

Solution du TD7 : Limites avancées

Dans tous ces exercices, on demande de déterminer la limite si elle existe.

1. UTILISATION DE LA DÉRIVÉE

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

Indication : posez $f(x) = \sqrt{1+x}$ et $x_0 = 0$

Solution. On a

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \text{ et } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \text{ pour } x > -1.$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = \frac{1}{2\sqrt{1+0}} = \frac{1}{2}$$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{x}}$

Solution. Notons que $\sqrt{x}$ impose de prendre $x > 0$. On utilise le résultat précédent et on écrit

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \times \frac{x}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \times \sqrt{x} \text{ pour } x > 0.$$

En utilisant la limite ci-dessus, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \times 0 = 0$$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x^2}$

Solution. On suit la même stratégie et on écrit pour $x \geq -1$, $x \neq 0$:

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x^2} = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \times \frac{1}{x}$$

Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x^2} = \frac{1}{2} \times -\infty = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x^2} = \frac{1}{2} \times +\infty = +\infty$$

(4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1}$

Solution :

$$\frac{\sin(\pi x)}{x-1} = \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \text{ avec } f(x) = \sin(\pi x)$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)$$

et $f'(x) = \pi \cos(\pi x)$. donc

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1} = \pi \cos(\pi) = -\pi$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(3x)}{1-2\cos x}$$

$$\text{Indication : } \frac{\sin(3x)}{1-2\cos x} = \frac{\sin(3x)}{x-\frac{\pi}{3}} \times \frac{x-\frac{\pi}{3}}{1-2\cos x}.$$

Solution.

$$(1) \frac{\sin(3x)}{1-2\cos x} = \frac{\sin(3x)}{x-\frac{\pi}{3}} \times \frac{x-\frac{\pi}{3}}{1-2\cos x}$$

$$(2) = \frac{\sin(3x) - \sin(3 \times \frac{\pi}{3})}{x - \frac{\pi}{3}} \times \frac{x - \frac{\pi}{3}}{2\cos(\frac{\pi}{3}) - 2\cos x}$$

$$(3) = \frac{f(x) - f(\frac{\pi}{3})}{x - \frac{\pi}{3}} \times \boxed{\frac{x - \frac{\pi}{3}}{2\cos(\frac{\pi}{3}) - 2\cos x}} \text{ avec } f(x) = \sin(3x)$$

on a

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{f(x) - f(\frac{\pi}{3})}{x - \frac{\pi}{3}} = f'(\frac{\pi}{3}) \text{ et } f'(x) = 3\cos(3x) \text{ donc } f'(\frac{\pi}{3}) = 3\cos(3 \times \frac{\pi}{3}) = -3$$

On étudie maintenant

$$\lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{2\cos(\frac{\pi}{3}) - 2\cos x}{x - \frac{\pi}{3}}$$

$$\frac{2\cos(\frac{\pi}{3}) - 2\cos x}{x - \frac{\pi}{3}} = (-2) \frac{\cos x - \cos(\frac{\pi}{3})}{x - \frac{\pi}{3}} = (-2) \frac{g(x) - g(\frac{\pi}{3})}{x - \frac{\pi}{3}}$$

avec $g(x) = \cos x$. donc

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2\cos(\frac{\pi}{3}) - 2\cos x}{x - \frac{\pi}{3}} = -2g'(\pi/3) = 2\sin(\pi/3) = \sqrt{3}$$

Finalement

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(3x)}{1-2\cos x} = \frac{-3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$$

Solution : Pour $x > 0$, on a $|x| = x$ et donc $\frac{x}{|x|} = 1$. Pour $x < 0$, on a $|x| = -x$ et donc $\frac{x}{|x|} = -1$. Ainsi

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|} = -1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|} = 1}$$

2. COMPARAISON

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2+\sin(\frac{1}{x})}$$

Indication. On pose $h(x) = \frac{1}{2+\sin(1/x)}$. Encadrez $h(x)$. c'est-à-dire trouvez $a, b > 0$ tels que $a \leq h(x) \leq b$ pour tout $x \neq 0$.

