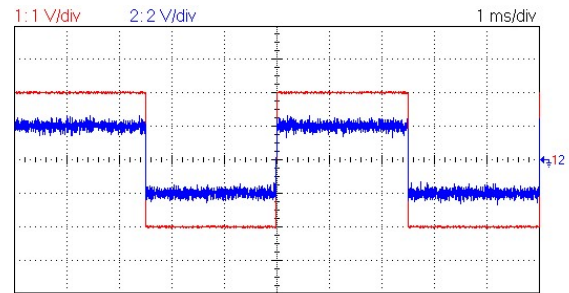


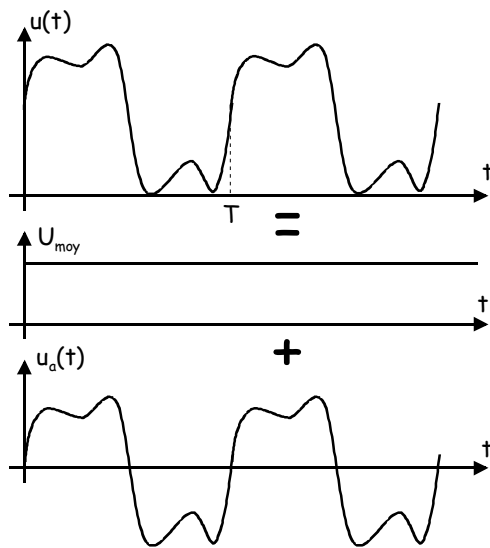
Objectifs :

- Rappeler les propriétés du signal.
- Définir la notion de filtrage du signal ainsi que les grandeurs associées
- Étudier quelques montages analogiques permettant de filtrer un signal et en vérifier les caractéristiques.
- Synthétiser quelques filtres à l'aide d'un logiciel de CAO.
- Appliquer à des signaux dans le cadre de l'électronique biomédicale.



I. Les signaux périodiques :

A. Propriétés :



1. Définitions :

Un signal est défini par $u(t)=u(nT+t)$. On peut décomposer un signal périodique en une somme d'une composante continue (valeur moyenne) plus une composante alternative :

$$u(t)=U_{\text{moy}}+u_a(t)$$

2. Valeur moyenne :

On rappelle que la valeur moyenne d'un signal périodique correspond à l'aire du signal défini sur la période T divisée par la période. Ce qui se traduit par l'expression :

$$U_{\text{moy}} = \frac{A_{u(t)}}{T} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t) dt.$$

Rem1 : La valeur moyenne d'un signal alternative est nul : $\overline{u_a(t)} = 0$.

Rem2 : $\overline{u_1 + u_2} = \overline{u_1} + \overline{u_2}$; $\overline{au_1} = a\overline{u_1}$; $\overline{u_1 \cdot u_2} \neq \overline{u_1} \cdot \overline{u_2}$

3. Valeur efficace :

On rappelle que la valeur efficace d'un signal périodique correspond à l'aire du signal au carré défini sur la période T divisée par la période. Ce qui se traduit par l'expression :

$$U^2 = \frac{A_{u(t)^2}}{T} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t)^2 dt.$$

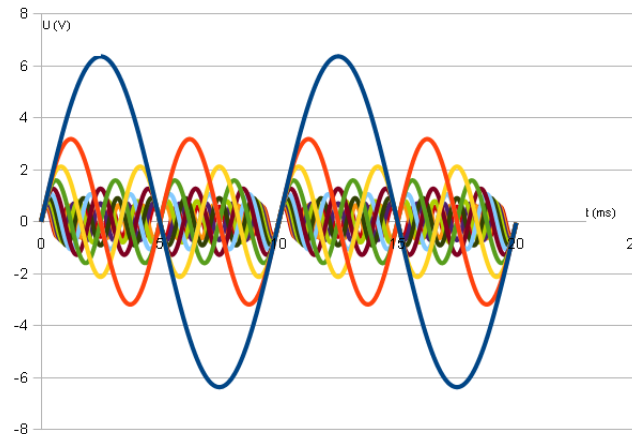
Rem : Comme $u(t)=U_{\text{moy}}+u_a(t)$ alors $u(t)^2=U_{\text{moy}}^2+2U_{\text{moy}}u_a(t)+u_a(t)^2$, alors la valeur moyenne de $u(t)^2$ s'écrit : $\overline{u(t)^2} = \overline{U_{\text{moy}}^2} + 2U_{\text{moy}}\overline{u_a(t)} + \overline{u_a(t)^2} = U_{\text{moy}}^2 + 2U_{\text{moy}}\overline{u_a(t)} + U_a^2$ avec U_a la valeur efficace de la composante alternative. Donc comme $\overline{u_a(t)}=0$, alors la valeur efficace U du signal $u(t)$ est donnée par la relation :

$$U^2 = U_{\text{moy}}^2 + U_a^2.$$

B. Décomposition en série de Fourier :

On sait que n'importe quel signal $u(t)$ périodique de fréquence f_0 est constitué d'une somme d'harmoniques sinusoïdaux de fréquence $f_0, 2f_0, 3f_0, \dots, n f_0$ plus éventuellement une composante continue. Ce qui donne l'expression suivante :

$$u(t) = U_{\text{moy}} + \hat{U}_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) + \hat{U}_2 \cos(2\omega_0 t + \varphi_2) + \hat{U}_3 \cos(3\omega_0 t + \varphi_3) + \dots \hat{U}_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n).$$



1. La série de Fourier :

Pour déterminer les amplitudes et phases des composantes sinusoïdales à partir de la forme d'onde du signal, on utilise pour cela un outil mathématique : la série de Fourier.

On donne $u(t) = U_{\text{moy}} + \sum_{n=1}^{+\infty} [A_n \cos(n\omega_0 t) + B_n \sin(n\omega_0 t)]$ avec $A_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t) \cos(n\omega_0 t) dt$ et

$$B_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t) \sin(n\omega_0 t) dt. \text{ Et aussi } u(t) = U_{\text{moy}} + \sum_{n=0}^{\infty} \hat{U}_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) \text{ avec } \hat{U}_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$$

$$\text{et } \varphi_n = \text{TAN}^{-1} \left[\frac{B_n}{A_n} \right].$$

Pour connaître les caractéristiques des harmoniques (amplitude et phase) il faut déterminer A_n et B_n . On peut alors donner une représentation spectrale du signal (amplitude en fonction de la fréquence). Le terme de fréquence f_0 est le « fondamental », le terme de fréquence $2f_0$ est l'harmonique de rang 2, etc...

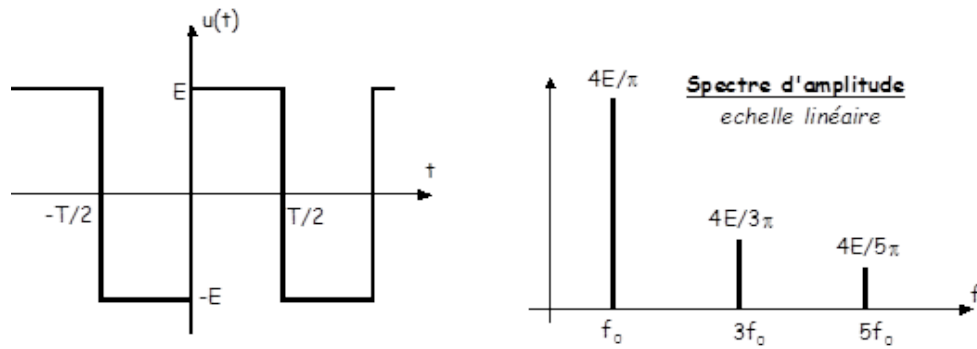
2. Cas des signaux périodiques usuels :

La décomposition en série de Fourier d'un signal carré se réduit aux coefficients impairs B_n .

$$B_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} E \sin n\omega_0 t dt = \frac{2E}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)) \text{ (pas d'harmonique pair)}$$

$$\text{Le signal } u(t) \text{ s'écrit donc : } u(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4E}{(2n-1)\pi} \sin((2n-1)\omega_0 t) = \frac{4E}{\pi} \left[\sin \omega_0 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_0 t + \dots \right]$$

et sa représentation spectrale est donnée ci-dessous.

