

TD7 : Limites avancées

Dans tous ces exercices, on demande de déterminer la limite si elle existe.

1. UTILISATION DE LA DÉRIVÉE

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

Indication : posez $f(x) = \sqrt{1+x}$ et $x_0 = 0$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{x}}$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x^2}$

(4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1}$

(5) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(3x)}{1-2 \cos x}$

Indication : $\frac{\sin(3x)}{1-2 \cos x} = \frac{\sin(3x)}{x-\frac{\pi}{3}} \times \frac{x-\frac{\pi}{3}}{1-2 \cos x}$.

(6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$

2. COMPARAISON

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2+\sin(\frac{1}{x})}$

Indication. On pose $h(x) = \frac{1}{2+\sin(1/x)}$. Encadrez $h(x)$. c'est-à-dire trouvez $a, b > 0$ tels que $a \leq h(x) \leq b$ pour tout $x \neq 0$.

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sin x$

(3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{x}{2} \sin x$

(4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x}$

(5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^2 - \sqrt{x}$

(6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$

(7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 2x + x}{x^3 + e^{2x} - x^2 + 7}$

3. COMPOSITION

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\sin x}{x}}$

(2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^2}$

(3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{x+1}$.

Indication : $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$.

(4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x+\sqrt{x}}}{x^5}$

(5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin \sqrt{x})}{x}$

(6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{x^2}$

Indication : pour $x < 1$ et $x \neq 0$, on a

$$\frac{\ln(1-x)}{x} = \frac{\ln(1-x) - \ln(1)}{x-0} \rightarrow f'(0) \text{ quand } x \rightarrow 0 \text{ avec } f(x) = \ln(1-x)$$

4. UN PEU DE RACINES (ENCORE)

(1) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$

(3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^4+2}}{x^2+1}$

(4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+1} - x$

Indication : $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ pour $a, b > 0$ **Exercice 1.** En utilisant les formules de trigonométrie, montrez que pour $x \neq 0$, on a

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} \right)^2$$

Déduisez-en que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$