Solution : On a $1 = 2 - 1 \leq 2 + \sin(1/x) \leq 2 + 1 = 3$ pour $x \neq 0$ donc, tout le monde étant > 0 , on inverse (en changeant le sens des inégalités) et on obtient

$$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2+\sin(1/x)} \leq 1$$

donc

$$\frac{|x|}{3} \leq \frac{|x|}{2+\sin(1/x)} \leq |x| \text{ car } |x| > 0$$

et donc

$$\frac{|x|}{3} \leq \left| \frac{x}{2 + \sin(1/x)} \right| \leq |x| \text{ pour tout } x \neq 0.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$, il suit du théorème d'encadrement que

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)} = 0.}$$

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sin x$

Solution : Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $x - 1 \leq x + \sin x \leq x + 1$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 = +\infty$, donc

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sin x = +\infty}$$

(3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{x}{2} \sin x$

Solution : On utilise que $\sin x \geq -1$ et que $x > 0$ pour avoir

$$x + \frac{x}{2} \sin x \geq x - \frac{x}{2} = \frac{x}{2}$$

Et donc

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{x}{2} \sin x = +\infty.}$$

(4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x}$

Solution : lorsque $x \rightarrow +\infty$, c'est x qui domine $\sqrt{x}$. On écrit donc

$$x - \sqrt{x} = x \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{x} \right) = x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$$

Pour vous en convaincre, soit utilisez $x = \sqrt{x}^2$ et donc

$$\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}^2} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Ou alors, rappelez-vous que $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ de sorte que

$$\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x} = x^{\frac{1}{2}-1} = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$, on a

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = +\infty \times 1 = +\infty}$$

Puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

(5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^2 - \sqrt{x}$

Solution : La question n'a pas de sens car il faut $x > 0$ pour $\sqrt{x}$, donc pas possible d'avoir $x \rightarrow -\infty$.

(6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$

Solution : On majore brutalement $|\sin x| \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ de sorte que

$$0 \leq \left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \frac{1}{x} \text{ pour tout } x > 0.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

(7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 2x + x}{x^3 + e^{2x} - x^2 + 7}$

Solution : Au numérateur, c'est x^4 qui domine à l'infini. Au dénominateur, il faut garder en tête que l'exponentielle domine tout polynôme en $+\infty$. Pour $x \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} \frac{x^4 - 2x + x}{x^3 + e^{2x} - x^2 + 7} &= \frac{x^4 \left(1 - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^3}\right)}{e^{2x} \left(\frac{x^3}{e^{2x}} + 1 - \frac{x^2}{e^{2x}} + \frac{7}{e^{2x}}\right)} \\ &= \frac{x^4}{e^{2x}} \times \frac{1 - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^3}}{\frac{x^3}{e^{2x}} + 1 - \frac{x^2}{e^{2x}} + \frac{7}{e^{2x}}} \end{aligned}$$

En $+\infty$, l'exponentielle domine tout polynôme : les théorèmes de comparaison donnent

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^{2x}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{2x}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7}{e^{2x}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{e^{2x}} = 0,$$

et donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 2x + x}{x^3 + e^{2x} - x^2 + 7} = 0 \times \frac{1 - 0 + 0}{0 + 1 - 0 + 0} = 0$$

3. COMPOSITION

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\sin x}{x}}$

Solution : On a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ et } \lim_{X \rightarrow 1} e^X = e^1 = e,$$

donc par composition

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\sin x}{x}} = e.$$

(2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^2}$

Solution : On a

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \text{ et } \lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty,$$

donc par composition

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^2} = +\infty.$$

(3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{x+1}$

Indication : $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$.

