

Corrigé du TD12 : Exercices complémentaires sur les équations différentielles

1. PREMIER ORDRE

Déterminez les solutions des ED suivantes :

(1)

$$\left\{ \begin{array}{l} y' + 2xy = 1 + 2x^2 \quad \text{sur } \mathbb{R}, \\ y(0) = 1 \end{array} \right\}$$

Corrigé :

- Equation sans second membre (SSM) : $y' + 2xy = 0 \Rightarrow y(x) = \lambda e^{-\int^x 2t dt} = \lambda e^{-x^2}$
- Sol particulière : on essaie un polynôme. Constant : $y_p(x) = a$, donc $y'_p + 2xy_p = 2ax \neq 1 + 2x^2$. Degré 1 : $y_p(x) = ax + b$, donc $y'_p + 2xy_p = a + 2x(ax + b) = 2ax^2 + 2bx + a = 1 + 2x^2$ lorsque $2a = 2$, $2b = 0$ et $a = 1$, donc $a = 1$ et $b = 0$, puis $y_p(x) = x$
- Solution générale : $y(x) = x + \lambda e^{-x^2}$ (il faut vérifier que ça marche bien).
Condition initiale : $1 = y(0) = 0 + \lambda$ donc $\lambda = 1$ puis

$$y(x) = x + e^{-x^2} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

(2)

$$\left\{ \begin{array}{l} y' - 3y = e^{3x} \quad \text{sur } \mathbb{R}, \\ y(1) = 1 \end{array} \right\}$$

Corrigé :

- Equation SSM : $y' - 3y = 0 \Rightarrow y(x) = \lambda e^{3x}$
- Sol particulière : on essaie un polynôme multiplié par une exponentielle. Constant : $y_p(x) = ae^{3x}$, donc $y' - 3y = 0 \neq e^{3x}$. Degré 1 : $y_p(x) = (ax + b)e^{3x}$, donc $y'_p - 3y_p = ae^{3x} + 3(ax + b)e^{3x} - 3(ax + b)e^{3x} = ae^{3x} = e^{3x}$ lorsque $a = 1$, puis $y_p(x) = xe^{3x}$ convient.
- Solution générale : $y(x) = xe^{3x} + \lambda e^{3x}$ (il faut vérifier que ça marche bien).
Condition initiale : $1 = y(1) = 1 \times e^3 + \lambda e^3$ donc $\lambda = 1/e^3 - 1 = e^{-3} - 1$ puis

$$y(x) = xe^{3x} + (e^{-3} - 1)e^{3x} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

(3)

$$\left\{ (x + \sin x)y' + (1 + \cos x)y = 2x + x \cos x + \sin x \quad \text{sur }]0, +\infty[\right\}$$

Corrigé :

- Equation SSM :

$$\begin{aligned} (x + \sin x)y' + (1 + \cos x)y = 0 &\Rightarrow y' = -\frac{1 + \cos x}{x + \sin x} = -\frac{(x + \sin x)'}{x + \sin x}y \\ \Rightarrow y(x) &= \lambda e^{-\int^x \frac{(t + \sin t)'}{t + \sin t} dt} = \lambda e^{-\ln |x + \sin x|} = \frac{1}{|x + \sin x|} \end{aligned}$$

- Sol particulière : on essaie un polynôme. Constant : $y_p(x) = a$, donc $(x + \sin x)y'_p + (1 + \cos x)y_p = a(1 + \cos x) \neq 2x + x \cos x + \sin x$. Degré 1 : $y_p(x) = ax + b$, donc $(x + \sin x)y'_p + (1 + \cos x)y_p = a(x + \sin x) + (1 + \cos x)(ax + b) = 2ax + b + a \sin x + (ax + b) \cos x = 2x + x \cos x + \sin x$ lorsque $a = 1$ et $b = 0$, puis $y_p(x) = x$ convient.
- Solution générale : $y(x) = x + \frac{\lambda}{|x + \sin x|}$ (il faut vérifier que ça marche bien).

(4)

$$\left\{ \begin{array}{l} y' + y = e^x + e^{2x} \quad \text{sur } \mathbb{R}, \\ y(0) = 0 \end{array} \right\}$$

Corrigé :

- Equation SSM : $y' + y = 0 \Rightarrow y(x) = \lambda e^{-x}$
- Sol particulière : on va séparer le second membre en deux. On va chercher une solution y_1 de $y'_1 + y_1 = e^x$ et une solution y_2 de $y'_2 + y_2 = e^{2x}$.
 - Pour y_1 : on essaie $y_1(x) = ae^x$, ce qui donne $y'_1 + y_1 = 2ae^x = e^x$ avec $a = 1/2$. Donc $y_1(x) = \frac{1}{2}e^x$
 - Pour y_2 : on essaie $y_2(x) = ae^{2x}$, ce qui donne $y'_2 + y_2 = 3ae^{2x} = e^{2x}$ avec $a = 1/3$. Donc $y_2(x) = \frac{1}{3}e^{2x}$
 Une solution particulière du problème est alors $y_p(x) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{3}e^{2x}$
- Solution générale : $y(x) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{3}e^{2x} + \lambda e^{-x}$ (il faut vérifier que ça marche bien). Condition initiale $0 = y(0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \lambda$ donc $\lambda = -\frac{5}{6}$. Ainsi

$$y(x) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{3}e^{2x} - \frac{5}{6}e^{-x} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

(5)

$$\left\{ \begin{array}{l} y' + y = \sin x + \cos x \quad \text{sur } \mathbb{R}, \\ y(\pi) = 0 \end{array} \right\}$$

Corrigé :

