

Corrigé du Contrôle du 6 octobre
Durée : 2h

Sont interdits : Documents, calculatrices, ordinateurs, téléphones (voire plus, à la discrétion des enseignants).

Les correcteurs seront attentifs au soin et à la qualité de la rédaction

Exercice 1. Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 4z + 13 = 0$. Pensez à vérifier que vos résultats sont bien solutions.

Solution : $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 13 = -36 < 0$, donc deux zéros complexes

$$x_1 := \frac{-4 - i\sqrt{36}}{2} = -2 - 3i \text{ et } x_2 := \frac{-4 + i\sqrt{36}}{2} = -2 + 3i$$

Exercice 2. Mettez les expressions suivantes sous la forme $a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\frac{i+1}{i-2} + i^3$$

$$(1-i)^2 (2i+3)$$

Solution :

$$\frac{i+1}{i-2} + i^3 = \frac{(i+1)(i+2)}{(i-2)(i+2)} - i = \frac{3i+1}{-5} - i = -\frac{1}{5} - \frac{8i}{5}$$

$$(1-i)^2 (2i+3) = (1-2i-1)(-2i+3) = -4-6i.$$

Exercice 3. Ensemble de définition de

$$x \mapsto \sqrt{\frac{x^2-1}{x-3}}$$

Solution : Voyons ce qui impose des restrictions :

- $\frac{***}{x-3}$, donc il faut $x \neq 3$.
- $\sqrt{***}$ donc il faut $\frac{x^2-1}{x-3} \geq 0$.

Etudions le signe sachant que $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$:

	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$x+1$	-	0	+	+	+
$x-1$	-	-	0	+	+
$x-3$	-	-	-	0	+
$\frac{(x+1)(x-1)}{x-3}$	-	0	+	0	+

On a donc $D = [-1, 1] \cup]3, +\infty[$.

Exercice 4. Ensemble de définition et dérivées de

(1) $x \mapsto \sqrt{-x^2 - x + 2}$

Solution : Il faut $-x^2 - x + 2 \geq 0$. Les zéros du trinôme sont 1 et -2. Le coefficient de x^2 étant $-1 < 0$, le trinôme est positif entre les zéros, donc

$D = [-2, 1]$. Pour dériver, il faut $-x^2 - x + 2 > 0$, donc le domaine de dérivation est $D' =]-2, 1[$ et on a

$$f'(x) = \frac{-2x-1}{2\sqrt{-x^2-x+2}} \text{ pour tout } x \in]-2, 1[.$$

- (2) $x \mapsto \frac{x^2+1}{\ln(2+x)}$ *Solution* : Voyons ce qui impose des restrictions :
- $\ln(***)$, donc il faut $2-x > 0$, c'est-à-dire $x < 2$.
 - $\frac{***}{\ln(***)}$, donc il faut $\ln(2-x) \neq 0$, donc $2-x \neq 1$, donc $x \neq 1$.

Finalement, $D =]-\infty, 1[\cup]1, 2[$. La dérivée est

$$f'(x) = \frac{2x \ln(x-2) + \frac{x^2+1}{2-x}}{(\ln(x-2))^2}$$

Exercice 5. Comportement aux points critiques de $x \mapsto x^2 - x - 2 \ln(1+x)$. (On rappelle que les points critiques sont les points auxquels la dérivée s'annule, et qu'il faut alors calculer la dérivée seconde pour obtenir des informations sur le comportement.)

Solution : Ensemble de définition $] -1, +\infty[$, idem pour les dérivées. Nommons f cette fonction. On a

$$f'(x) = 2x - 1 - \frac{2}{x+1} \text{ et } f''(x) = 2 + \frac{2}{(x+1)^2} \text{ pour } x > -1.$$

Ainsi, $f'(x) = 0$ ssi $2x - 1 = \frac{2}{x+1}$ ssi $(2x-1)(x+1) = 2$ ssi $2x^2 + x - 3 = 0$ ssi $x \in \{1, -3/2\}$ ssi $x = 1$ car il faut $x > -1$. On a de plus $f''(1) > 0$, donc 1 est l'unique point critique et $f(1) = -2 \ln 2$ est un minimum local strict.

