

Corrigé du TD8 : Dérivabilité avancée

1. DÉRIVABILITÉ

Exercice 1. Déterminez les dérivées des fonctions suivantes.

Notations : dans les solutions ci-dessous, f désignera toujours la fonction dont il est question et D_f son ensemble de définition, $D_{f'}$ son ensemble de dérivation. On n'alourdira pas le propos quand les définitions/notations sont assez explicites.

(a) $x \mapsto \frac{x+1}{x-3}$

Solution. Il faut $x - 3 \neq 0$, donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, et f dérivable sur D_f . On a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{(x+1)'(x-3) - (x+1)(x-3)'}{(x-3)^2} = \frac{(x-3) - (x+1)}{(x-3)^2} \\ &= \boxed{\frac{-4}{(x-3)^2}} \end{aligned}$$

(b) $x \mapsto \frac{4x^3-2x+1}{x^2-3}$

Solution. Il faut $x^2 - 3 \neq 0$, donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$, et f dérivable sur D_f . On a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{(4x^3 - 2x + 1)'(x^2 - 3) - (4x^3 - 2x + 1)(x^2 - 3)'}{(x^2 - 3)^2} \\ &= \frac{(12x^2 - 2)(x^2 - 3) - (4x^3 - 2x + 1) \times 2x}{(x^2 - 3)^2} = \boxed{\frac{4x^4 - 38x^2 - 2x + 6}{(x^2 - 3)^2}} \end{aligned}$$

(c) $x \mapsto x\sqrt{x}$

Solution. Pour définir f , il faut $x \geq 0$ donc $D_f = [0, +\infty[$. Pour dériver, il faut $x > 0$ (rappelez-vous que $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$) et on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= (uv)' = u'v + uv' = x'\sqrt{x} + x(\sqrt{x})' = \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} = \boxed{\frac{3}{2}\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Autre méthode : on écrit $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. On a donc

$$f'(x) = (x \times x^{\frac{1}{2}})' = (x^{\frac{3}{2}})' = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

nb : En fait, en utilisant directement la définition, on peut montrer que f est aussi dérivable en 0.

(d) $x \mapsto \sqrt{3x-1}$

Solution. Pour définir f , il faut $3x-1 \geq 0$ donc $D_f = [\frac{1}{3}, +\infty[$. Pour dériver, il faut $3x-1 > 0$ (rappelez-vous que $(\sqrt{y})' = \frac{1}{2\sqrt{y}}$), donc $x > \frac{1}{3}$

$$f'(x) = (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{(3x-1)'}{2\sqrt{3x-1}} = \boxed{\frac{3}{2\sqrt{3x-1}}}$$

(e) $x \mapsto (5x^2 + 3x - 1)\sqrt{2x+1}$

Solution. Définie pour $2x+1 \geq 0$, donc $D_f = [-\frac{1}{2}, +\infty[$ et dérivable pour $2x+1 > 0$, donc $x > -\frac{1}{2}$. On a donc lorsque $x > -\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (uv)' = u'v + uv' = (5x^2 + 3x - 1)'\sqrt{2x+1} + (5x^2 + 3x - 1)(\sqrt{2x+1})' \\ &= (10x+3)\sqrt{2x+1} + (5x^2 + 3x - 1)(\sqrt{w})' \\ &= (10x+3)\sqrt{2x+1} + (5x^2 + 3x - 1)\frac{w'}{2\sqrt{w}} \\ &= (10x+3)\sqrt{2x+1} + (5x^2 + 3x - 1)\frac{(2x+1)'}{2\sqrt{2x+1}} \\ &= (10x+3)\sqrt{2x+1} + (5x^2 + 3x - 1)\frac{2}{2\sqrt{2x+1}} \\ &= \boxed{(10x+3)\sqrt{2x+1} + (5x^2 + 3x - 1)\frac{1}{\sqrt{2x+1}}} \end{aligned}$$

Si on veut, on peut encore simplifier en mettant la racine au dénominateur pour tout le monde :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(10x+3)\sqrt{2x+1} \times \sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}} + (5x^2 + 3x - 1)\frac{1}{\sqrt{2x+1}} \\ &= \frac{(10x+3)(2x+1) + 5x^2 + 3x - 1}{\sqrt{2x+1}} = \boxed{\frac{25x^2 + 19x + 2}{\sqrt{2x+1}}} \end{aligned}$$

