

CC3 du 12 janvier
Durée : 2h

Sont interdits : Documents, calculatrices, ordinateurs, téléphones (voire plus, à la discrétion des enseignants).

Un formulaire se trouve à la fin du sujet.

Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre que vous voulez.

Les correcteurs seront attentifs au soin et à la qualité de la rédaction

Exercice 1. Calculez les intégrales suivantes

a. $\int_0^1 \frac{t+1}{t+3} dt$

Solution :

$$\int_0^1 \frac{t+1}{t+3} dt = \int_3^4 \frac{s-2}{s} ds = [s - 2 \ln s]_3^4 = \boxed{1 - 2 \ln(4/3)}$$

b. $\int_0^1 \frac{t^2+2}{t^2-t-2} dt$

Solution :

$$\int_0^1 \frac{t^2+2}{t^2-t-2} dt = \int_0^1 \left(1 + \frac{-1}{t+1} + \frac{2}{t-2}\right) dt = [t - \ln|t+1| + 2 \ln|t-2|]_0^1 = \boxed{1 - 3 \ln 2}$$

c. $\int_1^2 \frac{dt}{t^2-2t+4}$

Solution :

$$\int_1^2 \frac{dt}{t^2-2t+4} = \int_1^2 \frac{dt}{(t-1)^2+3} = \int_0^1 \frac{ds}{s^2+3} = \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}dz}{3z^2+3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan(1/\sqrt{3}) = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{18} \pi}$$

Exercice 2. A l'aide d'une intégration par parties, calculez

a. $\int_1^2 x \ln x dx$

Solution :

$$(1) \quad \int_1^2 x \ln x dx = \int_1^2 (x^2/2)' \ln x dx = [(x^2/2) \ln x]_1^2 - \int_1^2 (x^2/2)(\ln x)' dx$$

$$(2) \quad = 2 \ln 2 - \int_1^2 x/2 dx = 2 \ln 2 - [x^2/4]_1^2 = \boxed{2 \ln 2 - 3/4}$$

b. $\int_0^1 e^{2x}(\cos x) dx$ (il faut faire deux IPP)

Solution :

$$(3) \quad \int_0^1 e^{2x} \cos x dx = \int_0^1 e^{2x}(\sin x)' dx = [e^{2x} \sin x]_0^1 - \int_0^1 (e^{2x})' \sin x dx$$

$$(4) \quad = e^2 \sin 1 - 2 \int_0^1 e^{2x} \sin x dx = e^2 \sin 1 - 2 \left(\int_0^1 e^{2x}(-\cos x)' dx \right)$$

$$(5) \quad = e^2 \sin 1 - 2([e^{2x}(-\cos x)]_0^1 - \int_0^1 (e^{2x})'(-\cos x) dx)$$

$$(6) \quad = e^2 \sin 1 - 2(1 - e^2 \cos 1 + 2 \int_0^1 e^{2x} \cos x dx)$$

$$(7) \quad = e^2 \sin 1 - 2(1 - e^2 \cos 1) - 4 \int_0^1 e^{2x} \cos x dx$$

en passant le dernier terme du membre de droite dans le membre de gauche, on obtient

$$\boxed{\int_0^1 e^{2x} \cos x \, dx = \frac{e^2 \sin(1) + 2e^2 \cos(1) - 2}{5}}$$

Exercice 3. A l'aide de changements de variables, calculez

a. $\int_0^\pi (\sin t) e^{2 \cos t} \, dt$

Solution : $x = \cos t$ donne

$$\int_0^\pi (\sin t) e^{2 \cos t} \, dt = \int_1^{-1} -e^{2x} \, dx = \boxed{\frac{e^2 - e^{-2}}{2}}$$

b. $\int_1^9 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \, dx \quad (y = \sqrt{x})$

Solution : le cv proposé donne

$$\int_1^9 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \, dx = \int_1^3 \frac{\ln(y^2)}{y} \times 2y \, dy = 4 \int_1^2 \ln y \, dy = 4[y \ln y - y]_1^2 = \boxed{12 \ln 3 - 8}$$

c. $\int_1^e \frac{(\ln s)^3}{s} \, ds$

Solution : avec $x = \ln s$, on obtient

$$\int_1^e \frac{(\ln s)^3}{s} \, ds = \int_0^1 x^3 \, dx = \boxed{\frac{1}{4}}$$