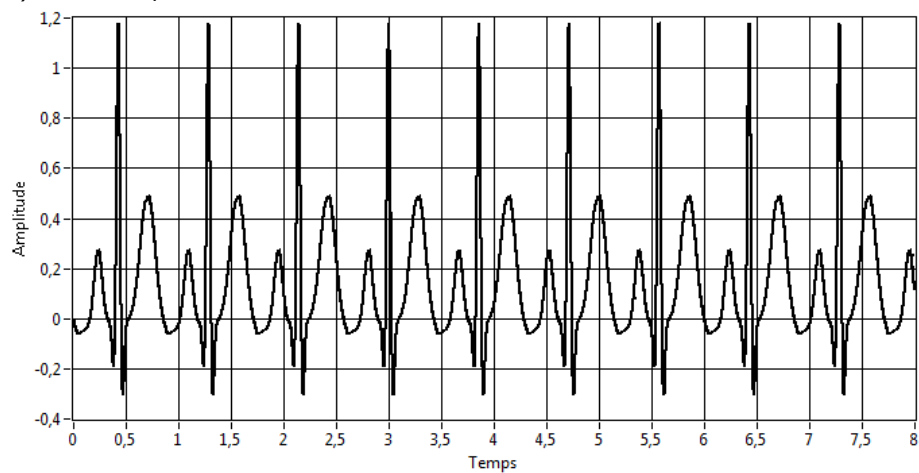


Allure temporelle et allure fréquentielle

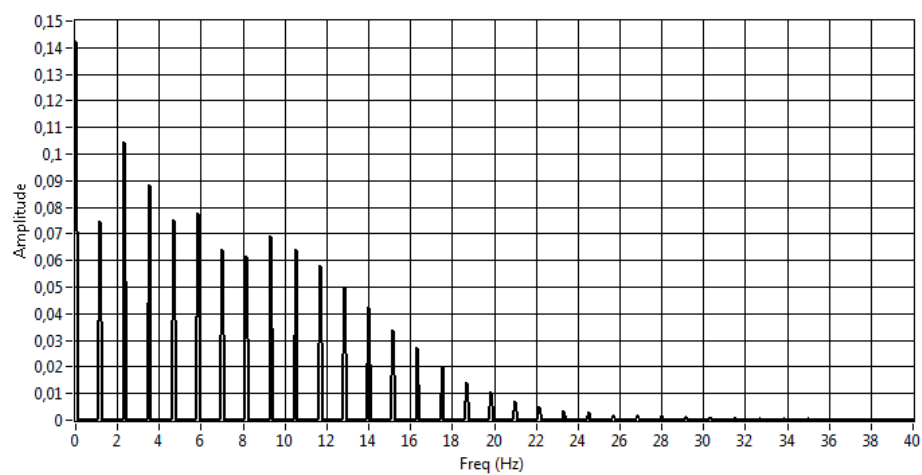
C. Spectre d'un signal ECG :

1. Le signal ECG idéal :

a) Allure temporelle :

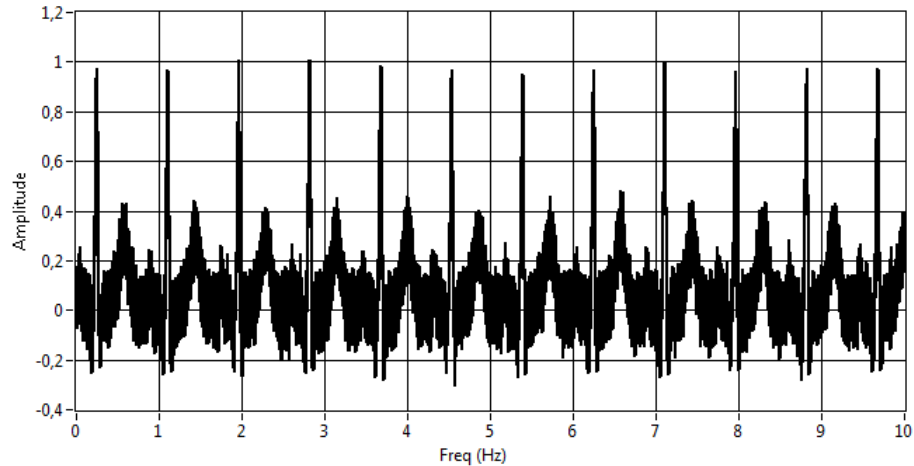


b) Allure fréquentielle :

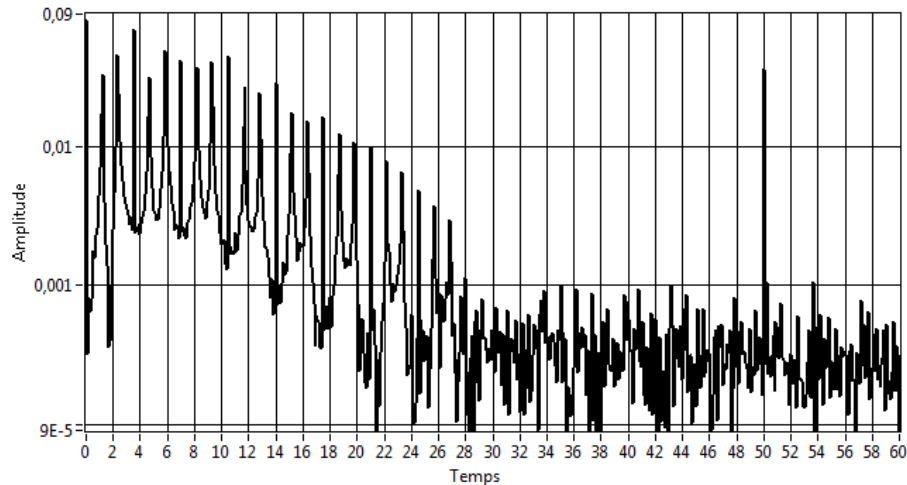


2. Le signal ECG bruité :

a) Allure temporelle :



b) Allure fréquentielle :



II. Le Filtrage :

A. Principe :

Le filtrage est une forme de traitement de signal, obtenu en envoyant le signal à travers un ensemble de circuits électroniques pour :

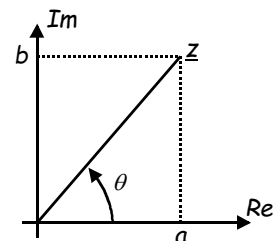
- modifier son spectre de fréquence et donc sa forme
- modifier sa phase et donc sa forme
- extraire une partie de l'information liée à ce signal
- éliminer ou affaiblir des fréquences parasites indésirables
- isoler dans un signal complexe la ou les bandes de fréquence utiles

B. Utilisations des complexes en électricité :

1. Les nombres complexes :

a) Définitions :

- **Notation cartésienne** : $z = a + jb$, avec $\tan(\theta) = \frac{b}{a}$ et $z = \sqrt{a^2 + b^2}$ avec θ et z respectivement l'argument et le module du nombre complexe z .



