

### Corrigé des exercices d'exponentielle complexe

**Exercice 1.** Montrez que  $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$  et que  $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$  pour tout  $z \in \mathbb{C}$ . Montrez que  $e^{z+2i\pi} = e^z$  pour  $z \in \mathbb{C}$ .

*Corrigé :* Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . On a

$$\overline{e^{i\theta}} = \overline{\cos \theta + i \sin \theta} = \cos \theta - i \sin \theta = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = e^{-i\theta}$$

Pour  $z \in \mathbb{C}$ , soient  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $z = a + ib$ . On a donc

$$\begin{aligned} \overline{e^z} &= \overline{e^a(\cos b + i \sin b)} = \overline{e^a \cos b + i e^a \sin b} = e^a \cos b - i e^a \sin b = e^a e^{-ib} = e^{a-ib} = e^{\bar{z}} \\ e^{z+2i\pi} &= e^{a+ib+2i\pi} = e^{a+i(b+2\pi)} = e^a(\cos(b+2\pi) + i \sin(b+2\pi)) = e^a(\cos b + i \sin b) = e^z \end{aligned}$$

**Exercice 2.** Montrez que  $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$  pour tout  $z \in \mathbb{C}$ .

*Corrigé :* Soit  $z \in \mathbb{C}$ , soient  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $z = a + ib$ . On a donc

$$|e^z|^2 = e^z \cdot \overline{e^z} = e^z \cdot e^{\bar{z}} = e^{z+\bar{z}} = e^{2a}$$

et donc  $|e^z| = e^a = e^{\operatorname{Re}(z)}$ .

**Exercice 3.** Déterminez le module et l'argument des complexes suivants :

$$2; i; 1+i; \sqrt{3}+i.$$

*Corrigé :*  $|2| = \sqrt{2 \cdot 2} = \sqrt{2 \cdot 2} = 2$ . On a  $2 = |2| = |2| \cdot e^{i \times 0}$  : donc 0 est un argument de 2.  $|i| = \sqrt{i \cdot \bar{i}} = \sqrt{i \cdot (-i)} = \sqrt{1} = 1$ . On a  $i = e^{i\pi/2} = 1 \times e^{i\pi/2}$  : donc  $\pi/2$  est un argument de  $i$ .  $|1+i| = \sqrt{(1+i) \cdot \overline{1+i}} = \sqrt{(1+i) \cdot (1-i)} = \sqrt{2}$ . Soit  $\theta \in \mathbb{R}$  un argument de  $1+i$  : on a donc  $1+i = \sqrt{2} \cdot e^{i\theta} = \sqrt{2} \cos \theta + i \sqrt{2} \sin \theta$ , donc on a

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Et donc  $\theta = \pi/4$  convient comme argument.  $|\sqrt{3}+i| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$ . Soit  $\theta' \in \mathbb{R}$  un argument de  $\sqrt{3}+i$  : on a donc  $\sqrt{3}+i = 2 \cdot e^{i\theta'} = 2 \cos \theta' + i 2 \sin \theta'$ , donc on a

$$\cos \theta' = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin \theta' = \frac{1}{2}.$$

Et donc  $\theta' = \pi/6$  convient comme argument.

**Exercice 4.** Pour  $\theta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , exprimez les quantités suivantes en fonction des sinus et cosinus de  $\theta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

$$\cos(3\theta), \sin(2\alpha + \beta), \cos(\alpha + 2\beta) + 3\sin(\alpha - \beta).$$

*Corrigé :*

$$\begin{aligned} \cos(3\theta) + i \sin(3\theta) &= (\cos \theta + i \sin \theta)^3 \\ &= (\cos \theta)^3 + 3(\cos \theta)^2(i \sin \theta) + 3(\cos \theta)(i \sin \theta)^2 + (i \sin \theta)^3 \\ &= (\cos \theta)^3 - 3(\cos \theta)(\sin \theta)^2 + i(3(\cos \theta)^2 \sin \theta - (\sin \theta)^3) \end{aligned}$$

en égalant les parties réelles, on trouve

$$\boxed{\cos(3\theta) = (\cos \theta)^3 - 3(\cos \theta)(\sin \theta)^2.}$$

$$\begin{aligned}
\cos(2\alpha + \beta) + i \sin(2\alpha + \beta) &= e^{i(2\alpha + \beta)} = (e^{i\alpha})^2 e^{i\beta} = (\cos \alpha + i \sin \alpha)^2 (\cos \beta + i \sin \beta) \\
&= ((\cos \alpha)^2 - (\sin \alpha)^2 + 2i \cos \alpha \sin \alpha) (\cos \beta + i \sin \beta) \\
&= (\cos \alpha)^2 \cos \beta - (\sin \alpha)^2 \cos \beta - 2 \cos \alpha \sin \alpha \sin \beta \\
&\quad + i ((\cos \alpha)^2 \sin \beta - (\sin \alpha)^2 \sin \beta + 2 \cos \alpha \sin \alpha \cos \beta)
\end{aligned}$$

