

Corrigé du TD11 : EDOs avancées.
Equations différentielles du premier ordre à coefficients variables
et avec second membre

1. EQUATIONS HOMOGÈNES À COEFFICIENTS NON-CONSTANTS

Exercice 1. Déterminez les solutions des ED suivantes :

$$y' = x^2 y, \cos(x)y' + 3\sin(x)y = 0 \text{ sur }]-\pi/2, \pi/2[, \quad 4t\dot{x} + x = 0 \text{ sur } [1, +\infty[;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = (\cos x)y; y' = (\cos x + \sin x)y \text{ avec } y(\pi/2) = 1 \\ y' + \tan^2(x)y = 0 \quad \text{sur }]-\pi/2, \pi/2[, \\ y(0) = 3 \end{array} \right\}; \left\{ \begin{array}{l} y' = \ln(x)y \quad \text{sur }]0, +\infty[, \\ y(1) = 2 \end{array} \right\}; \left\{ \begin{array}{l} 2y' + 7e^x y = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}, \\ y(-1) = 0 \end{array} \right\};$$

Corrigé :

$$\bullet y' = x^2 y \Leftrightarrow \text{il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \boxed{y(x) = \lambda e^{x^3/3} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}}$$

$$\bullet \cos(x)y' + 3\sin(x)y = 0. \text{ Il faut trouver une primitive de } x \mapsto -3\frac{\sin x}{\cos x} = 3\frac{\cos'(x)}{\cos x} = 3\ln|\cos x|. \text{ Donc}$$

$$\text{il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \boxed{y(x) = \lambda e^{3\ln|\cos x|} = \lambda|\cos x|^3 = \lambda\cos(x)x^3 \text{ pour tout } x \in]-\pi/2, \pi/2[}$$

$$\bullet 4t\dot{x} + x = 0 \Leftrightarrow \dot{x} = \frac{-1}{4t}x \Leftrightarrow \text{il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \boxed{x(t) = \lambda e^{\frac{-1}{4}\ln t} = \lambda t^{-\frac{1}{4}}}$$

$$\bullet y' = (\cos x)y \Leftrightarrow \text{il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \boxed{y(x) = \lambda e^{\sin x}}$$

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} y' = (\cos x + \sin x)y \quad \text{sur }]-\pi/2, \pi/2[, \\ y(\pi/2) = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \{ \text{il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } y(x) = \lambda e^{\sin x - \cos x} \text{ et } y(\pi/2) = 1 \}$$

$$\text{Et du coup, } 1 = y(\pi/2) = \lambda e^{1-0} \text{ donc } \lambda = e^{-1} \text{ et } \boxed{y(x) = e^{\sin x - \cos x - 1}}$$

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} y' + \tan^2(x)y = 0 \quad \text{sur }]-\pi/2, \pi/2[, \\ y(0) = 3 \end{array} \right\}$$

Il faut trouver une primitive de $x \mapsto -\tan^2(x) = -(1 + \tan^2 x) + 1 = -(\tan'(x)) + x' = (x - \tan x)'$. Donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y(x) = \lambda e^{x - \tan x}$ pour tout $x \in]-\pi/2, \pi/2[$. On a alors $3 = y(0) = \lambda e^{0 - \tan 0} = \lambda$. Donc

$$\boxed{y(x) = 3e^{x - \tan x} \text{ pour tout } x \in]-\pi/2, \pi/2[}$$

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} y' = \ln(x)y \quad \text{sur }]0, +\infty[, \\ y(1) = 2 \end{array} \right\}$$

Il faut trouver une primitive de $x \mapsto \ln x = (x \ln x - x)'$ (exo sur les intégrales, ça se fait par IPP). Donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y(x) = \lambda e^{x \ln x - x}$ pour tout $x > 0$. On a alors $2 = y(1) = \lambda e^{1 \ln 1 - 1} = \lambda e^{-1}$. Donc

$$\boxed{y(x) = 2e^1 e^{x \ln x - x} = 2e^{x \ln x - x + 1} \text{ pour tout } x > 0}$$

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} 2y' + 7e^x y = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}, \\ y(-1) = 0 \end{array} \right\};$$

Intégration à vue : il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y(x) = \lambda e^{7e^x/2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Or $0 = y(-1) = \lambda e^{7e^{-1}/2}$ donc $\lambda = 0$, puis $y(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

2. EQUATIONS AVEC SECOND MEMBRE

Exercice 2. Pour chacune des équations suivantes, déterminez UNE solution sous forme de polynôme

