

Solution du TD5 : Limites et intégrales élémentaires

Dans tous ces exercices, on demande de déterminer la limite si elle existe.

1. POLYNÔMES ET FRACTIONS RATIONNELLES

Exercice 1. Déterminez les limites suivantes :

- (1) $x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$ en $\pm\infty$ et en 1 ;

Solution : Pour $x \neq 1$, on a

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{x(1+\frac{1}{x})}{x(1-\frac{1}{x})} = \frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1+0}{1-0} = 1$$

- (2) $x \mapsto \frac{x-1}{x-2}$ en $\pm\infty$ et en 2 ;

Solution : $\lim_{x \rightarrow 2}(x-1) = 1 > 0$. On a $\lim_{x \rightarrow 2^+}(x-2) = 0^+$. Donc $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-1}{x-2} = +\infty$. De même $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-1}{x-2} = -\infty$

- (3) $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ en $\pm\infty$ et en 0 ;

Solution : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0$. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0^+$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

- (4) $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ aux bornes de l'ensemble de définition (ce qui peut inclure $\pm\infty$)

Solution : Ensemble de définition $D =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$. $\lim_{x \rightarrow -1^+}(x+1) = 0^+$, donc $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x+1} = +\infty$. $\lim_{x \rightarrow -1^-}(x+1) = 0^-$, donc $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x+1} = -\infty$. $\lim_{x \rightarrow +\infty}(x+1) = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$. $\lim_{x \rightarrow -\infty}(x+1) = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x+1} = 0$.

- (5) $x \mapsto \frac{x}{(x-3)^2}$ aux bornes de l'ensemble de définition (ce qui peut inclure $\pm\infty$)

Solution : Ensemble de définition $D =]-\infty, 3[\cup]3, +\infty[$. $\lim_{x \rightarrow 3} x = 3 > 0$. $\lim_{x \rightarrow 3}(x-3)^2 = 0^+$, donc $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{(x-3)^2} = +\infty$. En $\pm\infty$, on écrit

$$\frac{x}{(x-3)^2} = \frac{x}{x^2(1-\frac{3}{x})^2} = \frac{1}{x(1-\frac{3}{x})^2} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{\pm\infty \times 1} = 0.$$

- (6) $x \mapsto x - x^2$ en 0 et $\pm\infty$

Solution : Le terme dominant est x^2 . Pour $x \neq 0$, on a $x - x^2 = -x^2(1 - \frac{1}{x})$. Or $\lim_{x \rightarrow \pm\infty}(1 - \frac{1}{x}) = 1 > 0$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 = +\infty$. Donc $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x - x^2 = -\infty$.

- (7) $x \mapsto x^2 + 3x + x^3 + x$ en $\pm\infty$.

Solution : Le terme dominant est x^3 . Pour $x \neq 0$, on a

$$x^2 + 3x + x^3 + x = -x^3 \left(\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + 1 + \frac{1}{x^2} \right).$$

Or $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + 1 + \frac{1}{x^2} \right) = 1 > 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 3x + x^3 + x = -\infty$. De même $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + 3x + x^3 + x = -\infty$.

- (8) $x \mapsto x - \sqrt{x}$ en $+\infty$;

Solution : Le terme dominant est x . Pour $x \neq 0$, on a $x - \sqrt{x} = x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$. Or

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = 1 > 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x} = +\infty$.

(9) $x \mapsto \frac{x+4}{x^2+1}$ en $\pm\infty$;

Solution : On écrit

$$\frac{x+4}{x^2+1} = \frac{x(1+\frac{4}{x})}{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = \frac{1+\frac{4}{x}}{x(1+\frac{1}{x^2})} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1+0}{\pm\infty \times 1} = 0$$

(10) $x \mapsto \frac{x^4+1}{x^2+1}$ en $\pm\infty$.

