

Solution du TD9 : Intégration avancée

Exercice 1. 1. Calculez $\tan'$. Déduisez-en $\int_{\pi/6}^{\pi/3} (1 + \tan^2(t)) dt$.

2. Calculez $\int_0^x \tan^n(t) dt$ pour $n = 0, 1, 2$ et $x \in [0; \pi/2[$

Solution : $\tan' = \left(\frac{\sin}{\cos}\right)' = \frac{\sin' \cos - \sin \cos'}{\cos^2} = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} = 1 + \tan^2$. Donc

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} (1 + \tan^2(t)) dt = [1 + \tan^2(t)]_{\pi/6}^{\pi/3} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + \tan^2(\pi/3) - \tan^2(\pi/6) = \frac{\pi}{6} + 3 - \frac{1}{3}.$$

Pour $n = 0$, c'est x . Pour $n = 1$, on a

$$\int_0^x \tan(t) dt = \int_0^x \frac{\sin(t)}{\cos(t)} dt = \int_0^x \frac{(-\cos(t))'}{\cos(t)} dt = [-\ln |\cos t|]_0^x = -\ln |\cos(x)|$$

Exercice 2. A l'aide d'une intégration par parties, calculez les intégrales suivantes :

(1) $\int_0^1 (t+1)e^t dt$

Solution : $u'(t) = e^t$ et $v(t) = t+1$, donc $u(t) = e^t$ et $v'(t) = 1$ conviennent. Ainsi

$$\begin{aligned} \int_0^1 (t+1)e^t dt &= \int_0^1 u'v dt = [uv]_0^1 - \int_0^1 uv' dt = [e^t(t+1)]_0^1 - \int_0^1 e^t dt \\ &= e^1(1+1) - e^0(0+1) - [e^t]_0^1 = 2e - 1 - (e - 1) = e \end{aligned}$$

(2) $\int_0^{\pi/2} x \cos x dx$

Solution : $u'(x) = \cos x$ et $v(x) = x$, donc $u(x) = \sin x$ et $v'(x) = 1$ conviennent. Ainsi

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} x \cos x dx &= \int_0^{\pi/2} u'v dx = [uv]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} uv' dx \\ &= [x \sin x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x dx = \frac{\pi}{2} - [-\cos x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1 \end{aligned}$$

(3) $\int_0^{\pi} (x+3) \sin x dx$

Solution : $u'(x) = \sin x$ et $v(x) = x+3$, donc $u(x) = -\cos x$ et $v'(x) = 1$ conviennent. Ainsi

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} (x+3) \sin x dx &= \int_0^{\pi} u'v dx = [uv]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} uv' dx \\ &= [-(x+3) \cos x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx = (\pi+6) + [\sin x]_0^{\pi} = \pi+6 \end{aligned}$$

(4) $\int_{-\pi/2}^0 x \sin(2x-1) dx$

Solution : $u'(x) = \sin(2x-1)$ et $v(x) = x$, donc $u(x) = -\frac{1}{2} \cos(2x-1)$ et $v'(x) = 1$ conviennent. Ainsi

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^0 x \sin(2x-1) dx &= \int_{-\pi/2}^0 u'v dx = [uv]_{-\pi/2}^0 - \int_{-\pi/2}^0 uv' dx \\ &= \left[-\frac{x \cos(2x-1)}{2}\right]_{-\pi/2}^0 + \int_{-\pi/2}^0 \frac{1}{2} \cos(2x-1) dx \\ &= \frac{-\pi \cos(-\pi-1)}{4} + \left[\frac{1}{4} \sin(2x-1)\right]_{-\pi/2}^0 \\ &= \frac{\sin(-\pi-1) - \sin(-1)}{4} = \frac{\pi \cos(1)}{4} + \frac{\sin(1)}{2} \end{aligned}$$