- **Notation trigonométrique** (coordonnées polaires) : $\underline{z} = [z ; \theta]$ ou encore $\underline{z} = z \left(\frac{a}{z} + j \frac{b}{z} \right) = z(\cos \theta + j \sin \theta)$

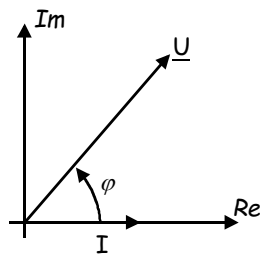
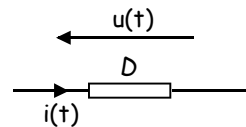
- **Notation exponentielle** : $\underline{z} = z.e^{j\theta}$ avec $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$ et $\cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$; $\sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$.

b) Opérations :

- **Addition et soustraction** : Soit deux nombres complexes : $\underline{z}_1 = a_1 + jb_1$ et $\underline{z}_2 = a_2 + jb_2$. On obtient alors pour la somme $\underline{z}_1 + \underline{z}_2 = a_1 + a_2 + j(b_1 + b_2)$ et $\underline{z}_1 - \underline{z}_2 = a_1 - a_2 + j(b_1 - b_2)$ pour la différence.
- **Multiplication et division** : Soit deux nombres complexes : $\underline{z}_1 = z_1 e^{j\theta_1}$ et $\underline{z}_2 = z_2 e^{j\theta_2}$. On obtient pour la multiplication $\underline{z}_1 \underline{z}_2 = z_1 z_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$ et $\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = \frac{z_1}{z_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$.
- **Puissance et racine** : Soit un nombre complexe $\underline{z} = z.e^{j\theta}$. Alors $(\underline{z})^n$ devient $(\underline{z})^n = z^n e^{jn\theta}$ et $\sqrt[n]{\underline{z}} = \sqrt[n]{z}.e^{j\frac{\theta}{n}}$.
- **Dérivation** : La dérivée de $\underline{z} = z.e^{j\omega t}$ donne $\frac{d\underline{z}}{dt} = j\omega.z.e^{j\omega t}$.
- **Intégration** : L'intégrale de $\underline{z} = z.e^{j\omega t}$ donne $\int \underline{z} dt = \int z e^{j\omega t} dt = z \left[\frac{e^{j\omega t}}{j\omega} \right]$.

2. Loi d'Ohm en régime harmonique:

Le dipôle linéaire ci-contre est parcouru par un courant sinusoïdal $i(t) = I\sqrt{2}\sin\omega t$ et a donc une tension à ses bornes $u(t) = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi)$. En prenant le courant $i(t)$ comme origine de phase, on obtient le schéma de Fresnel ci-contre.



On associe à la grandeur instantanée $i(t)$, le nombre complexe : $\underline{I} = I.e^{j(\omega t)}$ et pour $u(t)$: $\underline{U} = U.e^{j(\omega t + \varphi)}$.

L'impédance est définie à partir de la relation : $\underline{U} = \underline{Z}.\underline{I}$. Ou encore :

$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U e^{j(\omega t + \varphi)}}{I e^{j(\omega t)}} = \frac{U}{I} e^{j\varphi}$. L'impédance est donc un nombre complexe de module $\frac{U}{I}$ (en ohms) et d'argument φ (Déphasage de $u(t)$ par rapport à $i(t)$ noté aussi $\varphi_{u/i}$ en radian).

L'admittance se définit comme l'inverse de l'impédance : $\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{I}{U} e^{-j\varphi}$ de module $\frac{I}{U}$ (en Siemens) et d'argument $-\varphi = \varphi_{i/u}$.

Rem1 : Lorsque l'on associe en série des dipôles linéaires, l'impédance équivalente de l'ensemble correspond à la somme des impédances des dipôles élémentaires.

Rem2 : Lorsque l'on associe en parallèle des dipôles linéaires, l'admittance équivalente de l'ensemble correspond à la somme des admittances des dipôles élémentaires.

3. Les dipôles passifs élémentaires:

a) Dipôles résistifs :

Dans le cas des dipôles résistifs, la loi d'Ohm aux bornes du dipôle donne : $\underline{U}_R = \underline{Z}_R \underline{I}$ avec $\underline{Z}_R = R$ la résistance (en ohms) nombre réel. Par conséquent $u_R(t)$ et $i(t)$ sont en phase.

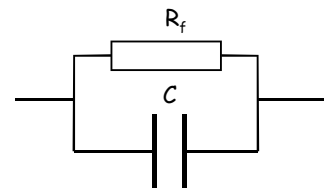
b) Dipôles capacitifs :

On rappelle les relations $i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_C}{dt}$. En prenant pour $u_C(t)$ le nombre complexe associé : $\underline{U}_C = U_C e^{j(\omega t + \varphi)}$, on obtient par dérivation $\underline{I} = C \frac{d\underline{U}_C}{dt} = jC\omega \underline{U}_C e^{j(\omega t + \varphi)} = jC\omega \underline{U}_C$. Ce qui donne l'admittance du dipôle :

$$\underline{Y}_C = \frac{\underline{I}}{\underline{U}_C} = jC\omega = C\omega e^{j\frac{\pi}{2}} \text{ et son impédance : } \underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega} = \frac{1}{C\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}}.$$

Ces relations permettent de vérifier que le déphasage de la tension par rapport au courant est de $-\pi/2$ (quadrature retard).

Pour simplifier, on modélise le condensateur par un circuit ouvert en basse fréquence ($\underline{Z}_C = \frac{1}{C\omega} = +\infty$ pour $f \rightarrow 0$) et un fil en haute fréquence ($\underline{Z}_C = \frac{1}{C\omega} = 0$ pour $f \rightarrow +\infty$). Le modèle réel du condensateur est donné ci-contre. Il est constitué d'un condensateur idéal en parallèle avec une résistance modélisant les courants de fuites:



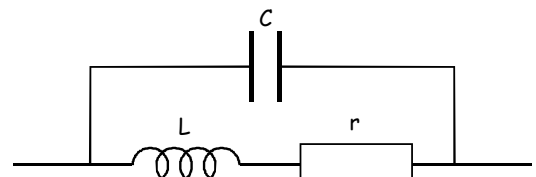
c) Dipôles inductifs :

On rappelle la relation $u_L(t) = L \frac{di}{dt}$. En prenant pour $i(t)$ le nombre complexe associé : $\underline{I} = I e^{j(\omega t)}$, on obtient par dérivation $\underline{U}_L = L \frac{d\underline{I}}{dt} = jL\omega \underline{I} e^{j(\omega t)} = jL\omega \underline{I}$. Ce qui donne l'impédance du

$$\text{dipôle : } \underline{Z}_L = \frac{\underline{U}_L}{\underline{I}} = jL\omega = L\omega e^{j\frac{\pi}{2}} \text{ et son admittance : } \underline{Y}_L = \frac{1}{jL\omega} = \frac{1}{L\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}}.$$

Ces relations permettent de vérifier que le déphasage de la tension par rapport au courant est de $\pi/2$ (quadrature avance).

Pour simplifier, on modélise l'inductance par un fil en basse fréquence ($\underline{Z}_L = L\omega = 0$ pour $f \rightarrow 0$) et un fil en haute fréquence ($\underline{Z}_L = L\omega = +\infty$ pour $f \rightarrow +\infty$). Le modèle réel de la bobine inductive est plus complexe. Il est constitué d'une inductance idéale en série avec une résistance (pertes joules et fer) et d'un condensateur en parallèle (effet capacitif des spires).

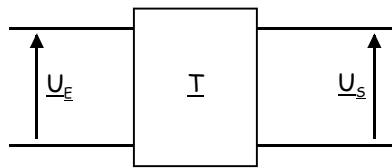


C. Les quadripôles linéaires :

Un filtre se présente sous la forme d'un quadripôle qui modifie (ou filtre) certaines parties d'un signal d'entrée dans le domaine temporelle et dans le domaine fréquentiel. D'après la théorie de Fourier, tout signal réel peut être considéré comme composé d'une somme de signaux sinusoïdaux (en nombre infini si nécessaire) à des fréquences différentes ; le rôle du filtre est de modifier la phase et l'amplitude de ces composantes. Un filtre est caractérisé par sa fonction de transfert. On parle aussi de réponse fréquentielle.

1. Analyse fréquentielle :

La fonction de transfert (transmittance) $T(j)$ détermine le rapport des tensions d'entrée et de sortie.