Solution : On écrit

$$\frac{x^4+1}{x^2+1} = \frac{x^4(1+\frac{1}{x^4})}{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = \frac{x^2(1+\frac{1}{x^4})}{1+\frac{1}{x^2}} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \frac{+\infty \times 1}{1} = +\infty$$

Exercice 2. (1) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 - \sin x + x^7 - x^2$

Solution : Pour $x \neq 0$, on a

$$x^3 - \sin x + x^7 - x^2 = x^7 \left(\frac{1}{x^4} - \frac{\sin x}{x^7} + 1 - \frac{1}{x^5} \right)$$

On a $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^4} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^5} = 0$. On a $|\sin x| \leq 1$ puis $|\frac{\sin x}{x^7}| \leq \frac{1}{|x|^7} \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow \pm\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x^7} = 0$. Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1}{x^4} - \frac{\sin x}{x^7} + 1 - \frac{1}{x^5} \right) = 1 > 0.$$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^7 = +\infty$, donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - \sin x + x^7 - x^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^7 \left(\frac{1}{x^4} - \frac{\sin x}{x^7} + 1 - \frac{1}{x^5} \right) = +\infty \times 1 = +\infty$$

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^7 = -\infty$, donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - \sin x + x^7 - x^2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^7 \left(\frac{1}{x^4} - \frac{\sin x}{x^7} + 1 - \frac{1}{x^5} \right) = -\infty \times 1 = -\infty$$

(2) Limites au bord de l'ensemble de définition de $f(x) := x^5 - x^2 + x^3 + \frac{1}{x-3}$

Solution : L'ensemble de définition est $\mathbb{R} \setminus \{3\} =]-\infty, 3[\cup]3, +\infty[$.

Limite en $+\infty$. Le terme dominant est x^5 , on écrit alors

$$x^5 - x^2 + x^3 + \frac{1}{x-3} = x^5 \left(1 - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^5(x-3)} \right)$$

et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^5(x-3)} \right) = 1 > 0.$$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 = +\infty$, donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 - x^2 + x^3 + \frac{1}{x-3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 \left(1 - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^5(x-3)} \right) = +\infty \times 1 = +\infty$$

Limite en $-\infty$. Même stratégie. On obtient alors

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 - x^2 + x^3 + \frac{1}{x-3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 \left(1 - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^5(x-3)} \right) = -\infty \times 1 = -\infty$$

Limite en 3. On a $\lim_{x \rightarrow 3} x^5 - x^2 + x^3 = 207$ et le terme dominant est $\frac{1}{x-3}$.

On a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{X} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{X} = -\infty.$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty,$$

puis

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 3^+} x^5 - x^2 + x^3 + \frac{1}{x-3} = +\infty} \text{ et } \boxed{\lim_{x \rightarrow 3^-} x^5 - x^2 + x^3 + \frac{1}{x-3} = -\infty}$$

(3) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x-2}$

Solution : c'est une forme indéterminée $\frac{0}{0}$. Factorisons le numérateur : on trouve 2 et 3 comme zéros, donc $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$ puis $\frac{x^2 - 5x + 6}{x-2} = x-3$ et donc

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x-2} = 2-3 = -1}$$

(4) Ensemble de définition et limites aux bord de $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 + 2x - 3}$

Solution : Il faut que le dénominateur ne s'annule pas. Les zéros de $x^2 + 2x - 3$ sont 1 et -3 donc $x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$. Pour que ça ne s'annule pas, il faut donc $x \neq 1$ et $x \neq -3$ et $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$.

Limite en $\pm\infty$. On a

$$\frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 + 2x - 3} = \frac{x^2 \left(1 - \frac{6}{x} + \frac{5}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right)} = \frac{1 - \frac{6}{x} + \frac{5}{x^2}}{1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}}$$

et donc

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 + 2x - 3} = 1.}$$

Limite en -3. On a $\lim_{x \rightarrow -3} x^2 - 6x + 5 = 32$ et $\lim_{x \rightarrow -3} x^2 + 2x - 3 = 0$, donc $\frac{32}{0} = \pm\infty$, reste à déterminer le signe. On a $x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$ donc

$$\frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 + 2x - 3} = \frac{x^2 - 6x + 5}{x-1} \times \frac{1}{x-3} \text{ et } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 6x + 5}{x-1} = -8$$

comme

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty,$$

on obtient

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 + 2x - 3} = -\infty} \text{ et } \boxed{\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 + 2x - 3} = +\infty.}$$

Limite en 1. On a $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 6x + 5 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 + 2x - 3 = 0$, donc $\frac{0}{0}$: forme indéterminée. On va factoriser le numérateur : $x^2 - 6x + 5$ admet 1 et 5 comme zéros, donc $x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-5)$ puis

$$\frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 + 2x - 3} = \frac{(x-1)(x-5)}{(x-1)(x+3)} = \frac{x-5}{x+3}$$

et donc

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 + 2x - 3} = \frac{1-5}{1+3} = -1}$$

NB : en fait, il est toujours préférable de factoriser dès le début. Cela simplifie la recherche de limites, y compris en $\pm\infty$ et en -3.