(5) $\int_0^x t^2 \sin t \, dt$

Solution : $u'(t) = \sin t$ et $v(t) = t^2$, donc $u(t) = -\cos t$ et $v'(t) = 2t$ conviennent. Ainsi

$$\begin{aligned} \int_0^x t^2 \sin t \, dt &= \int_0^x u' v \, dt = [uv]_0^x - \int_0^x uv' \, dt \\ &= [-t^2 \cos t]_0^x - \int_0^x -2t \cos t \, dt \\ &= -x^2 \cos x + 2 \int_0^x t \cos t \, dt \end{aligned}$$

Pour calculer $\int_0^x t \cos t \, dt$, on refait une intégration par parties. Ici $u'(t) = \cos t$ et $v(t) = t$, donc $u(t) = \sin t$ et $v'(t) = 1$ conviennent. Ainsi

$$\begin{aligned} \int_0^x t \cos t \, dt &= \int_0^x u' v \, dt = [uv]_0^x - \int_0^x uv' \, dt \\ &= [t \sin t]_0^x - \int_0^x \sin t \, dt \\ &= x \sin x - [-\cos t]_0^x = x \sin x + \cos x - 1 \end{aligned}$$

et donc,

$$\int_0^x t^2 \sin t \, dt = -x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x - 1) = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x - 2$$

(6) $\int_1^t \ln x \, dx$, où $t \geq 1$

Solution : $u'(x) = 1$ et $v(x) = \ln x$, donc $u(x) = x$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$ conviennent. Ainsi

$$\begin{aligned} \int_1^t \ln x \, dx &= \int_1^t u' v \, dx = [uv]_1^t - \int_1^t uv' \, dx \\ &= [x \ln x]_1^t - \int_1^t x \times \frac{1}{x} \, dx \\ &= t \ln t - \int_1^t dx = t \ln t - [x]_1^t = t \ln t - t + 1 \end{aligned}$$

(7) $\int_1^t x \ln(x+3) \, dx$, où $t \geq 1$

Solution : en faisant une IPP puis le changement de variable $y = x + 3$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_1^t x \ln(x+3) \, dx &= \int_1^t (x^2/2)' \ln(x+3) \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln(x+3) \right]_1^t - \int_1^t \frac{x^2}{2} (\ln(x+3))' \, dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} \ln(x+3) \right]_1^t - \int_1^t \frac{x^2}{2(x+3)} \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln(x+3) \right]_1^t - \int_4^{t+3} \frac{(y-3)^2}{2y} \, dy \\ &= \left[\frac{x^2}{2} \ln(x+3) \right]_1^t - \int_4^{t+3} \left(\frac{y}{2} - 3 + \frac{9}{2y} \right) \, dy = \left[\frac{x^2}{2} \ln(x+3) \right]_1^t - \left[\frac{y^2}{4} - 3y + \frac{9}{2} \ln |y| \right]_4^{t+3} \\ &= \frac{t^2}{2} \ln(t+3) - \frac{1}{2} \ln 4 - \left(\frac{(t+3)^2}{4} - 3(t+3) + \frac{9}{2} \ln(t+3) \right) - \left(\frac{4^2}{4} - 12 + \frac{9}{2} \ln 4 \right) \\ &= \frac{t^2}{2} \ln(t+3) - \left(\frac{(t+3)^2}{4} - 3(t+3) + \frac{9}{2} \ln(t+3) \right) + 8 - 10 \ln 2 \end{aligned}$$

(8) $\int_0^x te^t \, dt$, où $x \geq 0$

Solution : $u'(t) = e^t$ et $v(t) = t$, donc $u(t) = e^t$ et $v'(t) = 1$ conviennent.

Ainsi

$$\begin{aligned} \int_0^x t e^t dt &= \int_0^x u' v dt = [uv]_0^x - \int_0^x u v' dt = [e^t t]_0^x - \int_0^x e^t dt \\ &= x e^x - [e^t]_0^x = x e^x - e^x + 1 \end{aligned}$$

$$(9) \int_0^x t^2 e^t dt, \text{ où } x \geq 0$$

Solution : $u'(t) = e^t$ et $v(t) = t^2$, donc $u(t) = e^t$ et $v'(t) = 2t$ conviennent.