On considère le quadripôle ci-contre attaqué par une tension sinusoïdale $u_E(t)$. La réponse $u_S(t)$ est aussi de même forme d'onde. Si on associe à l'entrée le nombre complexe $\underline{U}_E = U_E e^{j(\omega t)}$ et $\underline{U}_S = U_S e^{j(\omega t + \varphi)}$ à la sortie, alors on définit la transmittance par le

$$\text{rapport : } \underline{T} = \frac{\underline{U}_S}{\underline{U}_E} = \frac{U_S}{U_E} e^{j\varphi}.$$

Pratiquement, un filtre est caractérisé par deux courbes de réponse, amplitude (gain) / fréquence et phase / fréquence.

Le module (transmittance) représente le rapport des valeurs efficaces $T(\omega) = \frac{U_S}{U_E}$ et l'argument $\varphi(\omega)$ le déphasage de la sortie par rapport à l'entrée. T et φ sont dépendant de la fréquence.

Rem1 : Une transmittance $T > 1$ signifie que le signal de sortie est amplifié ($U_S > U_E$).

Rem2 : Une transmittance $T < 1$ signifie que le signal de sortie est atténué ($U_S < U_E$).

Si la tension d'entrée s'écrit $u_E(t) = U_E \sqrt{2} \sin(\omega_0 t)$, alors la sortie devient $u_S(t) = T(\omega_0) U_E \sqrt{2} \sin(\omega_0 t + \varphi(\omega_0))$. On remarque que l'amplitude de l'entrée est multipliée par la transmittance $T(\omega_0)$ à la fréquence de travail et la phase modifiée par l'argument $\varphi(\omega_0)$.

Par conséquent si le signal d'entrée est de la forme :

$$u_E(t) = E_0 + U_{E1} \sqrt{2} \sin(\omega_0 t) + U_{E2} \sqrt{2} \sin(2\omega_0 t) + U_{E3} \sqrt{2} \sin(3\omega_0 t) \dots$$

Alors la sortie devient :

$$u_S(t) = E_0 \underline{T}(0) + T(\omega_0) U_{E1} \sqrt{2} \sin(\omega_0 t + \varphi(\omega_0)) + T(2\omega_0) U_{E2} \sqrt{2} \sin(2\omega_0 t + \varphi(2\omega_0)) + T(3\omega_0) U_{E3} \sqrt{2} \sin(3\omega_0 t + \varphi(3\omega_0)) \dots$$

2. Analyse temporelle :

L'équation différentielle d'un circuit linéaire peut se mettre sous la forme :

$$a_0 s(t) + a_1 \frac{ds}{dt} + \dots = b_0 e(t) + b_1 \frac{de}{dt} + \dots \text{ La transformée de cette équation devient :}$$

$$a_0 S(p) + a_1 [pS(p) - s(0)] + \dots = b_0 E(p) + b_1 [pE(p) - e(0)] + \dots \text{ ou encore :}$$

$$S(p)[a_0 + pa_1] - a_1 s(0) + \dots = E(p)[b_0 + pb_1] - b_1 e(0) + \dots$$

Si on prend toutes les conditions initiales nulles, alors on définit la transmittance opérationnelle de

Laplace : $T(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_0 + pb_1 + \dots}{a_0 + pa_1 + \dots}$. En posant $p = j\omega$, on retrouve la transmittance complexe :

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{b_0 + j\omega b_1 + \dots}{a_0 + j\omega a_1 + \dots}$$

a) Réponse indicielle :

La réponse d'un système linéaire à un échelon unitaire dont la transformée est $E(p) = \frac{1}{p}$, s'écrit :

$$S(p) = T(p).E(p) = \frac{T(p)}{p} \text{ (en prenant toutes les conditions initiales nulles).}$$

b) Réponse impulsionnelle :

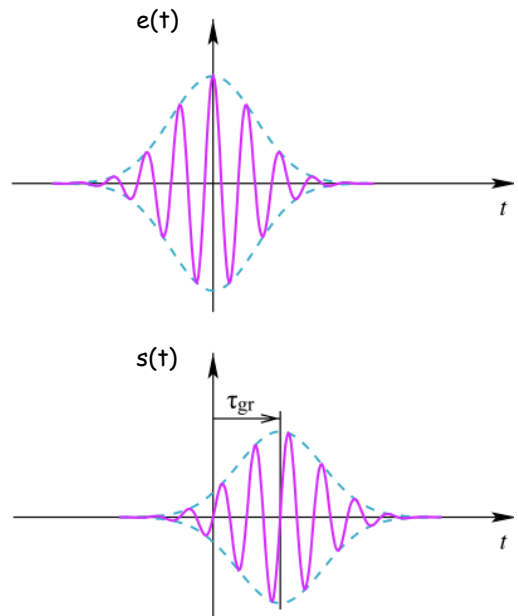
La réponse d'un système linéaire à une impulsion dirac $\delta(t)$ de transformée $\Delta(p)=1$ est :
 $S(p) = T(p).E(p) = T(p)$ (en prenant toutes les conditions initiales nulles).

c) Retard de groupe et retard de phase

Tout système linéaire introduit un retard (ou délai) sur chacune des composantes fréquentielles du signal. La variation de ce retard entraîne une distorsion sur le signal (distorsion de phase) car chaque composante n'est pas retardée de la même façon.

Le temps de propagation de groupe ou retard de groupe est le retard infligé par un filtre, en secondes, de l'enveloppe en amplitude pour un signal à bande étroite. Le retard de phase est le retard (en secondes) de chaque composante fréquentielle calculé à partir de la réponse en phase du filtre.

Rem : Le temps de propagation de groupe dépendent en général de la fréquence, à l'exception d'un filtre à phase linéaire dont le retard de groupe est constant.



D. Type de filtre :

L'objectif du filtrage étant de sélectionner une fréquence ou une bande de fréquence, on distingue donc 4 types de filtre idéal (gabarit) :

1. Filtre passe bas :

Filtre laissant passer les basses fréquences et élimine les hautes fréquences.

2. Filtre passe haut :

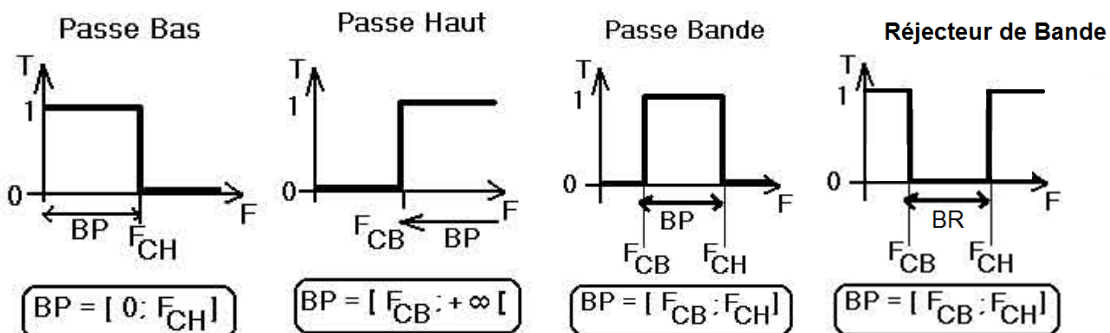
Filtre laissant passer les hautes fréquences et élimine les basses fréquences.

3. Filtre passe bande :

Filtre laissant passer une bande de fréquence et élimine celles en dehors celle-ci.

4. Filtre réjecteur de bande (coupe bande) :

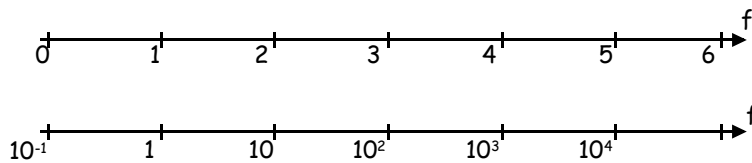
Filtre laissant passer toutes les fréquences sauf une bande de fréquence.



