2+2x+2}} & (l) x \mapsto \sqrt{1-x^2} \\
 (m) s \mapsto \sqrt{-2s^2-s+1}
 \end{array}$$

*Corrigé :* **(a)** il faut  $x \neq 0$  car on a un dénominateur, donc  $D_a = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^* = ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$ .

**(b)** là encore on a un dénominateur, donc il faut  $x^2 + 2x - 3 \neq 0$ . On résout  $x^2 + 2x - 3 = 0$  :  $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16 = 4^2 > 0$ , donc deux zéros  $x_1 = \frac{-2-\sqrt{16}}{2} = -3$  et  $x_2 = \frac{-2+\sqrt{16}}{2} = 1$ . Il faut exclure ces deux valeurs :  $D_b = \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\} = ]-\infty, -3[ \cup ]-3, 1[ \cup ]1, +\infty[$ .

**(c)** Ici encore il faut  $x^2 + 2x - 3 \neq 0$  car c'est le dénominateur. Donc, comme pour (b), on a  $D_c = \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\} = ]-\infty, -3[ \cup ]-3, 1[ \cup ]1, +\infty[$ .

**(d)** Comme on a une racine, il faut  $x^2 - 5x + 6 \geq 0$ . Déterminons les solutions de  $x^2 - 5x + 6 = 0$  :  $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 1 > 0$ , donc deux zéros  $x_1 = \frac{-(-5)-\sqrt{\Delta}}{2} = 2$  et  $x_2 = \frac{-(-5)+\sqrt{\Delta}}{2} = 3$ . On peut ainsi factoriser  $x^2 - 5x + 6 = 1 \times (x - x_1)(x - x_2) = (x - 2)(x - 3)$ . Un rapide tableau de signes donne alors

|                  | $-\infty$ | 2 | 3 | $+\infty$ |   |
|------------------|-----------|---|---|-----------|---|
| $x - 2$          | -         | 0 | + | +         |   |
| $x - 3$          | -         | - | 0 | +         |   |
| $(x - 2)(x - 3)$ | +         | 0 | - | 0         | + |

Pour avoir  $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3) \geq 0$ , il faut donc  $x \in D_d = ]-\infty, 2] \cup [3, +\infty[$ .

**(e)** Pour  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}-2}$ , on a plusieurs contraintes :

- Pour que  $\sqrt{x-1}$  fasse sens, il faut  $x - 1 \geq 0$ , donc  $x \geq 1$ .
- Pour le dénominateur, il faut  $\sqrt{x-1} - 2 \neq 0$ . On résout  $\sqrt{x-1} - 2 = 0$ , donc

$$\sqrt{x-1} - 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}^2 = 2^2 \Leftrightarrow x - 1 = 4 \Leftrightarrow x = 5$$

et donc, on exclut 5.

Finalement  $D_e = [1, +\infty[ \setminus \{5\} = [1, 5[ \cup ]5, +\infty[$ .

**(f)** Dénominateur, donc il faut  $x^2 - 5x + 6 \neq 0$ . Il suit de la résolution de (d) qu'on a alors  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$ .

**(g)** Pour  $x \mapsto \sqrt{\frac{x-1}{x-3}}$ , il faut plusieurs choses :

- On a un dénominateur, il faut donc  $x - 3 \neq 0$ , donc  $x \neq 3$ .
- On a une racine, il faut donc  $\frac{x-1}{x-3} \geq 0$ .

Pour le dernier cas, on va faire un tableau de signes :

|                   | $-\infty$ | 1 | 3 | $+\infty$ |
|-------------------|-----------|---|---|-----------|
| $x - 1$           | -         | 0 | + | +         |
| $x - 3$           | -         | - | 0 | +         |
| $\frac{x-1}{x-3}$ | +         | 0 | - |           |

On trouve alors le domaine  $D_g = ]-\infty, 1] \cup ]3, +\infty[$ .