Exercice 4. On se donne $k \in \mathbb{R}$. En fonction de la valeur de k , résolvez

$$y' - 2y = e^{kx}.$$

Solution : Equation homogène : il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_h(x) = \lambda e^{2x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Solution particulière : on essaie $y_p(x) = \mu e^{kx}$, et donc $y'_p - 2y_p = \mu(k-2)e^{kx} = e^{kx}$ si $\mu(k-2) = 1$. Ainsi, lorsque $k \neq 2$, $\mu = 1/(k-2)$, et donc

$$y_p(x) = \frac{e^{kx}}{k-2} \text{ si } k \neq 2.$$

Pour $k = 2$, ça ne marche pas. On monte donc le degré et on essaie $y_p(x) = axe^{2x}$. On obtient alors $y'_p - 2y_p = ae^{2x} = e^{2x}$ si $a = 1$. et donc

$$y_p(x) = xe^{2x} \text{ si } k = 2.$$

Finalement,

$$\boxed{y(x) = \lambda e^{2x} + \frac{e^{kx}}{k-2} \text{ si } k \neq 2}$$

$$\boxed{y(x) = \lambda e^{2x} + xe^{2x} \text{ si } k = 2}$$

Exercice 5. Résolvez l'équation différentielle suivante en utilisant la méthode de variation de la constante :

$$(\cos x)y' + (\sin x)y = e^{2x}(\cos x)^2 \text{ sur } [0, \pi/2[.$$

Solution : eq homogène : $y_H(x) = \lambda \cos x$.

Solution particulière : $y_p(x) = \lambda(x) \cos x$, ce qui donne $(\cos x)^2 \lambda' = e^{2x}(\cos x)^2$, donc $\lambda' = e^{2x}$, et finalement

$$\boxed{y(x) = \left(\lambda + \frac{e^{2x}}{2} \right) \cos x}$$

Exercice 6. Résolvez les équations suivantes

$$\text{a. } \left\{ \begin{array}{l} y' + 2xy = 2x^2 - 4x + 1 \\ y(2) = 1 \end{array} \right\}, \text{ b. } \left\{ \begin{array}{l} y' + y = \sin x \\ y(0) = 0 \end{array} \right\},$$

pour la dernière, on cherchera une Solution particulière construite à partir de $\sin x$ et $\cos x$

Solution : a. Equation homogène : $y_H(x) = \lambda e^{-\int_0^x 2t dt} = \lambda e^{-x^2}$.

Solution particulière : sous forme de polynôme. Le degré 0 ne marche pas, essayons $y_p(x) = ax + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. On obtient alors

$$y'_p + 2xy_p = 2ax^2 + 2xb + a = 2x^2 - 4x + 1, \text{ donc } a = 1 \text{ et } b = -2$$

ce qui donne $y_p(x) = x - 2$.

Solution générale : $y(x) = x - 2 + \lambda e^{-x^2}$. Avec la condition initiale $y(2) = 1$, on obtient $\lambda = e^4$ puis

$$y(x) = x - 2 + e^{4-x^2}$$

b. Equation homogène : $y_H(x) = \lambda e^{-x}$.

Solution particulière : on essaie $y_p(x) = a \sin x + b \cos x$, de sorte que

$$y'_p + y_p = (a \cos - b \sin) + a \sin + b \cos = (a - b) \sin + (a + b) \cos$$

il faut donc $a - b = 1$ et $a + b = 0$, donc $a = 1/2$ et $b = -1/2$ et donc $y_p(x) = \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x$.

Solution générale : $y(x) = \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x + \lambda e^{-x}$. Avec $y(0) = 0$, il vient $\lambda = \frac{1}{2}$, et donc

$$y(x) = \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} e^{-x}$$

Exercice 7 (Lemme de Gronwall). On se donne une fonction $u \in C^1([0, +\infty[)$ et on suppose que

$$\begin{aligned} u' + u &\leq 0 \text{ sur } [0, +\infty[\\ u(0) &\leq 0 \end{aligned}$$

(1) Donnez le signe de $(e^x u(x))'$.

Solution : $(e^x u(x))' = e^x (u' + u) \leq 0$.

(2) Dédisez-en que $u(x) \leq 0$ pour tout $x \geq 0$.

Solution : $(e^x u(x))' \leq 0$, donc décroissante, donc $e^x u(x) \leq e^0 u(0) = u(0) \leq 0$ pour $x \geq 0$, donc $u(x) \leq 0$ pour $x \geq 0$.

Formulaire : $\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$, $\arctan(1/\sqrt{3}) = \frac{\pi}{6}$, $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.

FIN