

Solution du TD10 : Intégration 3. Fractions rationnelles et changement de variables

1. FRACTIONS RATIONNELLES

Exercice 1. Calculez les intégrales suivantes :

(1) $\int_1^2 \frac{t}{t+3} dt$

Solution :

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{t}{t+3} dt &= \int_1^2 \frac{(t+3)-3}{t+3} dt = \int_1^2 \left(1 - \frac{3}{t+3}\right) dt \\ &= [t - 3 \ln |t+3|]_1^2 = 1 - 3 \ln 5 + 3 \ln 4 \end{aligned}$$

(2) $\int_1^2 \frac{t-1}{t+1} dt$

Solution :

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{t-1}{t+1} dt &= \int_1^2 \frac{(t+1)-2}{t+1} dt = \int_1^2 \left(1 - \frac{2}{t+1}\right) dt \\ &= [t - 2 \ln |t+1|]_1^2 = 1 - 2 \ln 3 + 2 \ln 2 \end{aligned}$$

(3) $\int_1^2 \frac{t^2+2t+2}{t+2} dt$

Solution : On écrit

$$\begin{aligned} \frac{t^2+2t+2}{t+2} &= \frac{(t+2-2)^2 + 2(t+2-2) + 2}{t+2} \\ &= \frac{(t+2)^2 - 4(t+2) + 4 + 2(t+2) - 4 + 2}{t+2} = \frac{(t+2)^2 - 2(t+2) + 2}{t+2} \\ &= t+2-2 + \frac{2}{t+2} = t + \frac{2}{t+2} \end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{t^2+2t+2}{t+2} dt &= \int_1^2 \left(t + \frac{2}{t+2}\right) dt \\ &= \left[\frac{t^2}{2} + 2 \ln |t+2|\right]_1^2 = \frac{3}{2} + 2 \ln 4 - 2 \ln 2 \end{aligned}$$

Exercice 2 (Dénominateur avec une racine double). Calculez les intégrales suivantes :

(1) $\int_1^2 \frac{t}{(t+3)^2} dt$

Solution :

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{t}{(t+3)^2} dt &= \int_1^2 \frac{(t+3)-3}{(t+3)^2} dt = \int_1^2 \left(\frac{1}{t+3} - \frac{3}{(t+3)^2}\right) dt \\ &= \left[\ln |t+3| + \frac{3}{t+3}\right]_1^2 = \ln 5 - \ln 4 + \frac{3}{5} - \frac{3}{4} \end{aligned}$$

(2) $\int_1^2 \frac{t-1}{(t+1)^2} dt$

Solution :

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{t-1}{(t+1)^2} dt &= \int_1^2 \frac{(t+1)-2}{(t+1)^2} dt = \int_1^2 \left(\frac{1}{t+1} - \frac{2}{(t+1)^2} \right) dt \\ &= \left[\ln|t+1| + \frac{2}{t+1} \right]_1^2 = \ln 3 - \ln 2 + \frac{2}{3} - 1\end{aligned}$$

(3) $\int_1^2 \frac{t^2+2t+2}{(t+2)^2} dt$

Solution : En utilisant l'Exercice 1, on a

$$\begin{aligned}\frac{t^2+2t+2}{(t+2)^2} &= \frac{(t+2)^2 - 2(t+2) + 2}{(t+2)^2} \\ &= 1 - \frac{2}{t+2} + \frac{2}{(t+2)^2}\end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{t^2+2t+2}{(t+2)^2} dt &= \int_1^2 \left(1 - \frac{2}{t+2} + \frac{2}{(t+2)^2} \right) dt \\ &= \left[t - 2 \ln|t+2| - \frac{2}{t+2} \right]_1^2 = 1 - 2 \ln 4 + 2 \ln 3 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3}\end{aligned}$$

(4) $\int_2^3 \frac{dt}{t^2-2t+1}$

Solution : Le polynôme $t^2 - 2t + 1$ admet une racine double, à savoir 1, donc $t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2$ et donc

$$\int_2^3 \frac{dt}{t^2-2t+1} = \int_2^3 \frac{dt}{(t-1)^2} = \left[-\frac{1}{t-1} \right]_2^3 = \frac{1}{2}.$$

(5) $\int_2^3 \frac{t}{t^2+6t+9} dt$

Solution : Le polynôme $t^2 + 6t + 9$ admet une racine double, à savoir -3 , donc $t^2 + 6t + 9 = (t+3)^2$ et donc on retrouve la première intégrale de cet exercice.