- $y' + y = 1$
- $y' + 2y = 2x + 3$;
- $y' = 3x$;
- $y' + 2xy = x$;
- $2y' + xy = x^2 + x + 2$;

Corrigé :

- $y' + y = 1$. On essaie $y(x) = k$, ce qui donne $y' + y = k$, donc on prend $k = 1$ et $y(x) = 1$ est solution.
- $y' + 2y = 2x + 3$. On essaie $y(x) = k$, ce qui donne $y' + 2y = 2k \neq 2x + 3$. On essaie $y(x) = ax + b$, donc $y' + 2y = a + 2(ax + b) = 2ax + a + 2b = 2x + 3$ avec $2a = 2$ et $a + 2b = 3$, donc $a = b = 1$. Donc $y(x) = x + 1$ est solution.
- $y' = 3x$. On essaie $y(x) = k$, donc $y' = 0$, ne convient pas. Avec $y(x) = ax + b$, $y' = a$ ne convient toujours pas. Avec $y(x) = ax^2 + bx + c$, on a $y' = 2ax + b = 3x$ avec $a = 3/2$ et $b = 0$. Donc $y(x) = \frac{3}{2}x^2 + c$. Comme il n'y a pas de contrainte sur c , on va prendre $c = 0$ car on cherche une solution, pas toutes. Donc, par exemple, $y(x) = \frac{3}{2}x^2$.
- $y' + 2xy = x$. On essaie $y(x) = k$, donc $y' + 2xy = 2kx = x$ avec $2k = 1$, donc $y(x) = 1/2$ convient.
- $2y' + xy = x^2 + x + 2$. On essaie $y(x) = k$, donc $2y' + xy = kx + 2k \neq x^2 + x + 2$, ne convient pas. Avec $y(x) = ax + b$, $2y' + xy = ax^2 + bx + 2a = x^2 + x + 2$ convient avec $a = b = 1$. Donc $y(x) = x + 1$.

Exercice 3. Pour chacune des équations suivantes, déterminez UNE solution sous forme de polynôme multiplié par une exponentielle

- $y' + y = 2e^x$;
- $y' - y = e^x$;
- $3y' + 4y = xe^{2x}$;
- $y' = 3xe^{-x}$;
- $2y' - 5y = (x^2 + 4x - 1)e^{3x}$;
- $y' + 4y = xe^{-4x}$.

Corrigé :

- $y' + y = 2e^x$. On essaie $y(x) = ke^x$: cela donne $y' + y = 2ke^x = 2e^x$ avec $2k = 2$, donc $y(x) = e^x$ convient.
- $y' - y = e^x$. On essaie $y(x) = ke^x$, ce qui donne $y' - y = 0 \neq e^x$. On essaie $y(x) = (ax + b)e^x$, donc $y' - y = ae^x + (ax + b)e^x - (ax + b)e^x = ae^x = e^x$ avec $a = 1$, donc $y(x) = (x + b)e^x$ sans condition sur b . Ici encore, on va prendre $b = 0$ pour simplifier, et donc $y(x) = xe^x$ convient.

- $3y' + 4y = xe^{2x}$. On essaie $y(x) = ke^{2x}$, ce qui donne $3y' + 4y = 10ke^x \neq xe^x$. On essaie $y(x) = (ax + b)e^x$, donc $3y' + 4y = 3(ae^{2x} + (ax + b)2e^{2x}) + 4(ax + b)e^{2x} = (10ax + 3a + 10b)e^{2x} = xe^{2x}$ avec $10a = 1$ et $3a + 10b = 0$, donc

$$a = 1/10 \text{ et } b = -3/100, \text{ ce qui donne } \boxed{y(x) = \left(\frac{x}{10} - \frac{3}{100}\right)e^{2x}}.$$

- $y' = 3xe^{-x}$. On essaie $y(x) = ke^{-x}$, ce qui donne $y' = -ke^{-x} \neq 3xe^{-x}$, ne convient pas. On essaie $y(x) = (ax + b)e^{-x}$, donc $y' = (-ax + a - b)e^{-x} = 3xe^{-x}$ avec $-a = 3$ et $a - b = 0$, donc $a = b = -3$, ce qui donne