(f) $x \mapsto \frac{\sqrt{2x+1}}{-x+3}$

Solution. Définie pour $2x+1 \geq 0$ et $-x+3 \neq 0$, donc $D_f = [-\frac{1}{2}, +\infty[\setminus\{3\}$ et dérivable pour $2x+1 > 0$ et $-x+3 \neq 0$, donc $x > -\frac{1}{2}$ et $x \neq 3$. On a donc lorsque $x > -\frac{1}{2}$ et $x \neq 3$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{(\sqrt{2x+1})'(-x+3) - \sqrt{2x+1} \times (-x+3)'}{(-x+3)^2} \\ &= \frac{(\sqrt{w})'(-x+3) + \sqrt{2x+1}}{(-x+3)^2} = \frac{\frac{w'}{2\sqrt{w}}(-x+3) + \sqrt{2x+1}}{(-x+3)^2} \\ &= \frac{\frac{(2x+1)'}{2\sqrt{2x+1}}(-x+3) + \sqrt{2x+1}}{(-x+3)^2} = \boxed{\frac{\frac{-x+3}{\sqrt{2x+1}} + \sqrt{2x+1}}{(-x+3)^2}} \end{aligned}$$

Ici encore, on peut mettre sous une forme plus sympathique en écrivant

$$f'(x) = \frac{1}{(-x+3)^2} \left(\frac{-x+3}{\sqrt{2x+1}} + \sqrt{2x+1} \right) = \frac{1}{(-x+3)^2} \left(\frac{(-x+3) + \sqrt{2x+1}^2}{\sqrt{2x+1}} \right) = \boxed{\frac{1}{(-x+3)^2} \left(\frac{x+4}{\sqrt{2x+1}} \right)}$$

(g) $x \mapsto \sqrt{2x+1} \cos x$

Solution. Définie pour $x \geq \frac{-1}{2}$, dérivable pour $x > \frac{-1}{2}$. On a alors

$$\begin{aligned} f'(x) &= (uv)' = u'v + uv' = \sqrt{2x+1}' \cos x + \sqrt{2x+1}(\cos x)' \\ &= \frac{(2x+1)'}{2\sqrt{2x+1}} \cos x - \sqrt{2x+1} \sin x = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2x+1}} \cos x - \sqrt{2x+1} \sin x} \end{aligned}$$

(h) $x \mapsto \frac{2 \sin x - 1}{\cos x + 1}$

Solution. Il faut $\cos x + 1 \neq 0$, donc $\cos x \neq -1$, donc $x \notin \{\pi + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$: dans ce cas f est définie et dérivable et on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{(2 \sin x - 1)'(1 + \cos x) - (2 \sin x - 1)(1 + \cos x)'}{(1 + \cos x)^2} \\ &= \frac{2 \cos x(1 + \cos x) + (2 \sin x - 1) \sin x}{(1 + \cos x)^2} = \frac{2 \cos x + 2 \cos^2 x + 2 \sin^2 x - \sin x}{(1 + \cos x)^2} \\ &= \frac{2 \cos x - \sin x + 2(\cos^2 x + \sin^2 x)}{(1 + \cos x)^2} = \boxed{\frac{2 \cos x - \sin x + 2}{(1 + \cos x)^2}} \end{aligned}$$

(i) $x \mapsto (x-3)^5(x+2)^7$

Solution. Définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f'(x) &= (uv)' = u'v + uv' = ((x-3)^5)'(x+2)^7 + (x-3)^5((x+2)^7)' \\ &= 5(x-3)^4(x+2)^7 + (x-3)^5 \times 7(x+2)^6 = (x-3)^4(x+2)^6(5(x+2) + 7(x-3)) \\ &= \boxed{(x-3)^4(x+2)^6(12x-11)} \end{aligned}$$

(j) $x \mapsto (\sin x)^n(\cos x)^p$

Solution. Définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On a pour $p, n \geq 1$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (uv)' = u'v + uv' = ((\sin x)^n)'(\cos x)^p + (\sin x)^n((\cos x)^p)' \\ &= n \cos x (\sin x)^{n-1} (\cos x)^p + (\sin x)^n \times p \times (-\sin x) (\cos x)^{p-1} \\ &= n(\sin x)^{n-1} (\cos x)^{p+1} - p(\sin x)^{n+1} (\cos x)^{p-1} = \boxed{(\sin x)^{n-1} (\cos x)^{p-1} (n \cos^2 x - p \sin^2 x)} \end{aligned}$$