(6) $\int_{-1}^2 \frac{dt}{t^2}$

Solution : Il faut toujours commencer par regarder l'ensemble de définition!!!!
Ici, il faut $t^2 \neq 0$, donc $t \neq 0$, mais 0 est pile dans l'intervalle $[-1, 2]$, donc vous n'êtes pas équipés pour calculer cela. Et justement, sachant que $(\frac{-1}{t})' = \frac{1}{t^2}$, le calcul brut sans vérifier l'ensemble de définition donnerait

$$\left[\frac{-1}{t} \right]_{-1}^2 = -\frac{3}{2} < 0,$$

or comme $1/t^2 > 0$, on a $\int_{-1}^2 \frac{dt}{t^2} > 0$. Moralité : pensez toujours à l'ensemble de définition.

Exercice 3 (Dénominateur à deux racines simples). (1) $\int_1^2 \frac{1}{t(t+1)} dt$

Solution : On va chercher $A, B \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1}.$$

On multiplie tout le monde par $t(t+1)$ et on obtient

$$1 = t(t+1) \left(\frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} \right) = A(t+1) + Bt = (A+B)t + A$$

en écrivant $1 = 0 \times t + 1$, on obtient le système

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A = 1 \end{cases} \Rightarrow A = 1 \text{ et } B = -1.$$

et donc

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}.$$

puis

$$\int_1^2 \frac{1}{t(t+1)} dt = \int_1^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt = [\ln |t| - \ln |t+1|]_1^2 = 2 \ln 2 - \ln 3$$

$$(2) \int_1^2 \frac{t}{(t+1)(t+2)} dt$$

Solution : On va chercher $A, B \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{t}{(t+1)(t+2)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+2}.$$

On multiplie tout le monde par $(t+1)(t+2)$ et on obtient

$$t = (t+1)(t+1) \left(\frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+2} \right) = A(t+2) + B(t+1) = (A+B)t + 2A + B$$

en écrivant $t = 1 \times t + 0$, on obtient le système

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ 2A + B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 1 - A \\ 2A + (1 - A) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 1 - A \\ A = -1 \end{cases} \Rightarrow A = -1 \text{ et } B = 2.$$

et donc

$$\frac{t}{(t+1)(t+2)} = \frac{-1}{t+1} + \frac{2}{t+2}.$$

puis

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{t}{(t+1)(t+2)} dt &= \int_1^2 \left(\frac{-1}{t+1} - \frac{2}{t+2} \right) dt = [-\ln |t+1| + 2 \ln |t+2|]_1^2 \\ &= -\ln 3 + \ln 2 + 2 \ln 4 - 2 \ln 3 = 5 \ln 2 - 3 \ln 3 \end{aligned}$$

$$(3) \int_2^3 \frac{t-7}{(t-1)(t+2)} dt$$

Solution : On va chercher $A, B \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{t-7}{(t-1)(t+2)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+2}.$$

On multiplie tout le monde par $(t-1)(t+2)$ et on obtient

$$t-7 = (t-1)(t+2) \left(\frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+2} \right) = A(t+2) + B(t-1) = (A+B)t + 2A - B$$

on obtient alors le système

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ 2A - B = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 1 - A \\ 2A - (1 - A) = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 1 - A \\ A = -8 \end{cases} \Rightarrow A = -8 \text{ et } B = 9.$$

et donc

$$\frac{t-7}{(t-1)(t+2)} = \frac{-8}{t-1} + \frac{9}{t+2}.$$

puis

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{t-7}{(t-1)(t+2)} dt &= \int_2^3 \left(\frac{-8}{t-1} + \frac{9}{t+2} \right) dt = [-8 \ln |t-1| + 9 \ln |t+2|]_2^3 \\ &= -8 \ln 3 + 8 \ln 2 + 9 \ln 4 - 9 \ln 3 = -17 \ln 3 + 26 \ln 2 \end{aligned}$$

$$(4) \int_3^5 \frac{t-7}{(t-1)(t+2)} dt$$

idem que le précédent

$$(5) \int_2^4 \frac{3t-1}{t^2-1} dt$$

Solution : On commence par factoriser $t^2 - 1 = (t-1)(t+1)$, donc 2 racines simples. On va chercher $A, B \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{3t-1}{(t-1)(t+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1}.$$

