

CC3 du 12 janvier
Durée : 2h

Sont interdits : Documents, calculatrices, ordinateurs, téléphones (voire plus, à la discrétion des enseignants).

Un formulaire se trouve à la fin du sujet.

Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre que vous voulez.

Les correcteurs seront attentifs au soin et à la qualité de la rédaction

Exercice 1. Calculez les intégrales suivantes

a. $\int_0^1 \frac{t+1}{t+3} dt$

b. $\int_0^1 \frac{t^2+2}{t^2-t-2} dt$

c. $\int_1^2 \frac{dt}{t^2-2t+4}$

Exercice 2. Calculez

a. $\int_1^2 x \ln x dx$

Indication : on pourra par exemple effectuer une IPP.

b. $\int_0^1 e^{2x}(\cos x) dx.$

Indication : on pourra par exemple effectuer deux IPP. Ou bien prendre une autre méthode.

Exercice 3. A l'aide par exemple de changements de variables (mais ce n'est pas obligatoire), calculez

a. $\int_0^\pi (\sin t)e^{2\cos t} dt$

b. $\int_1^9 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx \ (y = \sqrt{x})$

c. $\int_1^e \frac{(\ln s)^3}{s} ds$

Exercice 4. On se donne $k \in \mathbb{R}$. En fonction de la valeur de k , résolvez

$$y' - 2y = e^{kx}.$$

Exercice 5. Résolvez l'équation différentielle suivante en utilisant la méthode de variation de la constante :

$$(\cos x)y' + (\sin x)y = e^{2x}(\cos x)^2 \text{ sur } [0, \pi/2[.$$

Exercice 6. Résolvez les équations suivantes

$$\text{a. } \left\{ \begin{array}{l} y' + 2xy = 2x^2 - 4x + 1 \\ y(2) = 1 \end{array} \right\}, \quad \text{b. } \left\{ \begin{array}{l} y' + y = \sin x \\ y(0) = 0 \end{array} \right\}.$$

Pour la dernière, on pourra chercher une solution particulière construite à partir de $\sin x$ et $\cos x$

Exercice 7 (Lemme de Gronwall). On se donne une fonction $u \in C^1([0, +\infty[)$ et on suppose que

$$\begin{aligned} u' + u &\leq 0 \text{ sur } [0, +\infty[\\ u(0) &\leq 0 \end{aligned}$$

(1) Donnez le signe de $(e^x u(x))'$.

(2) Déduez-en que $u(x) \leq 0$ pour tout $x \geq 0$.

Formulaire : $\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$, $\arctan(1/\sqrt{3}) = \frac{\pi}{6}$, $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.

FIN