Ainsi

$$\begin{aligned} \int_0^x t^2 e^t dt &= \int_0^x u' v dt = [uv]_0^x - \int_0^x u v' dt = [e^t t^2]_0^x - \int_0^x 2t e^t dt \\ &= x^2 e^x - 2 \int_0^x t e^t dt \end{aligned}$$

la dernière intégrale a été calculée au point précédent et du coup

$$\int_0^x t^2 e^t dt = x^2 e^x - 2(x e^x - e^x + 1) = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x - 2$$

$$(10) \int_0^x (t^3 - 1) e^t dt, \text{ où } x \geq 0$$

Solution : $u'(t) = e^t$ et $v(t) = t^3 - 1$, donc $u(t) = e^t$ et $v'(t) = 3t^2$ conviennent.

Ainsi

$$\begin{aligned} \int_0^x (t^3 - 1) e^t dt &= \int_0^x u' v dt = [uv]_0^x - \int_0^x u v' dt = [e^t (t^3 - 1)]_0^x - \int_0^x 3t^2 e^t dt \\ &= (x^3 - 1) e^x + 1 - 3 \int_0^x t^2 e^t dt \end{aligned}$$

la dernière intégrale a été calculée au point précédent et du coup

$$\begin{aligned} \int_0^x (t^3 - 1) e^t dt &= (x^3 - 1) e^x + 1 - 3(x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x - 2) \\ &= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 7e^x + 7 \end{aligned}$$

Exercice 3. Déterminez des primitives des fonctions suivantes : $x \mapsto 3x - \sin \frac{x}{2} + 5 \cos(3x)$ et $x \mapsto \tan^2(2x)$

Solution : Le calcul direct donne pour $x \in \mathbb{R}$

$$3x - \sin \frac{x}{2} + 5 \cos(3x) = \left(\frac{3x^2}{2} + 2 \cos \frac{x}{2} + \frac{5}{3} \sin(3x) \right)'$$

Pour $x \mapsto \tan^2(2x)$, on commence par calculer la dérivée de $\tan$:

$$\tan' = \left(\frac{\sin}{\cos} \right)' = \frac{\sin' \cos - \sin \cos'}{\cos^2} = \frac{\sin^2 + \cos^2}{\cos^2} = 1 + \left(\frac{\sin}{\cos} \right)^2 = 1 + \tan^2$$

Du coup on a

$$(\tan(2x))' = 2 \tan'(2x) = 2(1 + \tan^2(2x)) = 2 + 2 \tan^2(2x)$$

et donc

$$\left(\frac{1}{2} \tan(2x) \right)' = 1 + \tan^2(2x) = x' + \tan^2(2x),$$

et donc

$$\tan^2(2x) = \left(\frac{1}{2} \tan(2x) - x \right)'$$

Exercice 4. En écrivant sous forme d'exponentielle, déterminez une primitive de $x \mapsto a^x$ pour $a > 0$. Déduisez-en

$$\int_1^3 (2^t - t^2 + 3t - 5\sqrt{t}) dt.$$

Solution : On écrit $a^x = e^{x \ln a}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc une primitive est donnée par $F(x) = \frac{1}{\ln a} e^{x \ln a}$. Du coup,

$$\begin{aligned} \int_1^3 (2^t - t^2 + 3t - 5\sqrt{t}) dt &= \left[\frac{e^{t \ln 2}}{\ln 2} - \frac{t^3}{3} + \frac{3t^2}{2} - \frac{10}{3} t^{3/2} \right]_1^3 \\ &= \frac{e^{3 \ln 2} - e^{\ln 2}}{\ln 2} - \frac{2^3 - 1^3}{3} + \frac{3 \times 3^2 - 3 \times 1^2}{2} - \frac{10}{3} (3^{3/2} - 1^{3/2}) \\ &= \frac{2^3 - 2}{\ln 2} - \frac{8 - 1}{3} + \frac{27 - 3}{2} - \frac{10}{3} (3\sqrt{3} - 1) \\ &= \frac{6}{\ln 2} - \frac{7}{3} + 12 - 10\sqrt{3} + \frac{10}{3} = \frac{6}{\ln 2} + 13 - 10\sqrt{3} \end{aligned}$$

Exercice 5. On va déterminer une primitive de $x \mapsto f(x) = e^x \sin x$ de deux façons :

- (1) Méthode 1 : Nombres complexes. En écrivant $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$, déterminez une primitive de f par un calcul direct.
- (2) Méthode 2 : Intégrations par parties. En intégrant deux fois par parties, déterminez $\int_0^x f(t) dt$.