On multiplie tout le monde par $(t-1)(t+1)$ et on obtient

$$3t-1 = (t-1)(t+1) \left(\frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} \right) = A(t+1) + B(t-1) = (A+B)t + A-B$$

on obtient alors le système

$$\left\{ \begin{array}{l} A+B=3 \\ A-B=-1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} B=3-A \\ A-(3-A)=-1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} B=3-A \\ A=1 \end{array} \right\} \Rightarrow A=1 \text{ et } B=2.$$

et donc

$$\frac{3t-1}{(t-1)(t+1)} = \frac{1}{t-1} + \frac{2}{t+1}.$$

puis

$$\begin{aligned} \int_2^4 \frac{3t-1}{(t-1)(t+1)} dt &= \int_2^4 \left(\frac{1}{t-1} + \frac{2}{t+1} \right) dt = [\ln|t-1| + 2\ln|t+1|]_2^4 \\ &= \ln 3 + 2\ln 6 - \ln 1 - 2\ln 4 = 3\ln 3 - 2\ln 2 \end{aligned}$$

$$(6) \int_5^{10} \frac{1}{x^2-4} dx$$

Solution : On commence par factoriser $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$, donc 2 racines simples. On va chercher $A, B \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}.$$

On multiplie tout le monde par $(x-2)(x+2)$ et on obtient

$$1 = (x-2)(x+2) \left(\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} \right) = A(x+2) + B(x-2) = (A+B)x + 2A-2B$$

on obtient alors le système

$$\left\{ \begin{array}{l} A+B=0 \\ 2A-2B=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} B=-A \\ 2A+2A=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} B=-A \\ A=\frac{1}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow A=\frac{1}{4} \text{ et } B=-\frac{1}{4}.$$

et donc

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{4(x-2)} - \frac{1}{4(x+2)}.$$

puis

$$\begin{aligned} \int_5^{10} \frac{1}{x^2-4} dx &= \int_5^{10} \left(\frac{1}{4(x-2)} - \frac{1}{4(x+2)} \right) dx = \left[\frac{1}{4} \ln|x-2| - \frac{1}{4} \ln|x+2| \right]_5^{10} \\ &= \frac{\ln 8 - \ln 3 - \ln 12 + \ln 7}{4} = \frac{\ln 2 - 2\ln 3 + \ln 7}{4} \end{aligned}$$

$$(7) \int_3^5 \frac{5t}{t^2-t-6} dt$$

Solution : On commence par factoriser $t^2 - t - 6 = (t+2)(t-3)$, donc 2 racines simples. Et donc paf... le dénominateur s'annule en $t=3$ qui est dans l'intervalle $[3, 5]$. Donc vous n'avez pas à calculer l'intégrale.

Histoire de ne pas perdre la main, on va quand même chercher une primitive.
On va chercher $A, B \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{5t}{(t+2)(t-3)} = \frac{A}{t+2} + \frac{B}{t-3}.$$

On multiplie tout le monde par $(t-1)(t+1)$ et on obtient

$$5t = (t+2)(t-3) \left(\frac{A}{t+2} + \frac{B}{t-3} \right) = A(t-3) + B(t+2) = (A+B)t - 3A + 2B$$

on obtient alors le système

$$\left\{ \begin{array}{l} A+B=5 \\ -3A+2B=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} B=5-A \\ -3A+2(5-A)=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} B=5-A \\ A=2 \end{array} \right\} \Rightarrow A=2 \text{ et } B=3.$$

et donc

$$\frac{5t}{(t+2)(t-3)} = \frac{2}{t+2} + \frac{3}{t-3}.$$

puis pour $[a, b]$ qui ne contient ni 3 ni -2, on a

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{5t}{(t+2)(t-3)} dt &= \int_a^b \left(\frac{2}{t+2} + \frac{3}{t-3} \right) dt = [2 \ln |t+2| + 3 \ln |t-3|]_a^b \\ &= 2 \ln |b+2| + 3 \ln |b-3| - (2 \ln |a+2| + 3 \ln |a-3|) \end{aligned}$$

$$(8) \int_{-5}^{-3} \frac{1}{x^2+x-2} dx$$

Solution : On commence par factoriser $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$, donc 2 racines simples. On va chercher $A, B \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{1}{x^2+x-2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1}.$$

