

Corrigé du Contrôle du 19 novembre

Durée : 2h

Sont interdits : Documents, calculatrices, ordinateurs, téléphones (voire plus, à la discrétion des enseignants).

Les correcteurs seront attentifs au soin et à la qualité de la rédaction

Exercice 1. Résolvez les systèmes suivants s'ils ont une solution :

$$1. \begin{cases} 4x + 3y = 16 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases} \quad , \quad 2. \begin{cases} 6x - 2y = 7 \\ 15x - 5y = -3 \end{cases}$$

Solution : 1. $3 \times L_1 - 4L_2 \Rightarrow 12x + 9y - (12x + 16y) = 3 \times 16 - 4 \times 5$
donc $-7y = 28$ donc $y = -4$, puis $4x = 16 - 3y = 28$ donc $x = 7$.
Finalement $\boxed{(x, y) = (7, -4)}$.

2. $5 \times L_1 - 2L_2 \Rightarrow 0 = 30x - 10y - (30x - 10y) = 5 \times 7 + 3 \times 2$ ce qui est absurde. Finalement $\boxed{\text{Pas de solution}}$.

Exercice 2. L'équation du mouvement linéaire d'un corps solide de masse $m > 0$ fixé à un ressort de caractéristique $k > 0$ et un terme d'amortissement $\lambda > 0$ est

$$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = 0.$$

Résolvez cette équation (il y a 3 cas distincts). Dans le cas de deux racines distinctes, on calculera leur produit pour trouver leur signe. Quelle est la limite $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$?

Solution : Equation caractéristique $mr^2 + \lambda r + k = 0$, $\Delta = \lambda^2 - 4mk$. On distingue donc 3 cas :

- (1) $\Delta > 0$, c'est-à-dire $\lambda > 2\sqrt{km}$ (fort amortissement), on a 2 racines distinctes

$$r_1 := \frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4km}}{2m} \quad \text{et} \quad r_2 := \frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4km}}{2m}.$$

On a donc $\boxed{x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}}$. Un calcul rapide donne $r_1 r_2 = \frac{k}{m} > 0$ or $r_1 < 0$, donc $r_2 < 0$ et donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$. L'objet s'immobilise rapidement.

- (2) $\Delta = 0$, c'est-à-dire $\lambda = 2\sqrt{Lkm}$ (amortissement critique, ça n'arrive jamais), on a 1 racine double $r_1 = -\lambda/2m$ et donc $\boxed{x(t) = (At + B)e^{r_1 t}}$, or $r_1 < 0$ et donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ par croissance comparée. Immobilisation rapide, sans oscillation, même faible.

- (3) $\Delta < 0$, c'est-à-dire $\lambda < 2\sqrt{km}$ (faible amortissement), on a 2 racines complexes distinctes

$$r_1 := \frac{-\lambda - i\sqrt{4mk - \lambda^2}}{2m} \quad \text{et} \quad r_2 := \frac{-\lambda + i\sqrt{4mk - \lambda^2}}{2m}.$$

On a donc

$$x(t) = e^{-\frac{\lambda}{2m}t}(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t))$$

avec $\omega = \frac{\sqrt{4mk-\lambda^2}}{2m}$. Or $-\lambda/2m < 0$ et donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ (produit d'une fonction bornée par une fonction qui tend vers 0). Oscillations mais immobilisation quand même.

Exercice 3. Déterminez les limites suivantes.

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} \quad , \quad 2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-x^2}{34-18 \sin x} \quad , \quad 3. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+1})-2}{x^2-2x-3}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+x^3-2}{x+x^2+e^{-x}} \quad , \quad 5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x+x^2+\sin x}{e^x+e^{3x}+x^4}$$

6. Limites aux bornes de l'ensemble de définition de

$$x \mapsto \frac{x-2}{x^2(x-1)}.$$

Solution.1. On pose $f(x) = \ln x$ pour $x > 0$, de sorte que $f(1) = 0$ et $f'(x) = 1/x$. Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) = 1.$$

2. On a $16 = 34 - 18 \leq 34 - 18 \sin x \leq 34 + 18 = 52$, donc $\frac{1}{52} \leq \frac{1}{34-18 \sin x} \leq \frac{1}{16}$. Pour $x > 1$, on a $x^2 - x < 0$, donc

$$\frac{-x^2(1-1/x)}{52} = \frac{x-x^2}{52} \geq \frac{1}{34-18 \sin x} \geq \frac{x-x^2}{16}$$