III. Les Diagrammes de Bode :

A. Principe :

1. Echelle linéaire et logarithmique :



• **L'échelle linéaire** accorde le même poids aux basses fréquences et aux hautes fréquences. Ce qui rend difficile une représentation précise de toutes les gammes de fréquences.

- **L'échelle logarithmique** permet une compression des hautes fréquences et une expansion des basses fréquences. On remarque que le zéro n'est pas représenté sur cette échelle.

2. Définitions et unités :

- **Le gain en tension:** On définit le gain en tension comme

$$G_V = 20 \text{Log} \left(\frac{U_S}{U_E} \right). \text{ L'unité est le décibel (dB).}$$

- **Le gain en courant:** On définit le gain en courant comme

$$G_I = 20 \text{Log} \left(\frac{I_S}{I_E} \right). \text{ L'unité est le décibel (dB).}$$

- **Le dBmV ou dBV:** On exprime la tension du signal

$$G_{dBV} = 20 \text{Log} \left(\frac{U_S}{U_{REF}} \right) \quad (U_{REF}=1\text{mV ou } 1\text{V}). \text{ Ex : une tension de}$$

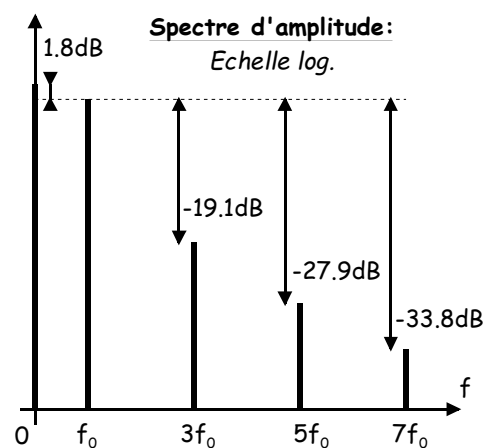
0dBmV correspond à 1mV.

- **Le gain en puissance:** On définit le gain en puissance comme

$$G_P = 10 \text{Log} \left(\frac{P_S}{P_E} \right). \text{ L'unité est le décibel (dB).}$$

- **Le dBm :** On exprime la puissance d'un signal

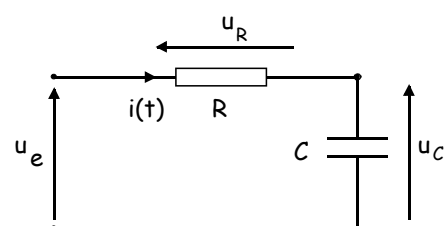
On exprime la puissance du signal $G_{dBm} = 10 \text{Log} \left(\frac{P_S}{P_{REF}} \right)$ ($P_{REF}=1\text{mW}$). Ex : une puissance de 0dBm correspond à 1mW.

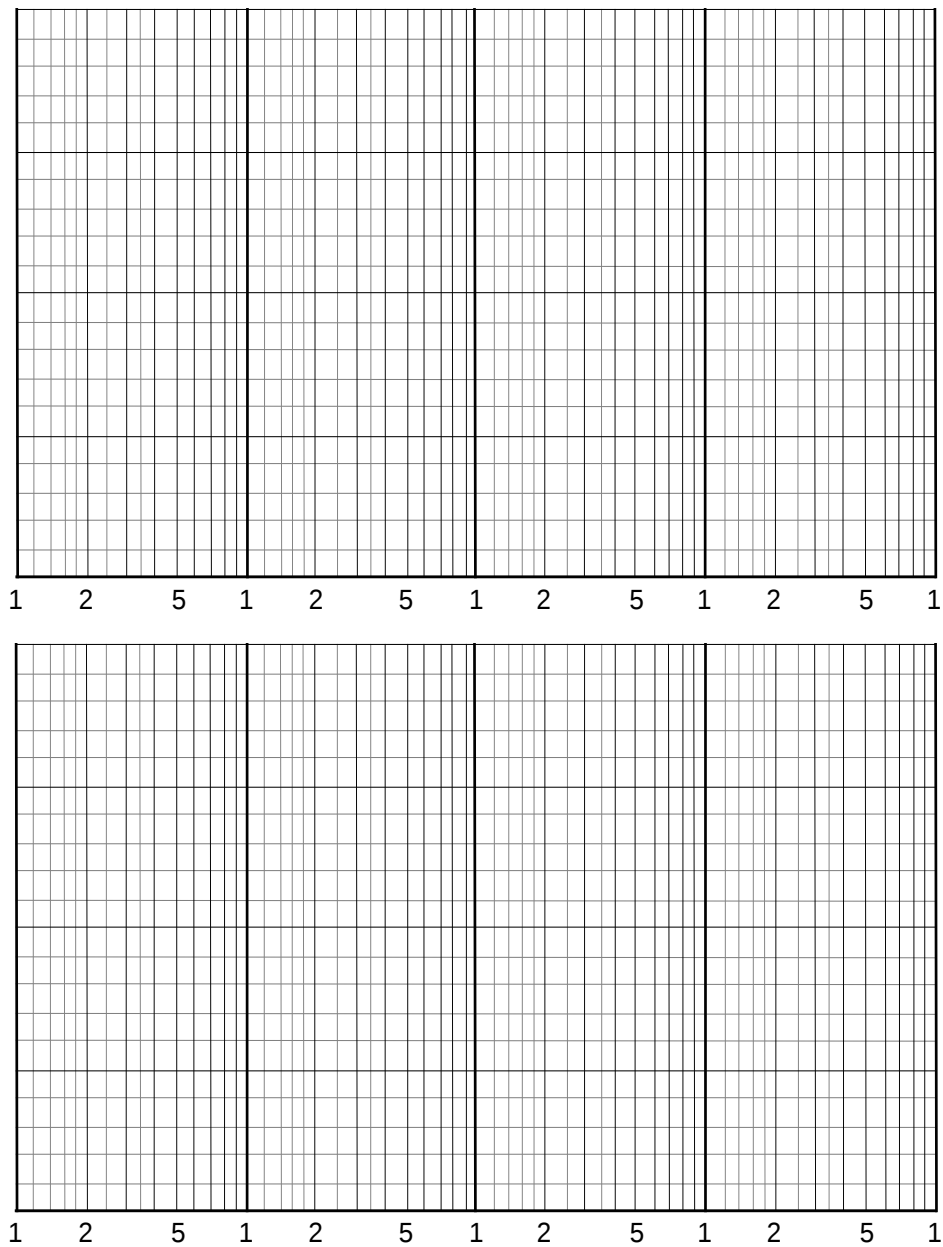


3. Cas du circuit RC:

a) Etude fréquentielle :

- Retrouver la fonction de transfert du quadripôle. En déduire le Gain et la phase.
- Tracer les diagrammes de gain et de phase asymptotique.





b) Etude temporelle :

Déterminer la réponse du système linéaire à un échelon unitaire dont la transformée est $E(p) = \frac{1}{p}$ (on prend toutes les conditions initiales nulles).

IV. Différents types de filtres :

A. Technologie

On classe les filtres en deux grandes familles : ANALOGIQUE et NUMERIQUE.

Les filtres numériques sont réalisés à partir de structure intégrée microprogrammable (DSP). Ils sont totalement intégrables, souples et performants. Ils sont utilisés chaque fois que c'est possible. Ils sont pour l'instant limités à des fréquences pas trop élevées (< 100MHz).

Les filtres analogiques se divisent eux-mêmes en plusieurs catégories :

- les filtres passifs qui font appels essentiellement à des inductances de haute qualité et des condensateurs.
- les filtres actifs sont constitués de condensateurs, de résistances et d'éléments actifs qui sont essentiellement des AIL. Ils sont moins encombrants, faciles à concevoir et moins coûteux que les filtres passifs mais restent limités en fréquence (< 1MHz à cause de l'AIL). Ils consomment plus et nécessitent une source d'alimentation.