On multiplie tout le monde par $(x+2)(x-1)$ et on obtient

$$1 = (x+2)(x-1) \left(\frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} \right) = A(x-1) + B(x+2) = (A+B)x - A + 2B$$

on obtient alors le système

$$\left\{ \begin{array}{l} A+B=0 \\ -A+2B=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} B=-A \\ -A-2A=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} B=-A \\ A=-\frac{1}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow A = -\frac{1}{3} \text{ et } B = \frac{1}{3}.$$

et donc

$$\frac{1}{x^2+x-2} = \frac{-1}{3(x+2)} + \frac{1}{3(x-1)}.$$

puis

$$\begin{aligned} \int_{-5}^{-3} \frac{1}{x^2+x-2} dx &= \int_{-5}^{-3} \left(\frac{-1}{3(x+2)} + \frac{1}{3(x-1)} \right) dx = \left[\frac{-1}{3} \ln |x+2| + \frac{1}{3} \ln |x-1| \right]_{-5}^{-3} \\ &= \frac{-\ln |-3+2| + \ln |-3-1| - (-\ln |-5+2| + \ln |-5-1|)}{3} \\ &= \frac{-\ln |-1| + \ln |-4| + \ln |-3| - \ln |-6|}{3} = \frac{\ln 4 + \ln 3 - \ln 6}{3} = \frac{\ln 2}{3} \end{aligned}$$

Moralité : les valeurs absolues servent à quelque chose dans la formule

$$(\ln |u|)' = \frac{u'}{u} \dots$$

Exercice 4. A l'aide d'une intégration par parties, calculez

$$\int_1^t x \ln(x+3) dx, \text{ où } t \geq 1$$

2. CHANGEMENTS DE VARIABLES

Exercice 5. Calculez les intégrales suivantes à l'aide d'un changement de variables (vous pouvez comparer aux résultats de l'exo 1 du TD6) :

$$(1) \int_0^3 \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} dt, (y = t^2 + 1)$$

Solution : On a $dy = (t^2 + 1)' dt = 2t dt$. Comme $x : 0 \rightarrow 3$, on a $y : 0^2 + 1 = 1 \rightarrow 3^2 + 1 = 10$, donc

$$\begin{aligned} \int_{t=0}^{t=3} \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} dt &= \int_{y=1}^{y=10} \frac{t}{\sqrt{y}} \cdot \frac{dy}{2t} = \int_{y=1}^{y=10} \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \int_1^{10} \frac{y^{-\frac{1}{2}}}{2} dy \\ &= \left[\frac{1}{2} \frac{y^{1-\frac{1}{2}}}{1-\frac{1}{2}} \right]_1^{10} = \left[\frac{1}{2} \frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_1^{10} = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1} y^{\frac{1}{2}} \right]_1^{10} = \left[y^{\frac{1}{2}} \right]_1^{10} = \sqrt{10} - 1 \end{aligned}$$

$$(2) \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} te^{t^2} dt, (y = t^2)$$

Solution : On a $dy = (t^2)' dt = 2t dt$. Comme $x : -\sqrt{2} \rightarrow \sqrt{2}$, on a $y : (-\sqrt{2})^2 = 2 \rightarrow \sqrt{2}^2 = 2$, donc

$$\int_{t=-\sqrt{2}}^{t=\sqrt{2}} te^{t^2} dt = \int_{y=2}^{y=2} te^y \frac{dy}{2t} = \int_{y=2}^{y=2} \frac{e^y}{2} dy = \left[\frac{e^y}{2} \right]_2^2 = \frac{e^2 - e^2}{2} = 0$$

$$(3) \int_0^x (t^3 - 1)e^t dt, \text{ où } x \geq 0$$

$$(4) \int_1^t \ln x dx, \text{ où } t \geq 1$$

$$(5) \int_0^x \tan(t) dt \text{ avec } 0 \leq x < \frac{\pi}{2}$$

$$(6) \int_0^\pi \cos\left(\frac{x}{3}\right) dx, (u = \frac{x}{3})$$

Solution : On a $du = (\frac{x}{3})' dx = \frac{1}{3} dx$. Comme $t : 0 \rightarrow \pi$, on a $u : 0 \rightarrow \frac{\pi}{3}$, donc

$$\int_{x=0}^{x=\pi} \cos\left(\frac{x}{3}\right) dx = \int_{u=0}^{u=\pi/3} (\cos y) \times 3 du = [3 \sin u]_0^{\pi/3} = 3 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - 3 \sin(0) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$(7) \int_0^{\pi/2} \cos^3(x) \sin(x) dx, (z = \cos x)$$

Solution : On a $dz = (\cos x)' dx = -\sin(x) dx$. Comme $x : 0 \rightarrow \pi/2$, on a $z : \cos(0) = 1 \rightarrow \cos(\pi/2) = 0$, donc