(k) $x \mapsto \sqrt{2 + \sin x}$

Solution. Il faut $2 + \sin x \geq 0$ pour que f soit définie, ce qui est toujours vrai car $2 + \sin x \geq 2 - 1 = 1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On a alors pour $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \sqrt{u}' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{(2 + \sin x)'}{2\sqrt{2 + \sin x}} = \boxed{\frac{\cos x}{2\sqrt{2 + \sin x}}}$$

(l) $x \mapsto \sin(x^2)$

Solution. Définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On a alors pour $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = (u \circ v)' = v' \times u' \circ v = (x^2)' \sin'(x^2) = \boxed{2x \cos(x^2)}$$

(m) $x \mapsto \ln(\cos x)$

Solution.

$$f'(x) = (u \circ v)' = v' \times u' \circ v = (\cos x)' \ln'(\cos x) = -\sin x \frac{1}{\cos x} = -\frac{\sin x}{\cos x} = \boxed{-\tan x}$$

$$(n) \quad x \mapsto \cos(x^2)e^{\sin x}$$

Solution. Définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = (uv)' = u'v + uv' = (\cos(x^2))'e^{\sin x} + \cos(x^2)(e^{\sin x})'$$

On calcule les deux dérivées séparément :

$$(\cos(x^2))' = (u \circ v)' = v' \times u' \circ v = (x^2)' \cos'(x^2) = -2x \sin(x^2)$$

$$(e^{\sin x})' = (u \circ v)' = v' \times u' \circ v = (\sin x)' \exp'(\sin x) = \cos x e^{\sin x}$$

et donc

$$f'(x) = -2x \sin(x^2)e^{\sin x} + \cos(x^2) \cos x e^{\sin x} = \boxed{(-2x \sin(x^2) + \cos(x^2) \cos x) e^{\sin x}}$$

Exercice 2. Déterminez les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4} \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3-3x+2}{x^2-4}$$

Solution.

$$\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4} = \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x^2-5x+4)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x-4}{(x-4)(x-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{(x-1)(\sqrt{x}+2)}$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4} = \frac{1}{(4-1)(\sqrt{4}+2)} = \frac{3}{4}$$

Pour le suivant, on a encore une forme indéterminée. On va faire apparaître $x+2$ au numérateur

$$x^3-3x+2 = x^3-4x+x+2 = x(x^2-4)+(x+2) = x(x+2)(x-2)+(x+2) = (x+2)(x(x-2)+1).$$

Du coup

$$\frac{x^3-3x+2}{x^2-4} = \frac{(x+2)(x^2-2x+1)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x^2-2x+1}{x-2}$$

puis

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3-3x+2}{x^2-4} = \frac{(-2)^2-2 \times (-2)+1}{-2-2} = \frac{-9}{4}.$$

Exercice 3. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminez les dérivées jusqu'à l'ordre n :

(a) $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$, ($n = 3$). *Solution.* Infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = 6x - 6, \quad f''(x) = 6, \quad f^{(3)}(x) = 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

(b) $f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$, ($n = 2$). *Solution.* $f \in C^2(\mathbb{R} \setminus \{0\})$.

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{x^2} \text{ et } f''(x) = 2 - \frac{2}{x^3} \text{ pour } x \neq 0.$$

(c) $f(x) = (x^2 + 1)^2$, ($n = 3$). *Solution.* $f \in C^3(\mathbb{R})$.

$$f'(x) = 2 \times 2x \times (x^2 + 1) = 4x(x^2 + 1) = 4x^3 + 4x, \quad f''(x) = 12x^2 + 4, \quad f^{(3)}(x) = 24x \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

(d) $x \mapsto x^3 + |x|$, ($n = 2$) *Solution.* n'est pas dérivable en 0.

(e) $f(x) = x^k, n \in \mathbb{N}$.

Solution. Infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. On a $f'(x) = kx^{k-1}, f''(x) = k(k-1)x^{k-2}$ tant que $k \geq 2$, etc. De proche en proche, tant que $n \leq k$, on a $f^{(n)}(x) = k(k-1)\dots(k-n+1)x^{k-n}$. Ainsi $f^{(k)}(x) = k(k-1)\dots \times 2 \times 1$ est constante, et donc $f^{(k+1)}(x) = 0$, puis $f^{(n)}(x) = 0$ pour $n > k$. Tout ceci est vrai pour $x \in \mathbb{R}$.

(f) $f(x) = \cos(x^2), n = 2$.