TYPE	COMPOSANTS	SPECIFITES
Filtre numérique	Circuit intégrés programmables	► Signaux numérisés ► $F < 100\text{MHz}$ ► convient en grande série ► entièrement programmable
Filtres passifs	Circuit discret R, L et C,	► F élevée ► pas d'alimentation ► non intégrable
Filtres actifs	A.Op, Transistor, R, L et C	► $F < 1\text{MHz}$ ► besoin d'alimentation ► tension filtrée faible < 12V
Filtres à capacités commutées	A.Op, Interrupteur commandé MOS, R et C intégré	► $F < \text{qq MHz}$ ► besoin d'alimentation ► intégrable ► fréquence programmable

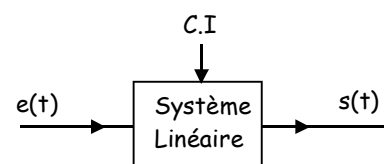
B. Les filtres passifs du 1^{er} ordre:

1. Filtre passe bas :
2. Filtre Passe haut :

C. Les Filtres passifs du 2^{ème} ordre :

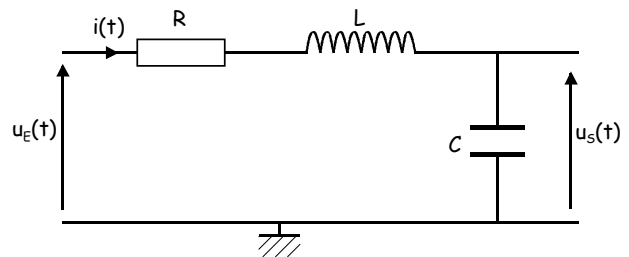
Les systèmes linéaires du deuxième ordre sont régis par une équation différentielle $a_0s + a_1 \frac{ds}{dt} + a_2 \frac{d^2s}{dt^2} = b_0e + b_1 \frac{de}{dt} + b_2 \frac{d^2e}{dt^2}$ qui permet après résolution de connaître la réponse $s(t)$.

On étudiera les circuits du deuxième ordre réalisant les fonctions : Passe-bas, passe-haut, passe-bande et réjecteur.



1. Filtre passe bas :

On se propose d'aborder le cas d'un circuit RLC pour effectuer une étude transitoire (à l'aide des équations différentielles ou de Laplace) et une étude harmonique.



a) Equation différentielle :

En appliquant la loi des mailles, on tire la relation : $u_E = u_R + u_L + u_S$. Et comme $u_S = u_C$, $i = C \frac{du_C}{dt}$ et $u_L = L \frac{di}{dt}$,

u_E la relation devient : $u_E = RC \frac{du_S}{dt} + LC \frac{d^2 u_S}{dt^2} + u_S$ ou encore : $u_E = \frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 u_S}{dt^2} + \frac{2m}{\omega_0} \frac{du_S}{dt} + u_S$ avec $m = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$ le facteur d'amortissement et $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ la pulsation propre.

b) Transmittance d'un filtre passe-bas :

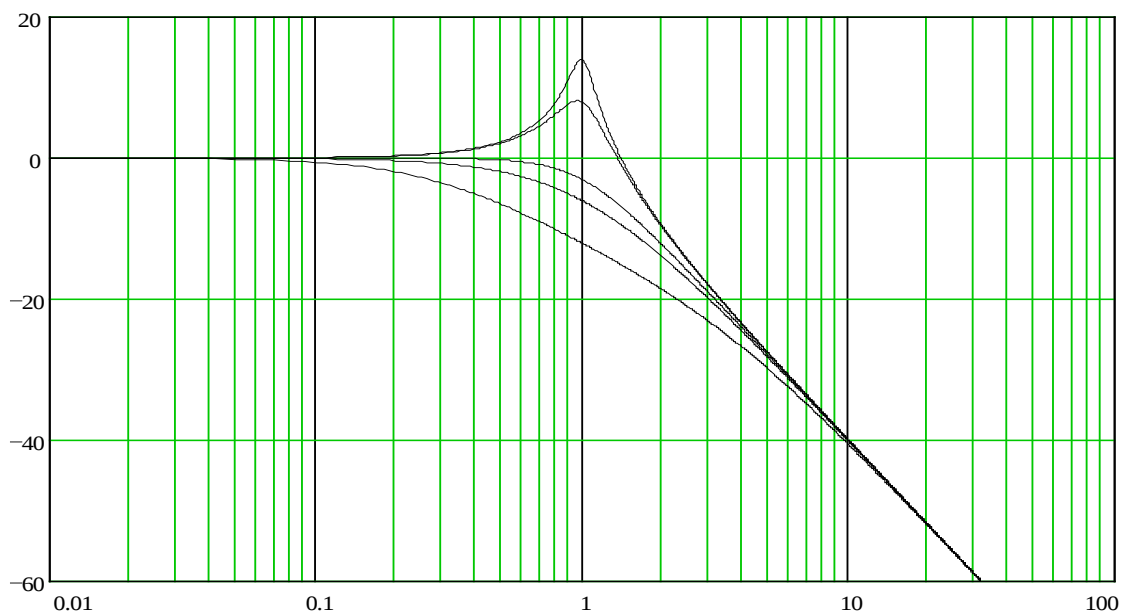
Pour un circuit R.L.C la transmittance devient : $\underline{T}(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega + LC(j\omega)^2}$ et en prenant $m = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$ et

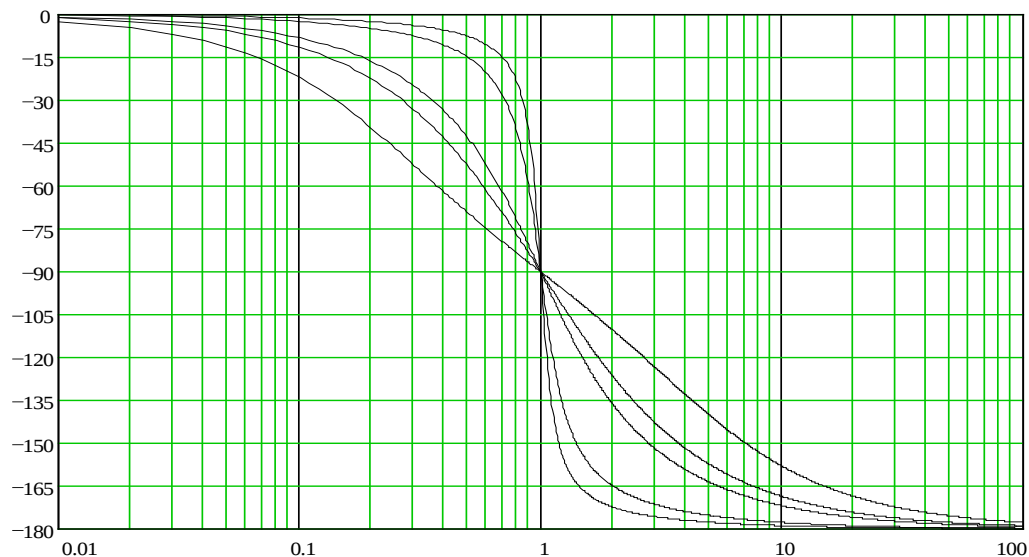
$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$: $\underline{T}(j\omega) = \frac{1}{1 + 2m \frac{j\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}$. Ce qui donne un module : $T(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2m \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$ et un

argument : $\text{Arg}(\underline{T}) = \text{TAN}^{-1} \left[\frac{2m \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \right] = -\frac{\pi}{2} - \text{TAN}^{-1} \left[\frac{\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}}{2m} \right]$ (variation de 0 en basse fréquence à $-\pi$ en

haute fréquence).

c) Diagrammes de Bode : (pour $m=2, 1, \sqrt{2}/2, 1/5, 1/10$)