(5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x^2}{x}$

Solution : Pour $x \neq 0$, on a $\frac{1+x^2}{x} = \frac{1}{x} + x$ et donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1+x^2}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1+x^2}{x} = -\infty.$$

(6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x^2}{x}$

Solution : On a déjà vu que pour $x \neq 0$, on a $\frac{1+x^2}{x} = \frac{1}{x} + x$ et donc, comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x^2}{x} = +\infty$$

(7) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3-3x+2}{x^2-4}$

(8) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+2x-3}{3x^2-2x-1}$

Solution : On a une forme indéterminée $\frac{0}{0}$. On factorise les deux polynômes. Les zéros de x^2+2x-3 sont -3 et 1 , donc $x^2+2x-3 = (x+3)(x-1)$. Les zéros de $3x^2-2x-1$ sont 1 et $-\frac{1}{3}$, donc $3x^2-2x-1 = 3(x-1)(x+\frac{1}{3}) = (x-1)(3x+1)$. Finalement, on a

$$\frac{x^2+2x-3}{3x^2-2x-1} = \frac{(x+3)(x-1)}{(x-1)(3x+1)} = \frac{x+3}{3x+1}$$

et on n'a plus d'indéterminée. Il suit alors que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+2x-3}{3x^2-2x-1} = \frac{1+3}{3 \times 1 + 1} = 1$$

(9) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+2x}{3x^2-2x-1}$

Solution : C'est une limite de type $\frac{3}{0} = \pm\infty$, il nous faut donc le signe. On écrit

$$\frac{x^2+2x}{3x^2-2x-1} = \frac{x^2+2x}{(x-1)(3x+1)} = \frac{x^2+2x}{3x+1} \times \frac{1}{x-1}$$

avec

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+2x}{3x+1} = \frac{3}{4} > 0$$

Or

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty,$$

et donc

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2+2x}{3x^2-2x-1} = \frac{3}{4} \times +\infty = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2+2x}{3x^2-2x-1} = \frac{3}{4} \times -\infty = -\infty$$

(10) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3-2x+x}{x^2-x}$

Solution : jetons quand même un œil à l'ensemble de définition. Il faut trouver les zéros de $x^2-x = x(x-1)$, donc 0 et 1 . Donc $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Pour $x > 1$, on a

$$\frac{x^3-2x+x}{x^2-x} = \frac{x^3(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3})}{x^2(1 - \frac{1}{x})} = x \times \frac{1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{1 - \frac{1}{x}}$$

et donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3-2x+x}{x^2-x} = +\infty \times 1 = +\infty.$$

- (11) Limites en -1 et -2 de $f(x) := \frac{2x-1}{(x+1)^2(x+2)}$

Solution : Commençons par -1 . On écrit

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+2} \times \frac{1}{(x+1)^2}$$

On a $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x-1}{x+2} = -3 \neq 0$. De plus, $\lim_{x \rightarrow -1} (x+1)^2 = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$. Donc $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{(x+1)^2} = +\infty$, puis

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x-1}{(x+1)^2(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x-1}{x+2} \times \frac{1}{(x+1)^2} = (-3) \times +\infty = -\infty$$

Comme on a toujours $(x+1)^2 > 0$, il n'y a pas à distinguer les limites à droite et à gauche.

Traisons le cas de -2 . On écrit

$$f(x) = \frac{2x-1}{(x+1)^2} \times \frac{1}{x+2}$$

On a $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x-1}{(x+1)^2} = -5 \neq 0$. De plus

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{x+2} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1}{x+2} = -\infty,$$

et donc

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2x-1}{(x+1)^2(x+2)} = (-5) \times +\infty = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2x-1}{(x+1)^2(x+2)} = (-5) \times -\infty = +\infty.$$

- (12) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-5x+6}$

Solution. Tout d'abord l'ensemble de définition : les zéros de x^2-5x+6 sont 2 et 3, donc $D = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$ et $x^2-5x+6 = (x-2)(x-3)$. On remarque que c'est une forme indéterminée $\frac{0}{0}$. le mieux serait de factoriser le numérateur, mais c'est du degré 3 et ce n'est pas toujours évident. On va faire plusieurs méthodes.