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^{x=\pi/2} \cos^3(x) \sin(x) dx &= \int_{z=1}^{z=0} z^3 \times \sin(x) \times \frac{dz}{-\sin(x)} \\ &= - \int_{z=1}^{z=0} z^3 dz = - \left[\frac{z^4}{4} \right]_1^0 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$(8) \int_0^1 \frac{t+1/2}{t^2+t+1} dt, (x = t^2 + t + 1)$$

Solution : On a $dx = (t^2 + t + 1)' dt = (2t + 1) dt$. Comme $t : 0 \rightarrow 1$, on a $x : 0^2 + 0 + 1 = 1 \rightarrow 1^2 + 1 + 1 = 3$, donc

$$\int_{t=0}^{t=1} \frac{t+1/2}{t^2+t+1} dt = \int_{x=1}^{x=3} \frac{t+1/2}{x} \cdot \frac{dx}{2t+1} dt = \int_{x=1}^{x=3} \frac{dx}{2x} = \left[\frac{\ln x}{2} \right]_1^3 = \frac{\ln 3}{2}$$

$$(9) \int_1^2 \frac{1}{(2x-1)^n} dx, \quad n \in \mathbb{N}, (y = 2x-1)$$

Solution : On a $dy = (2x-1)'dx = 2dx$. Comme $x : 1 \rightarrow 2$, on a $y : 1 \rightarrow 3$, donc si $n \neq 1$, on a

$$\begin{aligned} \int_{x=1}^{x=2} \frac{1}{(2x-1)^n} dx &= \int_{y=1}^{y=3} \frac{dy}{2y^n} = \int_1^3 \frac{1}{2} y^{-n} dy = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{y^{1-n}}{1-n} \right]_1^3 \\ &= \frac{3^{1-n} - 1}{2(1-n)} = \frac{1 - 3^{1-n}}{2(n-1)} \end{aligned}$$

Dans le cas $n = 1$, on a

$$\int_{x=1}^{x=2} \frac{1}{(2x-1)} dx = \int_{y=1}^{y=3} \frac{dy}{2y} = \left[\frac{1}{2} \ln |y| \right]_1^3 = \frac{\ln 3}{2}$$

$$(10) \int_2^5 \frac{dt}{t \ln t}, (v = \ln t)$$

Solution : On a $dv = (\ln t)'dt = \frac{dt}{t}$. Comme $t : 2 \rightarrow 5$, on a $x : \ln 2 \rightarrow \ln 5$, donc

$$\int_{t=2}^{t=5} \frac{dt}{t \ln t} = \int_{v=\ln 2}^{v=\ln 5} \frac{t dv}{tv} = \int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{dv}{v} = [\ln v]_{\ln 2}^{\ln 5} = \ln \ln 5 - \ln \ln 2$$

$$(11) \int_{\pi/3}^{\pi/4} \tan t dt, (x = \cos t)$$

Solution : On a $dx = (\cos t)'dt = -\sin(t) dt$. Comme $t : \pi/3 \rightarrow \pi/4$, on a $x : \cos(\pi/3) = 1/2 \rightarrow \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, donc

$$\begin{aligned} \int_{t=\pi/3}^{t=\pi/4} \tan t dt &= \int_{x=1/2}^{x=\sqrt{2}/2} \frac{\sin t}{\cos t} \cdot \frac{-dx}{\sin t} = \int_{x=1/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{-dx}{x} \\ &= [-\ln x]_{1/2}^{\sqrt{2}/2} = -\ln \frac{\sqrt{2}}{2} + \ln \frac{1}{2} \\ &= -\ln \sqrt{2} - \ln \frac{1}{2} + \ln \frac{1}{2} = -\ln \sqrt{2} = -\frac{\ln 2}{2} \end{aligned}$$

Exercice 6. Dans chacun des cas suivants, calculez l'intégrale en trouvant un changement de variables adapté

$$(1) \int_1^4 \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

Solution : On choisit $y = \sqrt{x}$, de sorte que $dy = (\sqrt{x})'dx = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$. Comme $x : 1 \rightarrow 4$, on a $y : \sqrt{1} = 1 \rightarrow \sqrt{4} = 2$

$$\int_{x=1}^{x=4} \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int_{y=1}^{y=2} \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot 2\sqrt{x} dy = \int_{y=1}^{y=2} 2 \ln \sqrt{x} dy = \int_1^2 2 \ln y dy$$