2. Filtre Passe haut :

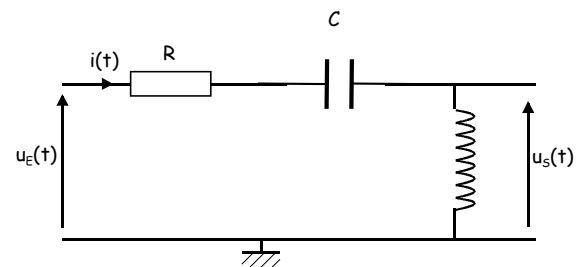
On étudie toujours un circuit RLC en prenant la sortie cette fois ci aux bornes de L.

a) Equation différentielle

On montre que l'équation différentielle peut se mettre

sous la forme : $\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 u_E}{dt^2} = \frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 u_S}{dt^2} + \frac{2m}{\omega_0} \frac{du_S}{dt} + u_S$ avec

$m = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$ le facteur d'amortissement et $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ la pulsation propre.



b) Transmittance d'un filtre passe-haut :

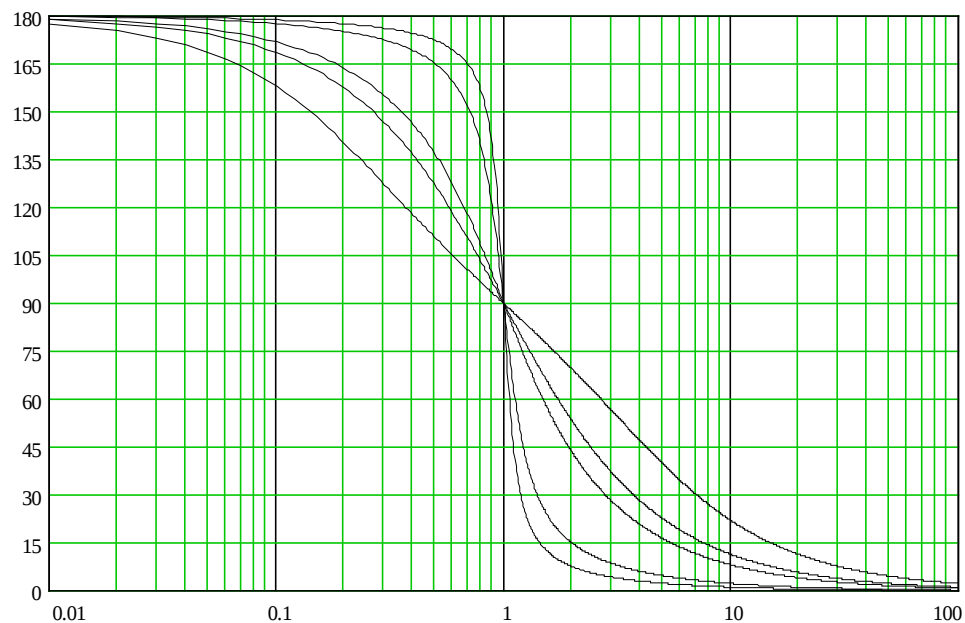
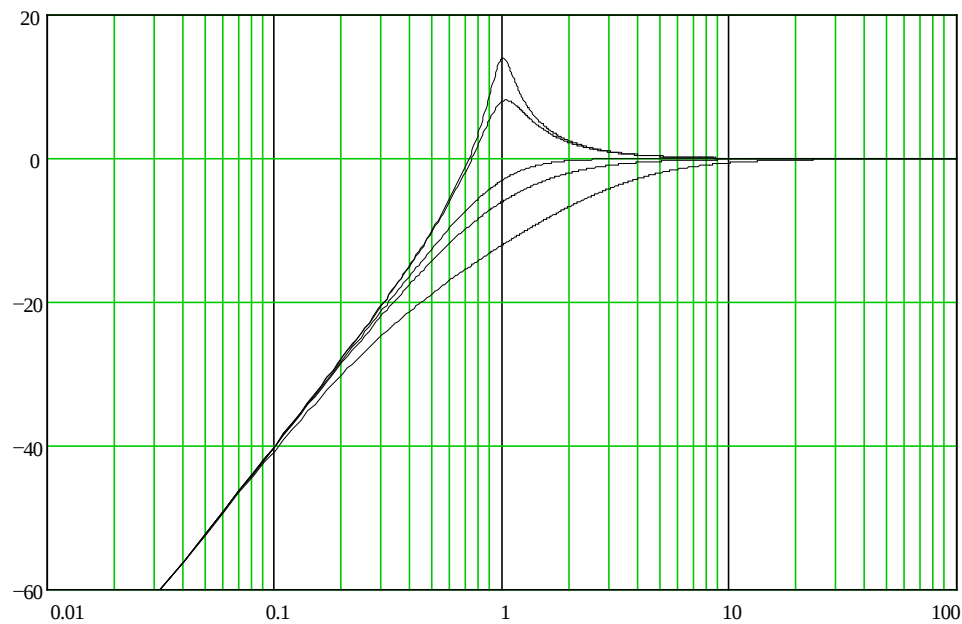
La transmittance du circuit RLC devient dans ce cas: $\underline{T}(j\omega) = \frac{\left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + 2m \frac{j\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}$ en prenant $m = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$ et

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ∴ Ce qui donne un module : $T(\omega) = \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2m \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$ et un argument :

$$\text{Arg}(\underline{T}) = \pi - \tan^{-1} \left[\frac{2m \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \right] = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left[\frac{\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}}{2m} \right] \text{ (variation de } \pi \text{ en basse fréquence à 0 en haute}$$

fréquence).

c) Diagrammes de Bode : (pour $m=2, 1, \sqrt{2}/2, 1/5, 1/10$) :



3. Filtre passe-bande :

On étudie toujours un circuit RLC en prenant la sortie cette fois ci aux bornes de R.

a) Equation différentielle

On montre que l'équation différentielle peut se mettre sous la forme : $\frac{2m}{\omega_0} \frac{du_E}{dt} = \frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 u_S}{dt^2} + \frac{2m}{\omega_0} \frac{du_S}{dt} + u_S$ avec

$m = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$ le facteur d'amortissement et $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ la pulsation propre d'expression inchangée.

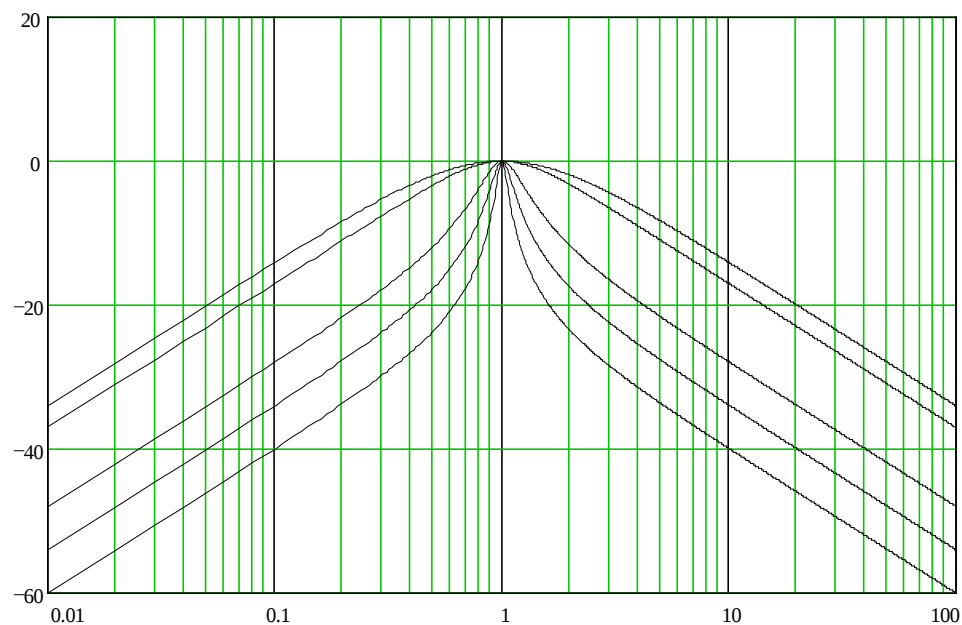
b) Transmittance d'un filtre passe-bande :