Méthode 1 : factorisation. On sait que x^3-2x^2+x-2 s'annule en 2, on peut donc factoriser par $x-2$. On va faire apparaître assez naturellement $x-2$:

$$x^3-2x^2+x-2 = x^2(x-2) + x-2 = x^2(x-2) + 1 \times (x-2) = (x^2+1)(x-2).$$

Du coup

$$\frac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-5x+6} = \frac{(x^2+1)(x-2)}{(x-2)(x-3)} = \frac{x^2+1}{x-3} \text{ puis } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-5x+6} = \frac{2^2+1}{2-3} = -5$$

Méthode 2 : utilisation de la dérivée. On écrit

$$\frac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-5x+6} = \frac{x^3-2x^2+x-2}{(x-2)(x-3)} = \frac{x^3-2x^2+x-2}{x-2} \times \frac{1}{x-3}$$

on pose alors $g(x) = x^3-2x^2+x-2$, donc $g'(x) = 3x^2-4x+1$ de sorte que

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-2x^2+x-2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} = g'(2) = 5,$$

puis

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-5x+6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-2x^2+x-2}{x-2} \times \frac{1}{x-3} = 5 \times \frac{1}{2-3} = -5$$

Exercice 3. Déterminez les limites suivantes :

- (1) $x \mapsto x^3 - x^2 + 1$ en $\pm\infty$;

- (2) $x \mapsto x + \frac{1}{x^2}$ aux bornes de l'ensemble de définition ;
 (3) $x \mapsto x + \ln x$ en 0 et $+\infty$
 (4) $x \mapsto x^2 + \frac{1}{x-1}$ aux bornes de l'ensemble de définition ;
 (5) $x \mapsto x(2 + \sin \sqrt{x})$ en $+\infty$;

2. INTÉGRALES

Exercice 4. Calculez les intégrales suivantes

(1) $\int_0^2 (x^2 + x) dx$

Solution :

$$\int_0^2 (x^2 + x) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = \frac{8}{3} + 2 = \frac{14}{3}$$

(2) $\int_{-\pi/2}^{\pi} \sin t dt$

Solution :

$$\int_{-\pi/2}^{\pi} \sin t dt = [-\cos t]_{-\pi/2}^{\pi} = -\cos \pi + \cos(-\pi/2) = 1$$

(3) $\int_{-\pi/2}^{\pi} (t - 2 \cos t) dt$

Solution :

$$\int_{-\pi/2}^{\pi} (t - 2 \cos t) dt = \left[\frac{t^2}{2} - 2 \sin t \right]_{-\pi/2}^{\pi} = \frac{\pi^2}{2} - 2 \sin \pi - \left(\frac{(-\pi/2)^2}{2} - 2 \sin(-\pi/2) \right) = \frac{3\pi^2}{8} - 2 =$$

(4) $\int_{-1}^3 (x^4 - s^2 + e^x) dx$

Solution : Attention, on intègre selon la variable x , donc s^2 est une constante.

Du coup

$$\int_{-1}^3 (x^4 - s^2 + e^x) dx = \left[\frac{x^5}{5} - s^2 x + e^x \right]_{-1}^3 = \frac{244}{5} - 4s^2 + e^3 - e^{-1}$$

(5) $\int_{-1}^3 (x^4 - x^2 + e^x) dx$

$$\int_{-1}^3 (x^4 - x^2 + e^x) dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + e^x \right]_{-1}^3 = \frac{244}{5} - \frac{28}{3} + e^3 - e^{-1}$$

(6) $\int_0^2 3\sqrt{t} dt$

Solution :

$$\int_0^2 3\sqrt{t} dt = \int_0^2 3t^{\frac{1}{2}} dt = \left[3 \times \frac{t^{1+\frac{1}{2}}}{1+\frac{1}{2}} \right]_0^2 = \left[3 \times \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^2 = \left[3 \times \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_0^2 = 2 \times 2^{\frac{3}{2}} = 4\sqrt{2}$$

(7) $\int_0^3 \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} dt$

Solution :

$$\begin{aligned} \int_0^3 \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} dt &= \frac{1}{2} \int_0^3 \frac{u'(t)}{\sqrt{u(t)}} dt \text{ avec } u(t) = t^2 + 1 \\ &= \frac{1}{2} \int_0^3 u' u^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \left[\frac{u^{1-\frac{1}{2}}}{1-\frac{1}{2}} \right]_0^3 = \left[u^{\frac{1}{2}} \right]_0^3 = \sqrt{3^2+1} - \sqrt{0^2+1} \\ &= \sqrt{10} - 1 \end{aligned}$$