Solution. $f \in C^2(\mathbb{R})$. On a

$$f'(x) = (x^2)' \times (-\sin)(x^2) = -2x \sin(x^2)$$

et

$$f''(x) = (-2x)' \sin(x^2) - 2x \times (x^2)' \cos(x^2) = -2 \sin(x^2) + 4x^2 \cos(x^2)$$

pour tout x .

(g) $f(x) = (\sin(e^x))^2, n = 2$. *Solution.* $f \in C^2(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(\sin(e^x))'(\sin(e^x)) = 2((e^x)' \sin'(e^x)) \sin(e^x) = 2e^x \cos(e^x) \sin(e^x) \\ f''(x) &= 2(e^x)' \cos(e^x) \sin(e^x) + 2e^x (\cos(e^x))' \sin(e^x) + 2e^x \cos(e^x) (\sin(e^x))' \\ &= 2e^x \cos(e^x) \sin(e^x) - 2e^x e^x \sin^2(e^x) + 2e^x e^x \cos^2(e^x) \end{aligned}$$

(h) $f(x) = \frac{e^{x^2} + \sin x}{1 + \ln x}, (n = 2)$.

Solution. Infiniment dérivable tant que $x > 0$ (pour $\ln x$) et $\ln x \neq -1$, donc $x \neq e^{-1}$. Donc $f \in C^2(]0, e^{-1}[\cup]e^{-1}, +\infty[)$ et

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(e^{x^2} + \sin x)'(1 + \ln x) - (e^{x^2} + \sin x) \times (1 + \ln x)'}{(1 + \ln x)^2} \\ &= \frac{(2xe^{x^2} + \cos x)(1 + \ln x) - (e^{x^2} + \sin x)x^{-1}}{(1 + \ln x)^2} \end{aligned}$$

(i) $f(x) = \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{e^x}, n = 2$.

Solution. Définie et continue pour $x \geq 0$, dérivable et C^2 sur $]0, +\infty[$. On a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\ln(1+\sqrt{x}))' e^x - \ln(1+\sqrt{x})(e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{(\ln(1+\sqrt{x}))' - \ln(1+\sqrt{x})}{e^x} \\ &= \frac{\frac{(1+\sqrt{x})'}{1+\sqrt{x}} - \ln(1+\sqrt{x})}{e^x} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} - \ln(1+\sqrt{x})}{e^x} \\ &= \frac{1}{2e^x \sqrt{x}(1+\sqrt{x})} - \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{e^x} = \frac{1}{2e^x \sqrt{x}(1+\sqrt{x})} - f(x) \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{1}{2e^x(\sqrt{x}+x)} - f(x) \right)' = -\frac{(2e^x(\sqrt{x}+x))'}{(2e^x(\sqrt{x}+x))^2} - f'(x) \\ &= -2 \frac{(e^x)'(\sqrt{x}+x) + e^x(\sqrt{x}+x)'}{4e^{2x}(\sqrt{x}+x)^2} - f'(x) \\ &= -2 \frac{e^x(\sqrt{x}+x) + e^x(\frac{1}{2\sqrt{x}}+1)}{4e^{2x}(\sqrt{x}+x)^2} - f'(x) \\ &= -2 \frac{\sqrt{x}+x + \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1}{4e^x(\sqrt{x}+x)^2} - \frac{1}{2e^x \sqrt{x}(1+\sqrt{x})} + \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{e^x} \end{aligned}$$

2. EXTRÉMA

Exercice 4. Dans chacun des cas suivants, déterminez, s'ils existent, le minimum global, le max global, et les min et max locaux.

- (1) $f(x) = x^2 - 3x + 7$ sur $\mathbb{R}$ et sur $[0, 1]$.
- (2) $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 1$ sur $\mathbb{R}$ et sur $[0, 2]$.
- (3) $f(x) = |x| + |x - 1|$ sur $\mathbb{R}$.
- (4) $f(x) = |x - 1| - |x + 1|$ sur $\mathbb{R}$.
- (5) $f(x) = |x^2 - 1| + 2x$ sur $\mathbb{R}$ et $[-2, 2]$.

Solution. Voir le fichier part2.pdf

Exercice 5. Montrez que $x + \frac{1}{x} \geq 2$ pour tout $x > 0$. Quand a-t-on égalité ?

Solution. On pose $f(x) = x + \frac{1}{x}$ pour $x > 0$. f dérivable et $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$. Pour $0 < x < 1$, on a $f'(x) < 0$ et pour $x > 1$, on a $f'(x) > 0$. Donc f décroît strictement sur $]0, 1[$ et croît strictement sur $]1, +\infty[$. Elle a donc un minimum strict en 1, et donc $x + \frac{1}{x} = f(x) > f(1) = 2$ pour tout $x > 0$, $x \neq 1$. Alternative : $x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{x^2 - 2x + 1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$.