(h) Pour  $x \mapsto \sqrt{x(x-1)(x-2)}$ , il faut  $x(x-1)(x-2) \geq 0$  car on a une racine. Un tableau de signes d'impose :

|               | $-\infty$ | 0 | 1 | 2 | $+\infty$ |
|---------------|-----------|---|---|---|-----------|
| $x$           | -         | 0 | + | + | +         |
| $x - 1$       | -         | - | 0 | + | +         |
| $x - 2$       | -         | - | - | 0 | +         |
| $x(x-1)(x-2)$ | -         | 0 | + | 0 | -         |

Et donc  $D_h = [0, 1] \cup [2, +\infty[$ .

(i) Deux contraintes :

- On a une racine, donc il faut  $x + 1 \geq 0$ , c'est-à-dire  $x \geq -1$ .
- On a un dénominateur, il faut donc  $\sqrt{x+1} \neq 0$ , donc  $x + 1 \neq 0$ , et  $x \neq -1$ .

Finalement  $D_i = ]-1, +\infty[$ .

(j) Deux contraintes :

- On a une racine, donc il faut  $x - 2 \geq 0$ , c'est-à-dire  $x \geq 2$ .
- On a un dénominateur, il faut donc  $(x-1)\sqrt{x-2} \neq 0$ , donc à la fois  $x-1 \neq 0$ , et  $\sqrt{x-2} \neq 0$ . Il faut donc  $x \neq 1$  et  $x \neq 2$ .

Finalement, en regroupant tout, on a  $D_j = ]2, +\infty[ \setminus \{1\} = ]2, +\infty[$ .

(k) Pour  $x \mapsto \sqrt{1 - \frac{x+1}{x^2+2x+2}}$ , il faut :

- $x^2 + 2x + 2 \neq 0$  car c'est un dénominateur,
- $1 - \frac{x+1}{x^2+2x+2} \geq 0$  car on a une racine.

Pour résoudre  $x^2 + 2x + 2 = 0$ , on a  $\Delta = -4 < 0$ , donc pas de zéro. De plus,  $x^2 + 2x + 2$  est du signe de  $1 > 0$ , donc  $x^2 + 2x + 2 > 0$  pour tout  $x > 0$ .

Maintenant que le dénominateur est non-nul, on a

$$1 - \frac{x+1}{x^2+2x+2} = \frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+2} - \frac{x+1}{x^2+2x+2} = \frac{x^2+2x+2-x-1}{x^2+2x+2} = \frac{x^2+x+1}{x^2+2x+2}.$$

On a vu que le dénominateur est  $> 0$ . Pour le numérateur, étudions  $x^2 + x + 1 = 0$  :  $\Delta = -3 < 0$ , donc pas de zéro, et  $x^2 + x + 1$  est du signe de 1, donc  $x^2 + x + 1 > 0$ . Finalement, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$1 - \frac{x+1}{x^2+2x+2} = \frac{x^2+x+1}{x^2+2x+2} > 0.$$

Donc  $D_k = \mathbb{R}$ .

(l)  $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ . Avec la racine, il faut  $1-x^2 \geq 0$ . Soit on écrit directement  $1-x^2 = (1-x)(1+x) = -(x-1)(x+1)$ , soit on cherche la factorisation en cherchant les zéros. Pour  $1-x^2 = -x^2+0 \times x+1 = 0$ , on a  $\Delta = 0^2 - 4 \times (-1) = 4 > 0$ , les zéros sont alors  $x_1 = -1$  et  $x_2 = 1$ , le coefficient de  $x^2$  étant  $-1$ , on a  $-x^2+1 = (-1) \times (x-1)(x+1) = -(x-1)(x+1)$ . Et du coup on fait un tableau de signes :

|               |           |      |     |           |
|---------------|-----------|------|-----|-----------|
|               | $-\infty$ | $-1$ | $1$ | $+\infty$ |
| $-1$          | -         |      | -   |           |
| $x+1$         | -         | 0    | +   |           |
| $x-1$         | -         |      | -   | 0         |
| $-(x+1)(x-1)$ | -         | 0    | +   | 0         |

Et donc  $1 - x^2 \geq 0$  si et seulement si  $-1 \leq x \leq 1$ . Donc  $D_l = [-1, 1]$ .

