

Corrigé du TD4 : Equations différentielles à coefficients constants

1. EQUATIONS LINÉAIRES SANS SECOND MEMBRE

Exercice 1. Déterminez les solutions des ED suivantes :

$$y' = 3y, \quad 2y' + 3y = 0, \quad 4x + x = 0; \quad y' = 0$$

Corrigé :

$$\bullet y' = 3y \Leftrightarrow \text{il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } y(x) = \lambda e^{3x} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet 2y' + 3y = 0 \Leftrightarrow \text{il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } y(x) = \lambda e^{-3x/2} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet 4x + x = 0 \Leftrightarrow \text{il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } x(t) = \lambda e^{-x/4} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet y' = 0 \Leftrightarrow \text{il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } y(x) = \lambda \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} y' + 2y = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}, \\ y(0) = 3 \end{array} \right\}$$

Corrigé : il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y(x) = \lambda e^{-2x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a $3 = y(0) = \lambda e^0 = \lambda$ donc $\lambda = 3$. Du coup

$$\boxed{y(x) = 3e^{-2x} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}}$$

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} y' = 5y \quad \text{sur } \mathbb{R}, \\ y(1) = 2 \end{array} \right\}$$

Corrigé : il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y(x) = \lambda e^{5x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a $2 = y(1) = \lambda e^5$ donc $\lambda = 2e^{-5}$. Du coup

$$\boxed{y(x) = 2e^{5x-5} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}}$$

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} 2y' + 7y = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}, \\ y(-1) = 0 \end{array} \right\}$$

Corrigé : il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y(x) = \lambda e^{-7x/2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a $0 = y(-1) = \lambda e^{7/2} = \lambda$ donc $\lambda = 0$. Du coup

$$\boxed{y(x) = 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}}$$

Exercice 2. Effectuez la résolution des équations différentielles suivantes :

$$y'' + 4y = 0; \quad y'' - 4y = 0; \quad y'' - 4y' + 4y = 0.$$

Déterminez alors les solutions de chacune de ces équations telles que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 2$.

Corrigé : $y'' + 4y = 0$. Equation caractéristique : $r^2 + 4 = 0$, dont les racines complexes sont $2i$ et $-2i$. Donc $y(x) = A \cos(2x) + B \sin(2x)$. On a $0 = y(0) = A$ et $y'(x) = -2A \sin(2x) + 2B \cos(2x)$, donc $2 = y'(0) = 2B$ donc $B = 1$. Puis $y(x) = \sin(2x)$.

$y'' - 4y = 0$. Equation caractéristique : $r^2 - 4 = 0$, dont les racines sont 2 et -2 . Donc $y(x) = Ae^{2x} + Be^{-2x}$. On a $0 = y(0) = A + B$ et $y'(x) = 2Ae^{2x} - 2Be^{-2x}$, donc $2 = y'(0) = 2(A - B)$, donc $A - B = 1$ puis $A = 1/2$ et $B = -1/2$. Puis

$$y(x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \sinh(2x).$$

$y'' - 4y' + 4y = 0$. Equation caractéristique : $r^2 - 4r + 4 = 0$, dont la racine double est 2 . Donc $y(x) = (Ax + B)e^{2x}$. On a $0 = y(0) = B$ et $y'(x) = (A + 2(Ax + B))e^{2x}$, donc $2 = y'(0) = A + 2B$ $A = 2$. Puis $y(x) = 2xe^{2x}$.

Exercice 3 (Le ressort). **(a)** L'équation du mouvement linéaire d'un corps solide de masse $m > 0$ fixé à un ressort de caractéristique $k > 0$ est

$$m\ddot{x} + kx = 0.$$

Déterminez les solutions de cette équation. Montrez que le mouvement est périodique et donnez sa période.

(b) On ajoute un terme d'amortissement $\lambda > 0$ de sorte que l'équation devient

$$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = 0.$$

Résolvez cette équation. Que se passe-t-il lorsque $t \rightarrow +\infty$?