Le terme de gauche tend vers $-\infty$, donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-x^2}{34-18 \sin x} = -\infty.$$

3. Quantité conjuguée

$$\frac{(\sqrt{x+1})-2}{x^2-2x-3} = \frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x^2-2x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \frac{x+1-2^2}{(x+1)(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+1}+2)}$$

et donc

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+1})-2}{x^2-2x-3} = \frac{1}{16}$$

4. Au numérateur, x^3 domine, au dénominateur, c'est x^2 (ici, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$). Donc

$$\frac{x+x^3-2}{x+x^2+e^{-x}} = \frac{x^3(\frac{1}{x^2}+1-\frac{2}{x^3})}{x^2(\frac{1}{x}+1+e^{-x} \times \frac{1}{x^2})} = x \frac{\frac{1}{x^2}+1-\frac{2}{x^3}}{\frac{1}{x}+1+e^{-x} \times \frac{1}{x^2}}$$

Or $x \rightarrow +\infty$, le dénominateur et le numérateur tendent vers $1 > 0$, donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + x^3 - 2}{x + x^2 + e^{-x}} = +\infty$$

5. Au numérateur, e^x domine, au dénominateur, c'est e^{3x} . On a donc

$$\frac{e^x + x^2 + \sin x}{e^x + e^{3x} + x^4} = \frac{e^x(1 + \frac{x^2}{e^x} + \frac{\sin x}{e^x})}{e^{3x}(e^{-2x} + 1 + \frac{x^4}{e^{3x}})} = \frac{1}{e^{-2x}} \cdot \frac{1 + \frac{x^2}{e^x} + \frac{\sin x}{e^x}}{e^{-2x} + 1 + \frac{x^4}{e^{3x}}}$$

Or $x \rightarrow +\infty$, le dénominateur et le numérateur tendent vers $1 > 0$ par croissance comparée, donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x^2 + \sin x}{e^x + e^{3x} + x^4} = 0$$

6. L'ensemble de définition est $D =]-\infty, 0[\cup]0, 1[\cup]1, +\infty[$. Pour les limites en $\pm\infty$, on factorise :

$$\frac{x-2}{x^2(x-1)} = \frac{x(1-\frac{2}{x})}{x^3(1-\frac{1}{x})} = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1-\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}}$$

Le premier terme tend vers 0 quand $x \rightarrow \pm\infty$, le second vers 1, donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{x^2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x^2(x-1)} = 0.$$

Limite en 0. On écrit

$$\frac{x-2}{x^2(x-1)} = \frac{x-2}{x-1} \cdot \frac{1}{x^2}$$

Or $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-2}{x-1} = 2 > 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$. Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-2}{x^2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-2}{x^2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-2}{x^2(x-1)} = +\infty$$

Limite en 1. On écrit

$$\frac{x-2}{x^2(x-1)} = \frac{x-2}{x^2} \cdot \frac{1}{x-1}$$

Or $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{x^2} = -1 < 0$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$. Donc

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-2}{x^2(x-1)} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-2}{x^2(x-1)} = -\infty$$

Exercice 4. Calculez les intégrales suivantes

(1) $\int_0^2 (x^3 + x) dx$ *Solution :*

$$\int_0^2 (x^3 + x) dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 6$$

(2) $\int_0^\pi (t + \sin(2t)) dt$ *Solution :*

$$\boxed{\int_0^\pi (t + \sin(2t)) dt = \left[\frac{t^2}{2} - \frac{\cos(2t)}{2} \right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}}$$

(3) $\int_0^1 e^x \cos(e^x) dx$ *Solution :*

$$\boxed{\int_0^1 e^x \cos(e^x) dx = \int_0^1 (e^x)' \sin'(e^x) dx = [\sin(e^x)]_0^1 = \sin(e) - \sin(1)}$$

(4) $\int_0^x e^{-t} dt$ avec $x \in \mathbb{R}$. *Solution :*

$$\boxed{\int_0^x e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^x = 1 - e^{-x}}$$

(5)

$$\int_\pi^{2\pi} \frac{2x + \cos x}{x^2 + \sin x} dx$$

Solution :

$$\boxed{\int_\pi^{2\pi} \frac{2x + \cos x}{x^2 + \sin x} dx = \int_\pi^{2\pi} \frac{(x^2 + \sin x)'}{x^2 + \sin x} dx = [\ln |x^2 + \sin x|]_\pi^{2\pi} = \ln(4\pi^2) - \ln(\pi^2) = 2 \ln 2}$$

FIN