

TD8 : Dérivabilité avancée

1. DÉRIVABILITÉ

Exercice 1. Déterminez les dérivées des fonctions suivantes.

Notations : dans les solutions ci-dessous, f désignera toujours la fonction dont il est question et D_f son ensemble de définition, $D_{f'}$ son ensemble de dérivation. On n'alourdira pas le propos quand les définitions/notations sont assez explicites.

- (a) $x \mapsto \frac{x+1}{x-3}$
- (b) $x \mapsto \frac{4x^3-2x+1}{x^2-3}$
- (c) $x \mapsto x\sqrt{x}$
- (d) $x \mapsto \sqrt{3x-1}$
- (e) $x \mapsto (5x^2+3x-1)\sqrt{2x+1}$
- (f) $x \mapsto \frac{\sqrt{2x+1}}{-x+3}$
- (g) $x \mapsto \sqrt{2x+1} \cos x$
- (h) $x \mapsto \frac{2 \sin x - 1}{\cos x + 1}$
- (i) $x \mapsto (x-3)^5(x+2)^7$
- (j) $x \mapsto (\sin x)^n(\cos x)^p$
- (k) $x \mapsto \sqrt{2+\sin x}$
- (l) $x \mapsto \sin(x^2)$
- (m) $x \mapsto \ln(\cos x)$
- (n) $x \mapsto \cos(x^2)e^{\sin x}$

Exercice 2. Déterminez les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4} \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3-3x+2}{x^2-4}$$

Exercice 3. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminez les dérivées jusqu'à l'ordre n :

- (a) $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$, ($n = 3$).
- (b) $f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$, ($n = 2$).
- (c) $f(x) = (x^2 + 1)^2$, ($n = 3$).
- (d) $x \mapsto x^3 + |x|$, ($n = 2$)
- (e) $f(x) = x^k$, $n \in \mathbb{N}$.
- (f) $f(x) = \cos(x^2)$, $n = 2$.
- (g) $f(x) = (\sin(e^x))^2$, $n = 2$.
- (h) $f(x) = \frac{e^{x^2} + \sin x}{1 + \ln x}$, ($n = 2$).
- (i) $f(x) = \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{e^x}$, $n = 2$.

2. EXTRÉMA

Exercice 4. Dans chacun des cas suivants, déterminez, s'ils existent, le minimum global, le max global, et les min et max locaux.

- (1) $f(x) = x^2 - 3x + 7$ sur $\mathbb{R}$ et sur $[0, 1]$.
- (2) $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 1$ sur $\mathbb{R}$ et sur $[0, 2]$.
- (3) $f(x) = |x| + |x - 1|$ sur $\mathbb{R}$.
- (4) $f(x) = |x - 1| - |x + 1|$ sur $\mathbb{R}$.
- (5) $f(x) = |x^2 - 1| + 2x$ sur $\mathbb{R}$ et $[-2, 2]$.

Exercice 5. Montrez que $x + \frac{1}{x} \geq 2$ pour tout $x > 0$. Quand a-t-on égalité ?

Exercice 6. Montrez que $x - \ln x \geq 1$ pour tout $x > 0$. Quand a-t-on égalité ?

Exercice 7. • Montrez que $\sin x \leq x$ pour tout $x \geq 0$.

- Déduisez-en que $-x \leq \sin x \leq x$ pour tout $x \geq 0$.
- Déduisez-en que $|\sin x| \leq |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 8. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminez les points critiques. Déterminez ensuite si ces points critiques sont des minimum locaux ou pas SANS faire de tableau de variations.

- (1) $f_1(x) = x^2$
- (2) $f_2(x) = x^2 - 2x + 3$
- (3) $f_3(x) = -x^2 + 3x + 7$
- (4) $f_4(x) = x^3 + 5x^2 + 3x + 1$
- (5) $f_5(x) = -x^3 + 4x^2 + 3x - 2$