(m)  $s \mapsto \sqrt{-2s^2 - s + 1}$ . Il faut  $-2s^2 - s + 1 \geq 0$ . On trouve les zéros de  $-2s^2 - s + 1 = 0$  :  $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-2) \times 1 = 9 > 0$ , donc deux zéros  $s_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{9}}{2 \times (-2)} = -\frac{1}{2}$  et  $s_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{9}}{2 \times (-2)} = 1$ . Donc  $-2s^2 - s + 1 = -2(s + \frac{1}{2})(s - 1)$ . Et re-tableau :

|                              |           |                |     |           |
|------------------------------|-----------|----------------|-----|-----------|
|                              | $-\infty$ | $-\frac{1}{2}$ | $1$ | $+\infty$ |
| $-2$                         | -         |                | -   |           |
| $s + \frac{1}{2}$            | -         | 0              | +   |           |
| $s - 1$                      | -         |                | -   | 0         |
| $-2(s + \frac{1}{2})(s - 1)$ | -         | 0              | +   | 0         |

Et donc  $D_m = [-\frac{1}{2}, 1]$ .

## 1. VALEUR ABSOLUE

**Exercice 2.** Montrez les formules suivantes pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$x_+ - x_- = x ; x_+ + x_- = |x| ; x_+ = \frac{x + |x|}{2}.$$

*Solution :* On rappelle que  $|x| = \max\{x, -x\}$ ,  $x_+ = \max\{x, 0\}$  et  $x_- = \max\{0, -x\}$ .

(1) Pour montrer que  $x_+ - x_- = x$  pour  $x \in \mathbb{R}$ , il faut distinguer les cas positifs et négatifs :

- (a) Si  $x \geq 0$ , alors  $x_+ = x$  et  $x_- = 0$ , donc  $x_+ - x_- = x - 0 = x$  : la formule est ok.
- (b) Si  $x \leq 0$ , alors  $x_+ = 0$  et  $x_- = -x$ , donc  $x_+ - x_- = 0 - (-x) = x$  : la formule est ok.

Dans tous les cas, on a donc prouvé que  $x_+ - x_- = x$ .

(2) Pour montrer que  $x_+ + x_- = |x|$  pour  $x \in \mathbb{R}$ , il faut distinguer les cas positifs et négatifs :

- (a) Si  $x \geq 0$ , alors  $|x| = x$ ,  $x_+ = x$  et  $x_- = 0$ , donc  $x_+ + x_- = x = |x|$  : la formule est ok.
- (b) Si  $x \leq 0$ , alors  $|x| = -x$ ,  $x_+ = 0$  et  $x_- = -x$ , donc  $x_+ + x_- = 0 + (-x) = -x = |x|$  : la formule est ok.

Dans tous les cas, on a donc prouvé que  $x_+ + x_- = |x|$ .

(3) Pour montrer que  $x_+ = \frac{x + |x|}{2}$  pour  $x \in \mathbb{R}$ , il faut distinguer les cas positifs et négatifs :

- (a) Si  $x \geq 0$ , alors  $|x| = x$  et  $x_+ = x$ , donc  $\frac{x + |x|}{2} = \frac{x + x}{2} = x = x_+$  : la formule est ok.
- (b) Si  $x \leq 0$ , alors  $|x| = -x$ ,  $x_+ = 0$ , donc  $\frac{x + |x|}{2} = \frac{x - x}{2} = 0 = x_+$  : la formule est ok.

Dans tous les cas, on a donc prouvé que  $\frac{x + |x|}{2} = x_+$ .