En égalant les parties imaginaires, on trouve

$$\boxed{\sin(2\alpha + \beta) = (\cos \alpha)^2 \sin \beta - (\sin \alpha)^2 \sin \beta + 2 \cos \alpha \sin \alpha \cos \beta}$$

Avec les parties réelles, on obtient

$$\cos(2\alpha + \beta) = (\cos \alpha)^2 \cos \beta - (\sin \alpha)^2 \cos \beta - 2 \cos \alpha \sin \alpha \sin \beta.$$

Pour  $\cos(\alpha + 2\beta) + 3 \sin(\alpha - \beta)$ , on utilise la formule précédente pour avoir

$$\cos(\alpha + 2\beta) = (\cos \beta)^2 \cos \alpha - (\sin \beta)^2 \cos \alpha - 2 \cos \beta \sin \beta \sin \alpha.$$

Indépendamment, on a

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta) &= e^{i(\alpha - \beta)} = e^{i\alpha} e^{-i\beta} = (\cos \alpha + i \sin \alpha) (\cos \beta - i \sin \beta) \\
&= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + i(\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta)
\end{aligned}$$

et donc

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

En regroupant on trouve

$$\boxed{\cos(\alpha + 2\beta) + 3 \sin(\alpha - \beta) = (\cos \beta)^2 \cos \alpha - (\sin \beta)^2 \cos \alpha - 2 \cos \beta \sin \beta \sin \alpha + 3 \sin \alpha \cos \beta - 3 \cos \alpha \sin \beta}$$

**Exercice 5.** Exprimez les quantités suivantes en fonction de sinus et cosinus de multiples de  $\theta$  :

$$(\sin \theta)^2, (\cos \theta)^2 \sin \theta, (\cos \theta)^2 (\sin \theta)^3.$$

Déduisez-en  $\int_0^{\pi/3} (\sin \theta)^2 d\theta$ .

*Corrigé :*

$$\begin{aligned}
(\sin \theta)^2 &= \left( \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^2 = \frac{e^{2i\theta} - 2e^{i\theta}e^{-i\theta} + e^{-2i\theta}}{-4} \\
&= \frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} - 2}{-4} = \frac{2 \cos(2\theta) - 2}{-4} = \boxed{\frac{1 - \cos(2\theta)}{2}}
\end{aligned}$$

et donc

$$\int_0^{\pi/3} (\sin \theta)^2 d\theta = \int_0^{\pi/3} \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} d\theta = \left[ \frac{\theta}{2} - \frac{\sin(2\theta)}{4} \right]_0^{\pi/3} = \frac{\pi}{6} - \frac{\sin(2\pi/3)}{4} = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$\begin{aligned}
(\cos \theta)^2 \sin \theta &= \left( \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^2 \left( \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right) = \frac{e^{2i\theta} + 2 + e^{-2i\theta}}{4} \cdot \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \\
&= \frac{e^{3i\theta} + 2e^{i\theta} + e^{-i\theta} - e^{i\theta} - 2e^{-i\theta} - e^{-3i\theta}}{8i} = \frac{e^{3i\theta} - e^{-3i\theta} + e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{8i} \\
&= \frac{2i \sin(3\theta) + 2i \sin \theta}{8i} = \boxed{\frac{\sin(3\theta) + \sin \theta}{4}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\cos \theta)^2 (\sin \theta)^3 &= \left( \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^2 \left( \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^3 \\
&= \frac{e^{2i\theta} + 2 + e^{-2i\theta}}{4} \cdot \frac{e^{3i\theta} - 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} - e^{-3i\theta}}{-8i} \\
&= \frac{(e^{2i\theta} + 2 + e^{-2i\theta})(e^{3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-3i\theta})}{-32i} \\
&= \frac{e^{5i\theta} - e^{-5i\theta} - e^{3i\theta} + e^{-3i\theta} - 2e^{i\theta} + 2e^{-i\theta}}{-32i} \\
&= \frac{2i \sin(5\theta) - 2i \sin(3\theta) - 4i \sin \theta}{-32i} \\
&= \frac{\sin(5\theta) - \sin(3\theta) - 2 \sin \theta}{-16} = \boxed{-\frac{1}{16} \sin(5\theta) + \frac{1}{16} \sin(3\theta) + \frac{1}{8} \sin \theta}
\end{aligned}$$