$$\boxed{y(x) = -3(x + 1)e^{-x}}.$$

- $2y' - 5y = (x^2 + 4x - 1)e^{3x}$. On essaie $y(x) = ke^{3x}$, ce qui donne $2y' - 5y = 6ke^{3x} \neq (x^2 + 4x - 1)e^{3x}$, ne convient pas. On essaie $y(x) = (ax + b)e^{3x}$, donc $2y' - 5y = 2ae^{3x} + 6(ax + b)e^{3x} - 5(ax + b)e^{3x} = (ax + b + 2a)e^{3x} \neq (x^2 + 4x - 1)e^{3x}$ ne convient pas. On essaie $y(x) = (ax^2 + bx + c)e^{3x}$: on a alors

$$\begin{aligned} 2y' - 5y &= 2(2ax + b)e^{3x} + 2(ax^2 + bx + c)3e^{3x} - 5(ax^2 + bx + c)e^{3x} \\ &= (ax^2 + (4a + b)x + c + 2b)e^{3x} = (x^2 + 4x - 1)e^{3x} \end{aligned}$$

avec $a = 1$, $4a + b = 4$ et $c + 2b = -1$, donc $a = 1$, $b = 0$ et $c = -1$, ce qui donne $\boxed{y(x) = (x^2 - 1)e^{3x}}$.

- $y' + 4y = xe^{-4x}$. On essaie $y(x) = ke^{-4x}$, ce qui donne $y' + 4y = 0 \neq xe^{-4x}$, ne convient pas. On essaie $y(x) = (ax + b)e^{-4x}$, donc $y' + 4y = ae^{-4x} - 4(ax + b)e^{-4x} + 4(ax + b)e^{-4x} = ae^{-4x} \neq xe^{-4x}$ ne convient pas. On essaie $y(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-4x}$: on a alors

$$\begin{aligned} y' + 4y &= (2ax + b)e^{-4x} + (ax^2 + bx + c) \times (-4)e^{-4x} + 4(ax^2 + bx + c)e^{-4x} \\ &= (2ax + b)e^{-4x} = xe^{-4x} \end{aligned}$$

avec $2a = 1$ et $b = 0$, donc $y(x) = (x^2/2 + c)e^{-4x}$ sans contrainte sur c . On

prend $c = 0$ pour avoir la solution plus simple $\boxed{y(x) = \frac{x^2}{2}e^{-4x}}$.

Exercice 4. Déterminez toutes les solutions de

- $y' + y = 2e^x$;
- $y' - y = e^x$;
- $2y' - 5y = (x^2 + 4x - 1)e^{3x}$.

Corrigé : on utilise les résolutions de l'exo précédent :

$$y' + y = 2e^x \Leftrightarrow \text{il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } y(x) = e^x + \lambda e^{-x} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

$$y' - y = e^x \Leftrightarrow \text{il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } y(x) = xe^x + \lambda e^x \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

$$2y' - 5y = (x^2 + 4x - 1)e^{3x} \Leftrightarrow \text{il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } y(x) = (x^2 - 1)e^{3x} + \lambda e^{\frac{5}{3}x} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

Exercice 5. Effectuez la résolution sur $\mathbb{R}$ de

$$\left\{ \begin{array}{l} y' + y = 2e^x, \\ y(0) = 3 \end{array} \right\} ; \left\{ \begin{array}{l} 2y' + xy = x^2 + x + 2, \\ y(2) = 0 \end{array} \right\} ; \left\{ \begin{array}{l} 2y' - 5y = (x^2 + 4x - 1)e^{3x}, \\ y(1) = 3 \end{array} \right\}$$

Corrigé : on reprend les résultats précédents :

$$y' + y = 2e^x \Leftrightarrow \text{il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } y(x) = e^x + \lambda e^{-x} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

Avec la condition $y(0) = 3$, on a donc $3 = y(0) = e^0 + \lambda e^{-0} = 1 + \lambda$, donc $\lambda = 2$, ce qui donne

$$\boxed{y(x) = e^x + 2e^{-x}}.$$

$2y' + xy = x^2 + x + 2 \Leftrightarrow$ il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y(x) = x + 1 + \lambda e^{-x^2/4}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Avec la condition $y(2) = 0$, on a donc $0 = y(2) = 3 + \lambda e^{-1}$, donc $\lambda = 3e$, ce qui donne

$$y(x) = x + 1 + 3e^{1-x^2/4}.$$

$y' - y = e^x \Leftrightarrow$ il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y(x) = xe^x + \lambda e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Avec la condition $y(2) = 0$, on a donc $0 = y(2) = 2e^2 + \lambda e^2 = (2 + \lambda)e^2$, donc $\lambda = -2$, ce qui donne

$$y(x) = xe^x - 2e^x = (x - 2)e^x.$$

$2y' - 5y = (x^2 + 4x - 1)e^{3x} \Leftrightarrow$ il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y(x) = (x^2 - 1)e^{3x} + \lambda e^{\frac{5}{2}x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Avec la condition $y(1) = 3$, on a donc $3 = y(1) = 0 + \lambda e^{5/2}$, donc $\lambda = 3e^{-5/2}$, ce qui donne

$$y(x) = (x^2 - 1)e^{3x} + 3e^{-5/2}e^{\frac{5}{2}x} = (x^2 - 1)e^{3x} + 3e^{\frac{5}{2}(x-1)}.$$