Solution : On écrit

$$\frac{e^{x^2}}{x+1} = \frac{e^{x^2}}{x^2} \times \frac{x^2}{x+1} = \frac{e^{x^2}}{x^2} \times \frac{x^2}{x(1 + \frac{1}{x})} = \frac{e^{x^2}}{x^2} \times x \times \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$, on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{x^2} = +\infty,$$

et donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{x+1} = (+\infty) \times (+\infty) \times 1 = +\infty$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x+\sqrt{x}}}{x^5}$$

Solution : On a $-x + \sqrt{x}$ qui est une forme indéterminée en $+\infty$. Comme plus haut, on écrit $-x + \sqrt{x} = -x(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}) \rightarrow -\infty \times 1 = -\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

Or $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$, donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x+\sqrt{x}} = 0$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^5} = 0$, donc on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x+\sqrt{x}}}{x^5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^5} e^{-x+\sqrt{x}} = 0 \times 0 = 0$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin \sqrt{x})}{x}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{x^2}$$

Indication : pour $x < 1$ et $x \neq 0$, on a

$$\frac{\ln(1-x)}{x} = \frac{\ln(1-x) - \ln(1)}{x-0} \rightarrow f'(0) \text{ quand } x \rightarrow 0 \text{ avec } f(x) = \ln(1-x)$$

4. UN PEU DE RACINES (ENCORE)

$$(1) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$$

Solution : C'est une forme indéterminée.

$$\frac{x-9}{\sqrt{x}-3} = \frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3) \times (\sqrt{x}+3)} = \frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{x-9} = \sqrt{x}+3$$

et donc

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} = \sqrt{9}+3 = 6$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$$

Solution : C'est une forme indéterminée. On multiplie par la quantité conjuguée pour obtenir

$$\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4} = \frac{(\sqrt{x}-2) \times (\sqrt{x}+2)}{(x^2-5x+4) \times (\sqrt{x}+2)} = \frac{x-4}{(x^2-5x+4) \times (\sqrt{x}+2)}$$

A partir de là, on a deux possibilités :

— Soit on factorise le polynôme : on a $x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4)$, et donc

$$\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4} = \frac{x-4}{(x^2-5x+4) \times (\sqrt{x}+2)} = \frac{x-4}{(x-1)(x-4) \times (\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{(x-1) \times (\sqrt{x}+2)}$$

et donc

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4} = \frac{1}{(4-1) \times (\sqrt{4}+2)} = \frac{1}{12}$$

— Soit on utilise la dérivée. On pose $f(x) = x^2 - 5x + 4$ et $f'(x) = 2x - 5$, de sorte que

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = f'(4) = 3$$

et donc

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{x^2 - 5x + 4} = \frac{1}{3}$$

puis

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 5x + 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{(x^2 - 5x + 4) \times (\sqrt{x} + 2)} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{1}{12}$$

(3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^4 + 2}}{x^2 + 1}$

Solution :

$$\frac{\sqrt{x^4 + 2}}{x^2 + 1} = \frac{\sqrt{x^4 \left(1 + \frac{2}{x^4}\right)}}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{x^2 \sqrt{1 + \frac{2}{x^4}}}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{x^4}}}{1 + \frac{1}{x^2}} \rightarrow_{+\infty} \frac{1}{1} = 1$$

(4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x$ *Indication :* $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ pour $a, b > 0$

Solution : Pour $x > 0$, on a

$$\sqrt{x^2 + 1} - x = \frac{\sqrt{x^2 + 1}^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \rightarrow \frac{1}{+\infty + \infty} = 0$$

Exercice 1. En utilisant les formules de trigonométrie, montrez que pour $x \neq 0$, on a

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} \right)^2$$

Déduisez-en que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Solution : $\cos(2y) = 1 - 2\sin^2(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. Donc, en posant $x = 2y$ avec $x \neq 0$, on a

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{2\sin^2(y)}{4y^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(y)}{y} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} \right)^2$$

Avec les mêmes notations,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1$$

et on en déduit le résultat annoncé.