Solution : Méthode 1. On a

$$f(x) = e^x \sin x = e^x \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right) = \frac{e^{(1+i)x}}{2i} - \frac{e^{(1-i)x}}{2i} = \left(\frac{e^{(1+i)x}}{2i(1+i)} - \frac{e^{(1-i)x}}{2i(1-i)} \right)'$$

On remet l'expression sous forme réelle :

$$\begin{aligned} \frac{e^{(1+i)x}}{2i(1+i)} - \frac{e^{(1-i)x}}{2i(1-i)} &= \frac{(1-i)e^{(1+i)x}}{2i(1+i)(1-i)} - \frac{(1+i)e^{(1-i)x}}{2i(1-i)(1+i)} = e^x \frac{(1-i)e^{ix} - (1+i)e^{-ix}}{4i} \\ &= e^x \frac{(1-i)(\cos x + i \sin x) - (1+i)(\cos x - i \sin x)}{4i} \\ &= e^x \frac{\cos x + i \sin x - i \cos x + \sin x - \cos x + i \sin x - i \cos x - \sin x}{4i} \\ &= e^x \frac{2i \sin x - 2i \cos x}{4i} = e^x \frac{\sin x - \cos x}{2} \text{ donc } \boxed{e^x \sin x = \left(e^x \frac{\sin x - \cos x}{2} \right)'} \end{aligned}$$

Méthode 2 : pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^x (e^t)' \sin t dt = [e^t \sin t]_0^x - \int_0^x e^t \cos t dt = e^x \sin x - \int_0^x e^t \cos t dt$$

Indépendamment,

$$\int_0^x e^t \cos t dt = \int_0^x (e^t)' \cos t dt = [e^t \cos t]_0^x + \int_0^x e^t \sin t dt = e^x \cos x - 1 + \int_0^x e^t \sin t dt$$

En regroupant tout, on obtient

$$\int_0^x f(t) dt = e^x \sin x - \left(e^x \cos x - 1 + \int_0^x e^t \sin t dt \right) = e^x \sin x - e^x \cos x + 1 - \int_0^x f(t) dt$$

et donc

$$2 \int_0^x f(t) dt = e^x (\sin x - \cos x) + 1 \Rightarrow \int_0^x f(t) dt = e^x \frac{\sin x - \cos x + 1}{2}$$

Une primitive de $x \mapsto e^x \sin x$ est donc donnée par $x \mapsto e^x \frac{\sin x - \cos x}{2}$

Exercice 6. Soit $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t dt$ pour $n \in \mathbb{N}$.

- (1) Calculez I_0, I_1, I_2
- (2) En intégrant par parties, trouvez une relation entre I_n et I_{n+2}
- (3) Déduisez-en I_{2p} et I_{2p+1} pour $p \in \mathbb{N}$ quelconque.

Exercice 7. Calculez les primitives des fonctions suivantes, en utilisant la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle

- (1) $\frac{1}{x(x-1)}$
- (2) $\frac{1}{x^2-4},$
- (3) $\frac{1}{x^2+2x+1}$
- (4) $\frac{x+1}{x(x-1)}$
- (5) $\frac{x^2}{x^2-4},$
- (6) $\frac{x+2}{x^2+2x+1}$
- (7) $\frac{x^4}{x^2+3x+2}$
- (8) $\frac{4x^3+6x^2+1}{x^4+2x^3+x+5}$
- (9) $\frac{1}{x^2+4}$
- (10) $\frac{14x+5}{7x^2+4x+9}$