Corrigé : **(a)** équation caractéristique $mr^2 + k = 0$, $\Delta = -4mk < 0$, donc deux racines complexes distinctes

$$r_1 := \frac{0 - i\sqrt{4mk}}{2m} = -i\sqrt{\frac{k}{m}} \text{ et } r_2 := \frac{0 + i\sqrt{4mk}}{2m} = i\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

On a donc

$$x(t) = (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t))$$

avec $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Le mouvement est alors périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (on a $x(t + T) = x(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$). **(b)** Equation caractéristique $mr^2 + \lambda r + k = 0$, $\Delta = \lambda^2 - 4mk$. On distingue donc 3 cas :

(1) $\Delta > 0$, c'est-à-dire $\lambda > 2\sqrt{km}$ (fort amortissement), on a 2 racines distinctes

$$r_1 := \frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4km}}{2m} \text{ et } r_2 := \frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4km}}{2m}.$$

On a donc $x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$, or $r_2 < r_1 < 0$ et donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ (même si on n'a pas encore vu les limites). L'objet s'immobilise rapidement.

(2) $\Delta = 0$, c'est-à-dire $\lambda = 2\sqrt{Lkm}$ (amortissement critique, ça n'arrive jamais), on a 1 racine double $r_1 = -\lambda/2m$ et donc $x(t) = (At + B)e^{r_1 t}$, or $r_1 < 0$ et donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$. Immobilisation rapide, sans oscillation, même faible.

- (3) $\Delta < 0$, c'est-à-dire $\lambda < 2\sqrt{km}$ (faible amortissement), on a 2 racines complexes distinctes

$$r_1 := \frac{-\lambda - i\sqrt{4mk - \lambda^2}}{2m} \text{ et } r_2 := \frac{-\lambda + i\sqrt{4mk - \lambda^2}}{2m}.$$

On a donc

$$x(t) = e^{-\frac{\lambda}{2m}t} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t))$$

avec $\omega = \frac{\sqrt{4mk - \lambda^2}}{2m}$. Or $-\lambda/2m < 0$ et donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ (idem, encore une limite...). Oscillations mais immobilisation quand même.

Exercice 4 (Circuit RLC). Soient $L, C > 0$ et $R > 0$. Déterminez les solutions de l'équation

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0.$$

Corrigé : equation caractéristique $Lr^2 + Rr + 1/C = 0$, $\Delta = R^2 - 4L/C$. On distingue donc 3 cas :

- (1) $\Delta > 0$, c'est-à-dire $R > 2\sqrt{L/C}$ (forte résistance), on a 2 racines distinctes

$$r_1 := \frac{-R + \sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L} \text{ et } r_2 := \frac{-R - \sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L}.$$

On a donc $q(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$, or $r_2 < r_1 < 0$ et donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} q(t) = 0$. Le condensateur se vide (sa charge est q).

- (2) $\Delta = 0$, c'est-à-dire $R = 2\sqrt{L/C}$ (résistance critique, ça n'arrive jamais), on a 1 racine double $r_1 = -R/2L$ et donc $q(t) = (At + B)e^{r_1 t}$, or $r_1 < 0$ et donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} q(t) = 0$. Le condensateur se vide (sa charge est q).

- (3) $\Delta < 0$, c'est-à-dire $R < 2\sqrt{L/C}$ (faible résistance), on a 2 racines complexes distinctes

$$r_1 := \frac{-R + i\sqrt{4L/C - R^2}}{2L} \text{ et } r_2 := \frac{-R - i\sqrt{4L/C - R^2}}{2L}.$$

On a donc

$$q(t) = e^{-\frac{R}{2L}t} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t))$$

avec $\omega = \frac{\sqrt{4L/C - R^2}}{2L}$. Or $-R/2L < 0$ et donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} q(t) = 0$. Le condensateur se vide (sa charge est q).

Dans tous les cas en fait, la charge disparaît dès que $R > 0$. Si on prend $R = 0$, alors on est dans le cas $\Delta < 0$, et on a $q(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$, donc un signal périodique de période $\frac{2\pi}{\omega}$.