3. LA MÉTHODE DITE DE "VARIATION DE LA CONSTANTE"

Exercice 6. Résolvez les équations suivantes avec la méthode de variation de la constante

$$y' - y = e^x \ln x; \quad y' + y = 3 \cos 2x - \sin 2x.$$

Corrigé. • $y' - y = e^x \ln x$. On commence par résoudre l'équation homogène $y' - y = 0$, donc $y(x) = \lambda e^x$ pour tout $x > 0$. On pose alors $y(x) = \lambda(x)e^x$, de sorte que

$$y' - y = \lambda' e^x + \lambda e^x - \lambda e^x = \lambda' e^x = e^x \ln x \Rightarrow \lambda' = \ln x$$

et donc $\lambda(x) = x \ln x - x$ convient. Pour la solution générale, on a donc

$$y' - y = e^x \ln x \Leftrightarrow \text{il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } y(x) = e^x(x \ln x - x) + \lambda e^x \text{ pour tout } x > 0$$

• $y' + y = 3 \cos 2x - \sin 2x$. On commence par résoudre l'équation homogène $y' + y = 0$, donc $y(x) = \lambda e^{-x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On pose alors $y(x) = \lambda(x)e^{-x}$, de sorte que

$$y' + y = \lambda' e^{-x} - \lambda e^{-x} - \lambda e^{-x} = \lambda' e^{-x} = 3 \cos 2x - \sin 2x \Rightarrow \lambda' = e^x(3 \cos 2x - \sin 2x)$$

On trouve une primitive par IPP :

$$\begin{aligned} \int_0^x e^t \cos(2t) dt &= \int_0^x (e^t)' \cos(2t) dt = [e^t \cos(2t)]_0^x - \int_0^x e^t (\cos(2t))' dt \\ &= e^x \cos(2x) - 1 + 2 \int_0^x e^t \sin(2t) dt = e^x \cos(2x) - 1 + 2 \int_0^x (e^t)' \sin(2t) dt \\ &= e^x \cos(2x) - 1 + 2 \left([e^t \sin(2t)]_0^x - 2 \int_0^x e^t \cos(2t) dt \right) \\ &= e^x \cos(2x) + 2e^x \sin(2x) - 1 - 4 \int_0^x e^t \cos(2t) dt \end{aligned}$$

et donc

$$5 \int_0^x e^t \cos(2t) dt = e^x \cos(2x) + 2e^x \sin(2x) - 1 \Rightarrow \int_0^x e^t \cos(2t) dt = \frac{e^x \cos(2x) + 2e^x \sin(2x) - 1}{5}$$

Pour l'autre primitive, on reprend le calcul précédent pour avoir directement

$$\int_0^x e^t \sin(2t) dt = \frac{\int_0^x e^t \cos(2t) dt - e^x \cos(2x) + 1}{2}$$

Finalement, à une constante près, on obtient

$$\lambda(x) = 3 \frac{e^x \cos(2x) + 2e^x \sin(2x)}{5} - \frac{e^x \cos(2x) + 2e^x \sin(2x)}{10} + \frac{e^x \cos(2x)}{2} + C$$

et donc une solution particulière est

$$y(x) = \lambda(x)e^{-x} = 3 \frac{\cos(2x) + 2 \sin(2x)}{5} - \frac{\cos(2x) + 2 \sin(2x)}{10} + \frac{\cos(2x)}{2} = \cos(2x) + \sin(2x)$$

Et bien moralité, on serait allé beaucoup plus vite et sans risque d'erreur si on avait cherché une solution sous la forme $x \mapsto A \cos(2x) + B \sin(2x)$... Pour la solution générale, on a donc

$y' + y = 3 \cos 2x - \sin 2x \Leftrightarrow$ il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y(x) = \cos(2x) + \sin(2x) + \lambda e^{-x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
--