- Equation SSM : $y' + y = 0 \Rightarrow y(x) = \lambda e^{-x}$
- Sol particulière. Soit on utilise l'expression de sin et cos sous forme de complexes $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ et $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$, et on se retrouve avec un second membre sous forme d'exponentielles. Soit on essaie $y_p(x) = a \sin x + b \cos x$: il vient alors $y'_p + y_p = (a + b) \cos x + (a - b) \sin x = \sin x + \cos x$ avec $a = 1$ et $b = 0$, donc $y_p(x) = \sin x$ (vérifiez, ça marche bien)
- Solution générale : $y(x) = \sin x + \lambda e^{-x}$. Condition initiale $0 = y(\pi) = \sin \pi + \lambda e^{-\pi} = \lambda e^{-\pi}$ donc $\lambda = 0$. Ainsi

$$y(x) = \sin x \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

(6)

$$\left\{ \begin{array}{l} y' + 3y = 6 \sin(3x) \quad \text{sur } \mathbb{R}, \\ y(0) = 1 \end{array} \right\}$$

Indication : solution particulière sous la forme $y_p(x) = a \cos(3x) + b \sin(3x)$.

- Equation SSM : $y' + 3y = 0 \Rightarrow y(x) = \lambda e^{-3x}$
- Sol particulière. On essaie $y_p(x) = a \cos(3x) + b \sin(3x)$: il vient alors $y'_p + 3y_p = (a + 3b) \cos(3x) + (a - 3b) \sin(3x) = 6 \sin(3x)$ avec $a + 3b = 6$ et $a - 3b = 0$ on a $b = 1$ et $a = 3$, donc $y_p(x) = 3 \cos(3x) + \sin(3x)$ (vérifiez, ça marche bien)
- Solution générale : $y(x) = 3 \cos(3x) + \sin(3x) + \lambda e^{-3x}$. Condition initiale $1 = y(0) = 3 + \lambda$ donc $\lambda = -2$. Ainsi

$$y(x) = 3 \cos(3x) + \sin(3x) - 2e^{-3x} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

2. VARIATION DE LA CONSTANTE

(1)

$$\left\{ y' + 2xy = \frac{e^{-x^2}}{x} \quad \text{sur }]0, +\infty[\right\}$$

Corrigé :

— Equation sans second membre (SSM) : $y' + 2xy = 0 \Rightarrow y(x) = \lambda e^{-\int x^2 dt} = \lambda e^{-x^2}$

— Sol particulière : $y_p(x) = \lambda(x)e^{-x^2}$, donc

$$y'_p + 2xy_p = \lambda' e^{-x^2} + \lambda \times (-2x) \times e^{-x^2} + 2x\lambda e^{-x^2} = \lambda' e^{-x^2} = \frac{e^{-x^2}}{x} \Rightarrow \lambda'(x) = \frac{1}{x}$$

et donc $\lambda(x) = \ln x$ convient, ce qui donne $y_p(x) = e^{-x^2} \ln x$

— Solution générale :

$$y(x) = e^{-x^2} \ln x + \lambda e^{-x^2} \text{ pour tout } x > 0$$

(2)

$$\left\{ y' + 2xy = x e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{sur } \mathbb{R} \right\}$$

Corrigé :

— Equation sans second membre (SSM) : $y' + 2xy = 0 \Rightarrow y(x) = \lambda e^{-\int x^2 dt} = \lambda e^{-x^2}$

— Sol particulière : $y_p(x) = \lambda(x)e^{-x^2}$, donc

$$y'_p + 2xy_p = \lambda' e^{-x^2} = x e^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow \lambda'(x) = x e^{\frac{x^2}{2}} = \left(\frac{x^2}{2} \right)' e^{\frac{x^2}{2}}$$

et donc $\lambda(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$ convient, ce qui donne $y_p(x) = e^{-x^2} e^{\frac{x^2}{2}} = e^{-\frac{x^2}{2}}$

— Solution générale :

$$y(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} + \lambda e^{-x^2} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

(3)

$$\left\{ (\sin x)y' - (\cos x)y = (\sin x)^2 \quad \text{sur }]0, \pi[\right\}$$

Corrigé :

— Equation SSM :

$$(\sin x)y' - (\cos x)y = 0 \Rightarrow y' = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{(\sin x)'}{\sin x} y$$

$$\Rightarrow y(x) = \lambda e^{\int x \frac{(\sin t)'}{\sin t} dt} = \lambda e^{\ln |\sin x|} = \lambda |\sin x| = \lambda \sin x \text{ sur }]0, \pi[$$

— Sol particulière : $y_p(x) = \lambda(x) \sin x$, puis

$$(\sin x)y' - (\cos x)y = (\sin x)(\lambda' \sin x + \lambda \cos x) - (\cos x) \times \lambda \cos x = (\sin x)^2 \lambda' = (\sin x)^2 \Rightarrow \lambda' = 1$$

donc $\lambda(x) = x$ convient, puis $y_p(x) = x \sin x$ convient

— Solution générale :

$$y(x) = x \sin x + \lambda \sin x \text{ pour tout } x \in]0, \pi[$$

3. SECOND ORDRE

Déterminez les solutions des ED suivantes :

(1)

$$\left\{ \begin{array}{l} y'' - y' - 2y = 3e^{-x} \quad \text{sur } \mathbb{R}, \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \end{array} \right\}$$

(2)

$$\left\{ \begin{array}{l} y'' - 3y' + 2y = 6e^{-x} \quad \text{sur } \mathbb{R}, \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 0 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} y'' - 4y' + 3y = 2e^x \quad \text{sur } \mathbb{R}, \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{array} \right\}$$