(8) $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} te^{t^2} dt$

Solution :

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} te^{t^2} dt &= \frac{1}{2} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} u' e^u dt \text{ avec } u(t) = t^2 + 1 \\ &= \left[\frac{1}{2} e^u \right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = \left[\frac{1}{2} e^{t^2} \right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = 0. \end{aligned}$$

(9) $\int_0^\pi \cos\left(\frac{x}{3}\right) dx$

Solution :

$$\int_0^\pi \cos\left(\frac{x}{3}\right) dx = \left[3 \sin\left(\frac{x}{3}\right) \right]_0^\pi = 3 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - 3 \sin(0) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

(10) $\int_0^{\pi/2} \cos^3(x) \sin(x) dx$

Solution :

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \cos^3(x) \sin(x) dx &= \int_0^{\pi/2} \cos^2(x) (-\cos(x))' dx = - \int_0^{\pi/2} u^2 u' dx \text{ avec } u(x) = \cos x \\ &= \left[-\frac{u^3}{3} \right]_0^{\pi/2} = \left[-\frac{\cos^3(x)}{3} \right]_0^{\pi/2} = -\frac{\cos^3(\pi/2)}{3} + \frac{\cos^3(0)}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(11) $\int_0^1 \frac{t+1/2}{t^2+t+1} dt$

Solution :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{t+1/2}{t^2+t+1} dt &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{u'}{u} dt \text{ avec } u(t) = t^2 + t + 1 \\ &= \left[\frac{1}{2} \ln |u(t)| \right]_0^1 = \left[\frac{1}{2} \ln |t^2 + t + 1| \right]_0^1 = \frac{\ln 3}{2} \end{aligned}$$

(12) $\int_2^5 \frac{dt}{t \ln t}$

Solution : On remarque que $(\ln(t))' = \frac{1}{t}$ pour $t > 0$. Donc, en posant $u(t) = \ln t$, on a

$$\int_2^5 \frac{dt}{t \ln t} = \int_2^5 \frac{u'(t)}{u(t)} dt = [\ln |u(t)|]_2^5 = \ln \ln 5 - \ln \ln 2$$

(13) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} (2 \sin t + 3 \cos t) dt$

Solution :

$$\begin{aligned} \int_{\pi/4}^{\pi/3} (2 \sin t + 3 \cos t) dt &= [-2 \cos t + 3 \sin t]_{\pi/4}^{\pi/3} \\ &= -2(\cos(\pi/3) - \cos(\pi/4)) + 3(\sin(\pi/3) - \sin(\pi/4)) \\ &= -2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Exercice 5. Déterminez

$$\int_{-3}^5 (|x-1| + |x| + |x+1|) dx \text{ et } \int_{-\pi/2}^{\pi/3} \sin |t| dt$$

Solution : Un tableau de signe va nous aider :

	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$x - 1$	-	-	-	0	+	
$ x - 1 $	$-(x - 1)$	$-(x - 1)$	$-(x - 1)$	0	$x - 1$	
x	-	-	0	+	+	
$ x $	$-x$	$-x$	0	x	x	
$x + 1$	-	0	+	+	+	
$ x + 1 $	$-(x + 1)$	0	$x + 1$	$x + 1$	0	$x + 1$
$ x - 1 + x + x + 1 $	$-3x$	$2 - x$	$2 + x$	$3x$		

Ainsi, via la relation de Chasles, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{-3}^5 (|x - 1| + |x| + |x + 1|) dx &= \int_{-3}^{-1} + \int_{-1}^0 + \int_0^1 + \int_1^5 \\
&= \int_{-3}^{-1} (-3x) dx + \int_{-1}^0 (2 - x) dx + \int_0^1 (2 + x) dx + \int_1^5 3x dx \\
&= \left[-\frac{3x^2}{2} \right]_{-3}^{-1} + \left[2x - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 + \left[2x + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \left[\frac{3x^2}{2} \right]_1^5 \\
&= \frac{-3(1 - 9)}{2} + (2 + \frac{1}{2}) + (2 + \frac{1}{2}) + \frac{3(25 - 1)}{2} \\
&= 12 + 5 + 36 = 53
\end{aligned}$$