

Examen du 28 novembre (CC2)

Les exercices peuvent être traités dans l'ordre que vous voulez

Exercice 1. Déterminez la limite si elle existe :

(1)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 3} - x$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 + x^2 \sin x + 1$$

(3)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 4x^2 + x^3 + 1}{x^2 + x + 7}$$

(4)

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos(2x) + \sin x}{x - \frac{\pi}{2}}$$

Exercice 2. Déterminez les limites aux bornes de l'ensemble de définition (incluant éventuellement l'infini) de

$$x \mapsto \frac{x^2 - 7x - 8}{\sqrt{x+1} - 3}.$$

On pourra penser à la quantité conjuguée.

Exercice 3. Donnez l'ensemble de définition, l'ensemble de dérivabilité et la dérivée de chacune des fonctions suivantes (on ne demande pas de simplification des expressions des dérivées)

(1) $x \mapsto \frac{\ln(\sin x)}{e^{2x} + 2}$

(2) $x \mapsto \sin(\cos(x))$

Calculez la dérivée seconde de la 3ème fonction ci-dessus

Exercice 4. Dans chacun des cas suivants, tracez le graphe et déterminez, s'ils existent, le minimum global, le maximum global, et les minima et maxima locaux.

(1) $f(x) = x^2 - 4x - 3$ sur $\mathbb{R}$ et sur $[0, 1]$.

(2) $f(x) = e^x - x + 2$ sur $[0, 2]$.

(3) $f(x) = 3|x+1| - |x-3|$ sur $[-2, 4]$.

Exercice 5. Déterminez les points critiques de la fonction suivante :

$$x \mapsto -x^3 + 10x^2 + 7x + 1.$$

Pour chacun de ces points, déterminez s'il s'agit d'un minimum ou maximum local strict.

Exercice 6. Montrez que $e^x \geq x + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 7. On se donne $p \in \mathbb{N}$ et $a > 0$. On va prouver ici le résultat suivant énoncé en cours (et largement utilisé en TD et devoir) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^p}{e^{ax}} = 0. \quad (\star)$$

- (1) Dressez le tableau de variations de la fonction $x \mapsto g(x) := x^p e^{-\frac{a}{2}x}$ pour $x \geq 0$. On ne demande PAS les limites.
- (2) Montrez qu'il existe $C > 0$ tel que $x^p e^{-\frac{a}{2}x} \leq C$ pour tout $x \geq 0$.
- (3) En utilisant la question (2) et le résultat de l'exercice 6, montrez qu'il existe $D > 0$ tel que

$$x^p e^{-ax} \leq \frac{D}{x} \text{ pour tout } x > 0.$$

- (4) Déduisez-en la limite $(\star)$.

Formulaire : Carrés des entiers de 10 à 24.

$$10^2 = 100; 11^2 = 121; 12^2 = 144; 13^2 = 169; 14^2 = 196$$

$$15^2 = 225; 16^2 = 256; 17^2 = 289; 18^2 = 324; 19^2 = 361$$

$$20^2 = 400; 21^2 = 441; 22^2 = 484; 23^2 = 529; 24^2 = 576$$

FIN