Exercice 6. Montrez que $x - \ln x \geq 1$ pour tout $x > 0$. Quand a-t-on égalité ?

Solution. On pose $f(x) = x - \ln x$ pour $x > 0$. f dérivable et $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$. Pour $0 < x < 1$, on a $f'(x) < 0$ et pour $x > 1$, on a $f'(x) > 0$. Donc f décroît strictement sur $]0, 1[$ et croît strictement sur $]1, +\infty[$. Elle a donc un minimum strict en 1, et donc $xx - \ln x = f(x) > f(1) = 1$ pour tout $x > 0$, $x \neq 1$.

Exercice 7. • Montrez que $\sin x \leq x$ pour tout $x \geq 0$.

Solution. On pose $f(x) = \sin x - x$ pour $x \geq 0$. f dérivable et $f'(x) = \cos x - 1 \leq 0$. Donc f décroît sur $[0, +\infty[$ et donc $\sin x - x = f(x) \leq f(0) = 0$ pour tout $x \geq 0$.

- Déduisez-en que $-x \leq \sin x \leq x$ pour tout $x \geq 0$.

Solution. On pose $f(x) = \sin x + x$ pour $x \geq 0$. f dérivable et $f'(x) = \cos x + 1 \geq 0$. Donc f croît sur $[0, +\infty[$ et donc $\sin x + x = f(x) \leq f(0) = 0$ pour tout $x \geq 0$. Avec la question précédente, on obtient le résultat annoncé

- Déduisez-en que $|\sin x| \leq |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Solution. Pour $x \geq 0$, la question précédente donne $-x \leq \sin x \leq x = |x|$ et donc $|\sin x| \leq |x|$ pour $x \geq 0$. Pour $x \leq 0$, on pose $y = -x$. Du coup, $|\sin y| \leq |y|$. Or $|\sin x| = |\sin(-y)| = |-\sin y| = |\sin y|$ et $|x| = |-y| = |y|$ et on obtient l'inégalité attendue. Finalement, $|\sin x| \leq |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 8. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminez les points critiques. Déterminez ensuite si ces points critiques sont des minimum locaux ou pas SANS faire de tableau de variations.

- (1) $f_1(x) = x^2$

Solution. $f_1'(x) = 2x$ pour tout x dans $\mathbb{R}$. $f_1'(x) = 0$ ssi $x = 0$: c'est le seul point critique. $f_1''(0) = 2 > 0$ donc min local strict.

- (2) $f_2(x) = x^2 - 2x + 3$

Solution. $f_2'(x) = 2x - 2$ pour tout x dans $\mathbb{R}$. $f_2'(x) = 0$ ssi $x = 1$: c'est le seul point critique. $f_2''(0) = 2 > 0$ donc min local strict.

(3) $f_3(x) = -x^2 + 3x + 7$

Solution. $f'_3(x) = -2x + 3$ pour tout x dans $\mathbb{R}$. $f'_3(x) = 0$ ssi $x = \frac{3}{2}$: c'est le seul point critique. $f''_3(0) = -2 < 0$ donc max local strict.

(4) $f_4(x) = x^3 + 5x^2 + 3x + 1$

Solution. $f'_4(x) = 3x^2 + 10x + 3$ pour tout x dans $\mathbb{R}$. Poly du second degré qu'on factorise : $f'_4(x) = 3(x + \frac{1}{3})(x + 3) = 0$ ssi $x = -\frac{1}{3}$ ou $x = -3$: deux points critiques. $f''_4(x) = 6x + 10$. Ainsi, $f''_4(-\frac{1}{3}) = 8 > 0$: min local strict. Et $f''_4(-3) = -8 < 0$: max local strict.

(5) $f_5(x) = -x^3 + 4x^2 + 3x - 2$

Solution. $f'_5(x) = -3x^2 + 8x + 3$ pour tout x dans $\mathbb{R}$. Poly du second degré qu'on factorise : $f'_5(x) = -3(x + \frac{1}{3})(x - 3) = 0$ ssi $x = -\frac{1}{3}$ ou $x = 3$: deux points critiques. $f''_5(x) = -6x + 8$. Ainsi, $f''_5(-\frac{1}{3}) = 10 > 0$: min local strict. Et $f''_5(3) = -10 < 0$: max local strict.