

TD10 : Intégration 3. Fractions rationnelles et changement de variables

1. FRACTIONS RATIONNELLES

Exercice 1. Calculez les intégrales suivantes :

- (1) $\int_1^2 \frac{t}{t+3} dt$
- (2) $\int_1^2 \frac{t-1}{t+1} dt$
- (3) $\int_1^2 \frac{t^2+2t+2}{t+2} dt$

Exercice 2 (Dénominateur avec une racine double). Calculez les intégrales suivantes :

- (1) $\int_1^2 \frac{t}{(t+3)^2} dt$
- (2) $\int_1^2 \frac{t-1}{(t+1)^2} dt$
- (3) $\int_1^2 \frac{t^2+2t+2}{(t+2)^2} dt$
- (4) $\int_2^3 \frac{dt}{t^2-2t+1}$
- (5) $\int_2^3 \frac{t}{t^2+6t+9} dt$
- (6) $\int_{-1}^2 \frac{dt}{t^2}$

Exercice 3 (Dénominateur à deux racines simples). .

- (1) $\int_1^2 \frac{1}{t(t+1)} dt$
- (2) $\int_1^2 \frac{t}{(t+1)(t+2)} dt$
- (3) $\int_2^3 \frac{t-7}{(t-1)(t+2)} dt$
- (4) $\int_2^4 \frac{3t-1}{t^2-1} dt$
- (5) $\int_5^{10} \frac{1}{x^2-4} dx$
- (6) $\int_4^5 \frac{5t}{t^2-t-6} dt$
- (7) $\int_{-5}^{-3} \frac{1}{x^2+x-2} dx$
- (8) $\int_2^3 \frac{2t^2-6t+5}{t^2-3t+2} dt$
- (9) $\int_0^1 \frac{t^3+t-1}{t^2+t} dt$

Exercice 4. (Dénominateur sans racine) Calculez les intégrales suivantes :

- (1) $\int_0^1 \frac{1}{t^2+2t+3} dt$
- (2) $\int_1^2 \frac{1}{t^2-4t+5} dt$

Exercice 5. Calculez les primitives des fonctions suivantes, en utilisant la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle

- (1) $\frac{1}{x(x-1)}$

$$(2) \frac{1}{x^2 - 4},$$

$$(3) \frac{1}{x^2 + 2x + 1}$$

$$(4) \frac{x + 1}{x(x - 1)}$$

$$(5) \frac{x^2}{x^2 - 4},$$

$$(6) \frac{x + 2}{x^2 + 2x + 1}$$

$$(7) \frac{x^4}{x^2 + 3x + 2}$$

$$(8) \frac{4x^3 + 6x^2 + 1}{x^4 + 2x^3 + x + 5}$$

$$(9) \frac{1}{x^2 + 4}$$

$$(10) \frac{14x + 5}{7x^2 + 4x + 9}$$

Exercice 6. A l'aide d'une intégration par parties, calculez

$$\int_1^t x \ln(x + 3) dx, \text{ où } t \geq 1$$

2. CHANGEMENTS DE VARIABLES

Exercice 7. Calculez les intégrales suivantes à l'aide d'un changement de variables (vous pouvez comparer aux résultats de l'exo 1 du TD6) :

$$(1) \int_0^3 \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} dt, (y = t^2 + 1)$$

$$(2) \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} te^{t^2} dt, (y = t^2)$$

$$(3) \int_0^\pi \cos\left(\frac{x}{3}\right) dx, (u = \frac{x}{3})$$

$$(4) \int_0^{\pi/2} \cos^3(x) \sin(x) dx, (z = \cos x)$$

$$(5) \int_0^1 \frac{t + 1/2}{t^2 + t + 1} dt, (x = t^2 + t + 1)$$

$$(6) \int_1^2 \frac{1}{(2x - 1)^n} dx, \quad n \in \mathbb{N}, (y = 2x - 1)$$

$$(7) \int_2^5 \frac{dt}{t \ln t}, (v = \ln t)$$

$$(8) \int_{\pi/3}^{\pi/4} \tan t dt, (x = \cos t)$$

Exercice 8. Dans chacun des cas suivants, calculez l'intégrale en trouvant un changement de variables adapté

$$(1) \int_1^4 \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

$$(2) \int_0^\pi \cos x e^{3 \sin x} dx$$

$$(3) \int_1^2 \frac{t \, dt}{1-3t^2}$$

$$(4) \int_2^3 \frac{dt}{t(\ln t)^2}$$

$$(5) \int_{-\pi/3}^{\pi/4} \frac{\sin t \, dt}{\cos^3 t}$$

$$(6) \int_0^{1/2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \text{ (Indication : quels } a, b \text{ avez-vous tels que } a^2 = 1 - b^2 \text{ ?)}$$