Exercice 6. En utilisant une fonction dont vous étudierez les variations, montrez que $e^x \geq x + 1$ pour tout $x \geq 0$.

Solution : On pose $f(x) := e^x - x - 1$ pour $x \in \mathbb{R}$. Elle est dérivable et $f'(x) = e^x - 1 \geq 0$ pour $x \geq 0$. Donc f est croissante sur $[0, +\infty[$ et $e^x - x - 1 = f(x) \geq f(0) = 0$ pour tout $x \geq 0$.

Exercice 7. Domaine de définition, tableau de variation (on ne demande PAS les limites) et graphe approximatif des fonctions suivantes :

- (1) $f : x \mapsto e^{-x}$
- (2) $g : x \mapsto \ln(x^3 - 3x)$
- (3) $h : x \mapsto 2x^3 - 5x^2 - 4x - 1$

Solution : (1) $f : x \mapsto e^{-x}$. Le domaine est $D_f := \mathbb{R}$. La fonction f est dérivable et $f'(x) = -e^{-x} < 0$ pour $x \in \mathbb{R}$. Ainsi

	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	-	
f	$+\infty$	0

(2) $g : x \mapsto \ln(x^3 - 3x)$. Il faut $x^3 - 3x = x(x^2 - 3) = x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) > 0$, donc,

	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$
x	-	-	0	+	+
$x - \sqrt{3}$	-	-	-	0	+
$x + \sqrt{3}$	-	0	+	+	+
$x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$	-	0	+	0	-

Donc $D_g =]-\sqrt{3}, 0[\cup]\sqrt{3}, +\infty[$. La fonction g est dérivable sur D_g et $g'(x) = \frac{3(x^2-1)}{x^3-3x}$ pour $x \in D_g$. Ainsi $g' < 0$ sur $] -1, 1[\cap D_g$ et $g' > 0$ sur $] -\infty, -1[\cup]1, +\infty[$. On en déduit le tableau de variations

	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$g'(x)$	XXX		+	0	-		XXX
g	XXX		ln 2		XXX	XXX	
	XXX		$\nearrow$	$\searrow$		XXX	XXX
	XXX		$-\infty$	$-\infty$		XXX	XXX

(3) $h : x \mapsto 2x^3 - 5x^2 - 4x - 1$. L'ensemble de définition est $D_h = \mathbb{R}$. **Sens de variations.** La fonction h est dérivable et $h'(x) = 6x^2 - 10x - 4$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -1/3$. Le coefficient du trinôme étant $6 > 0$, on a le signe

$$\{h'(x) > 0 \Leftrightarrow x \notin]-1/3, 2]\} \text{ et } \{h'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-1/3, 2]\}$$

On a $h(2) = -13$ et $h(-1/3) = -8/27$. On en déduit le tableau de variations :

	$-\infty$	$-1/3$	2	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	-	0
h		$-8/27$		$+\infty$
	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
			-13	

Exercice 8. Tracez le graphe de la fonction

$$x \mapsto |x - 2| - x^2$$

Solution : Lorsque $x \geq 2$, on a $f(x) = x - 2 - x^2$, donc $f'(x) = 1 - 2x \leq 1 - 2 \times 2 = -3 < 0$, donc f est décroissante sur $[2, +\infty[$. Lorsque $x < 2$, on a $f(x) = 2 - x - x^2$, donc $f'(x) = -1 - 2x$: ainsi $f'(x) > 0$ pour $x < -1/2$ et $f'(x) < 0$ pour $-1/2 < x < 2$. On en déduit le tableau de variations suivant :

	$-\infty$	$-1/2$	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	
g		$5/4$		-
	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$
			-4	$-\infty$

Exercice 9. Résolvez l'équation différentielle

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} y' = -2y \quad \text{sur } \mathbb{R}, \\ y(1) = 3 \end{array} \right\}$$

Solution : $y(x) = \lambda e^{-2x}$, puis $3 = y(1) = \lambda e^{-2}$ donc $\lambda = 3e^2$ et donc

$$y(x) = 3e^{2-2x} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

FIN