On a vu dans les exercices d'intégration par parties que $\ln y = (y \ln y - y)'$, et donc

$$\int_1^4 \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int_1^2 2 \ln y dy = [2(y \ln y - y)]_1^2 = 4 \ln 2 - 4 + 2 = 4 \ln 2 - 2$$

$$(2) \int_0^\pi \cos x e^{3 \sin x} dx$$

Solution : On choisit $y = 3 \sin x$, de sorte que $dy = (3 \sin x)'dx = 3 \cos(x) dx$. Comme $x : 0 \rightarrow \pi$, on a $y : 3 \sin(0) = 0 \rightarrow 3 \sin(\pi) = 0$

$$\int_{x=0}^{x=\pi} \cos x e^{3 \sin x} dx = \int_{y=0}^0 \cos x e^y \frac{dy}{3 \cos x} = \int_{y=0}^0 \frac{e^y}{3} dy = \left[\frac{e^y}{3} \right]_0^0 = \frac{1-1}{3} = 0$$

$$(3) \int_1^2 \frac{t \, dt}{1-3t^2}$$

Solution : On choisit $y = 1 - 3t^2$, de sorte que $dy = (1 - 3t^2)' dt = -6t \, dt$.
Comme $t : 1 \rightarrow 2$, on a $y : -2 \rightarrow -11$ et

$$\begin{aligned} \int_{t=1}^{t=2} \frac{t \, dt}{1-3t^2} &= \int_{y=-2}^{y=-11} \frac{t}{y} \times dy - 6t = \frac{-1}{6} \int_{-2}^{-11} \frac{dy}{y} \\ &= \frac{-1}{6} [\ln |y|]_{-2}^{-11} = \frac{-\ln 11 + \ln 2}{6} = -\frac{\ln 11 - \ln 2}{6} \end{aligned}$$

$$(4) \int_2^3 \frac{dt}{t(\ln t)^2}$$

Solution : On choisit $y = \ln t$, de sorte que $dy = (\ln t)' dt = \frac{dt}{t}$. Comme $t : 2 \rightarrow 3$, on a $y : \ln 2 \rightarrow \ln 3$ et

$$\int_{t=2}^{t=3} \frac{dt}{t(\ln t)^2} = \int_{y=\ln 2}^{y=\ln 3} \frac{t \, dy}{t y^2} = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dy}{y^2} = \left[-\frac{1}{y} \right]_{\ln 2}^{\ln 3} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3}$$

$$(5) \int_{-\pi/3}^{\pi/4} \frac{\sin t \, dt}{\cos^3 t}$$

Solution : On note que $\cos t$ ne s'annule pas pour $-\pi/3 \leq t \leq \pi/4$. On choisit $y = \cos t$, de sorte que $dy = (\cos t)' dt = -\sin(t) \, dt$. Comme $t : -\pi/3 \rightarrow \pi/4$, on a $y : \cos(-\pi/3) = 1/2 \rightarrow \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$ et

$$\begin{aligned} \int_{t=-\pi/3}^{t=\pi/4} \frac{\sin t \, dt}{\cos^3 t} &= \int_{1/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{-dy}{y^3} = \int_{1/2}^{\sqrt{2}/2} -y^{-3} \, dy \\ &= \left[\frac{-y^{-3+1}}{-3+1} \right]_{1/2}^{\sqrt{2}/2} = \left[\frac{1}{2y^2} \right]_{1/2}^{\sqrt{2}/2} = 1 - 2 = -1 \end{aligned}$$

$$(6) \int_0^{1/2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \text{ (Indication : quels } a, b \text{ avez-vous tels que } a^2 = 1 - b^2 \text{ ?)}$$

Solution : On choisit $t = \sin y$, de sorte que $dt = (\sin y)' dy = \cos(y) \, dy$.
Comme $t : 0 = \sin(0) \rightarrow 1/2 = \sin(\pi/6)$, on a $y : 0 \rightarrow \pi/6$ et

$$\int_{t=0}^{t=1/2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_{y=0}^{y=\pi/6} \frac{\cos(y) \, dy}{\sqrt{1-\sin^2(y)}} = \int_{y=0}^{y=\pi/6} \frac{\cos(y) \, dy}{|\cos y|}$$

Notons que pour $0 \leq y \leq \pi/6$, on a $1/2 \leq \cos y \leq 1$, donc $\cos y > 0$ et donc

$$\int_0^{1/2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^{\pi/6} \frac{\cos(y) \, dy}{|\cos y|} = \int_0^{\pi/6} dy = [y]_0^{\pi/6} = \frac{\pi}{6}$$