**Exercice 3.** Pour  $x, y \in \mathbb{R}$ , que vaut

$$\frac{x + y + |x - y|}{2}?$$

*Solution :* La valeur de  $|x - y|$  dépend du signe de  $x - y$ . On va donc distinguer deux cas :

— Premier cas :  $x \geq y$ . Dans ce cas  $x - y \geq 0$  et  $|x - y| = x - y$ . Ainsi,

$$\frac{x + y + |x - y|}{2} = \frac{x + y + x - y}{2} = x$$

— Second cas :  $x \leq y$ . Dans ce cas  $x - y \leq 0$  et  $|x - y| = -(x - y) = y - x$ . Ainsi,

$$\frac{x + y + |x - y|}{2} = \frac{x + y + y - x}{2} = y.$$

Finalement, on récupère à chaque fois le plus grand des deux éléments, et donc

$$\frac{x + y + |x - y|}{2} = \max\{x, y\}.$$

**Exercice 4.** Pour chacune des fonctions suivantes, déterminez une formule simple suivant la valeur de  $x$  :

- $x \mapsto 2x + |x|$ ;

*Solution :* pour  $x \leq 0$ , on a  $f(x) = 2x - x = x$ , et pour  $x \geq 0$ ,  $f(x) = 2x + x = 3x$ .

- $x \mapsto x + |x - 1|$ ;

*Solution :* pour  $x - 1 \leq 0$ , à savoir  $x \leq 1$  on a  $f(x) = x - (x - 1) = 1$ , et pour  $x - 1 \geq 0$ , à savoir  $x \geq 1$   $f(x) = x + x - 1 = 2x - 1$ .

- $x \mapsto |x| - |x - 1|$ ;

*Solution :* La valeur de  $|x|$  dépend du signe de  $x$ , donc de la position de  $x$  par rapport à 0. Pour  $|x - 1|$ , la valeur dépend si  $x \geq 1$  ou  $x \leq 1$ . On va donc faire un tableau de signe pour nous aider :

|                 | $-\infty$ | 0      | 1 | $+\infty$ |
|-----------------|-----------|--------|---|-----------|
| $x$             | -         | 0      | + | +         |
| $ x $           | -x        | 0      | x | x         |
| $x - 1$         | -         | -      | 0 | +         |
| $ x - 1 $       | -(x-1)    | -(x-1) | 0 | x+1       |
| $ x  -  x - 1 $ | -1        | 2x - 1 | 1 |           |

- $x \mapsto |x + 2| - 2|x - 1|$ .

*Solution :* La valeur de  $|x + 2|$  dépend du signe de  $x + 2$ , donc de la position de  $x$  par rapport à  $-2$ . Pour  $|x - 1|$ , la valeur dépend si  $x \geq 1$  ou  $x \leq 1$ . On va donc faire un tableau de signe pour nous aider :

|                      | $-\infty$ | -2     | 1     | $+\infty$ |
|----------------------|-----------|--------|-------|-----------|
| $x + 2$              | -         | 0      | +     | +         |
| $ x + 2 $            | -(x+2)    | 0      | x+2   | x+2       |
| $x - 1$              | -         | -      | 0     | +         |
| $ x - 1 $            | -(x-1)    | -(x-1) | 0     | x+1       |
| $ x + 2  - 2 x - 1 $ | x - 4     | 3x     | x + 4 |           |

## 2. FONCTION DE HEAVISIDE

**Exercice 5.** Pour chacune des fonctions suivantes, déterminez une formule simple suivant la valeur de  $x$  :

- $x \mapsto H(x-1)$ ;  
*Solution* : Si  $x-1 < 0$ , c'est-à-dire  $x < 1$ , on a  $H(x-1) = 0$ . Si  $x-1 \geq 0$ , c'est-à-dire  $x \geq 1$ , on a  $H(x-1) = 1$ .
- $x \mapsto H(-x)$ ;  
*Solution* : Si  $-x < 0$ , c'est-à-dire  $x > 0$ , on a  $H(-x) = 0$ . Si  $-x \geq 0$ , c'est-à-dire  $x \leq 0$ , on a  $H(-x) = 1$ .
- $x \mapsto xH(x+1) + 7$ .  
*Solution* : Si  $x+1 < 0$ , c'est-à-dire  $x < -1$ , on a  $xH(x+1) + 7 = 7$ . Si  $x+1 \geq 0$ , c'est-à-dire  $x \geq -1$ , on a  $xH(x+1) + 7 = x+7$ .