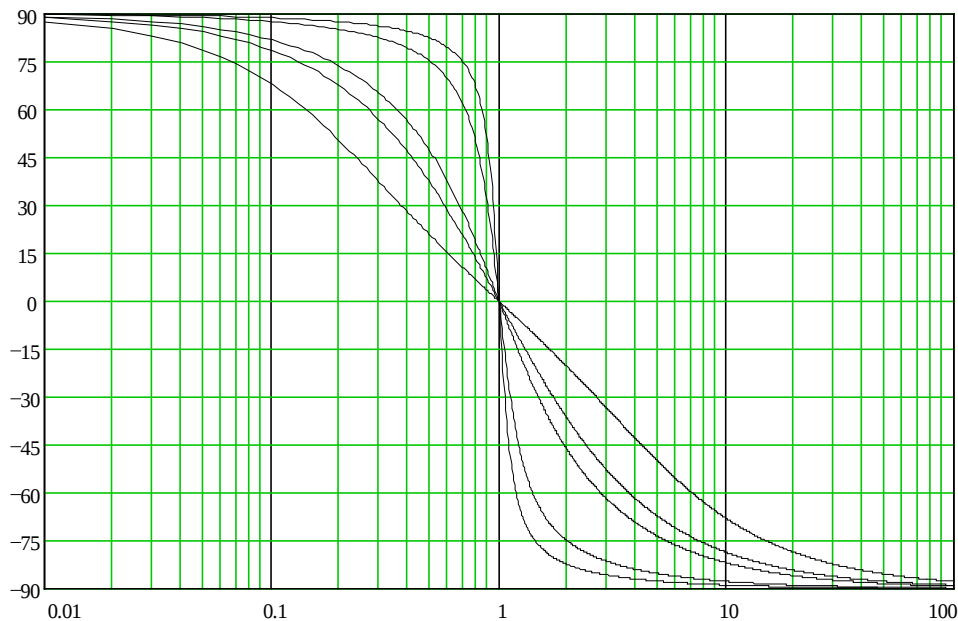
La transmittance du circuit RLC devient dans ce cas: $\underline{T}(j\omega) = \frac{2m \frac{j\omega}{\omega_0}}{1 + 2m \frac{j\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2} = \frac{1}{1 + jQ_0\left(\frac{\omega}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$ en

prenant $m = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q_0 = \frac{1}{2m}$: Ce qui donne un module : $T(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(Q_0\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)^2}}$ et un

argument : $\text{Arg}(\underline{T}) = -\text{TAN}^{-1} \left[\frac{\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}}{2m} \right]$ (variation de $\pi/2$ en basse fréquence à $-\pi/2$ en haute fréquence).

c) Diagrammes de Bode : (pour $m=1, \sqrt{2}/2, 1/5, 1/10, 1/20$) :





4. Filtre réjecteur de bande :

On étudie toujours un circuit RLC en prenant la sortie cette fois ci aux bornes de LC.

a) Equation différentielle

On montre que l'équation différentielle peut se mettre sous la forme : $u_E + \frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 u_E}{dt^2} = \frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 u_S}{dt^2} + \frac{2m}{\omega_0} \frac{du_S}{dt} + u_S$

avec $m = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$ le facteur d'amortissement et $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ la pulsation propre d'expression inchangée.

b) Transmittance d'un filtre réjecteur:

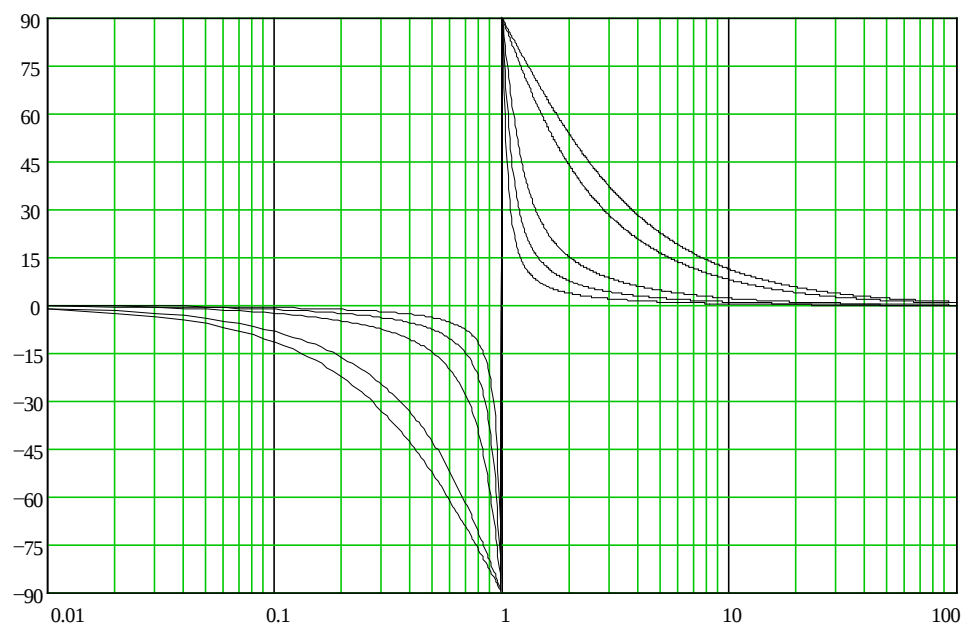
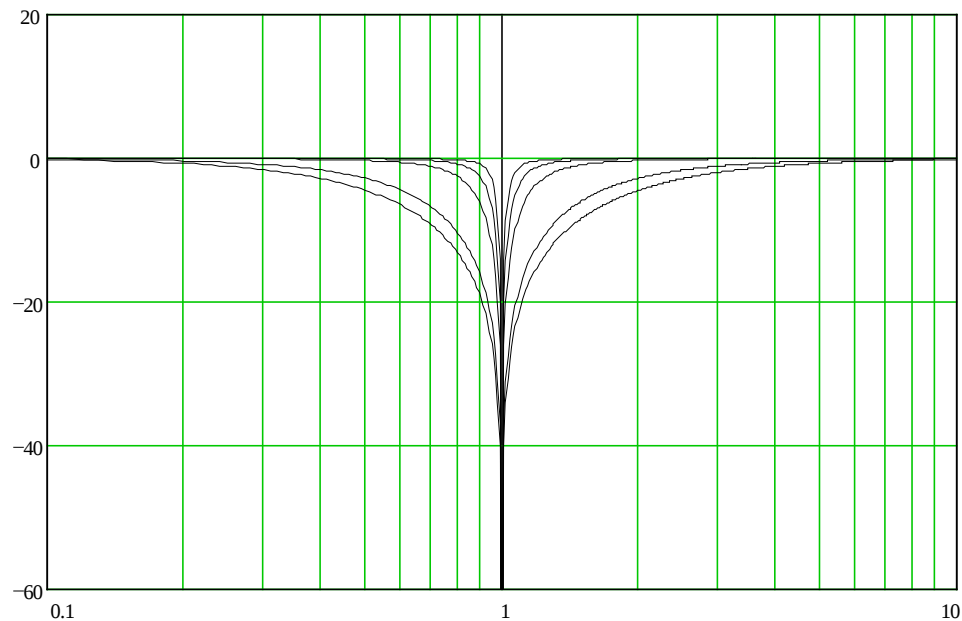
La transmittance du circuit RLC devient dans ce cas:
$$\underline{T}(j\omega) = \frac{1 + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + 2m \frac{j\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2} = \frac{jQ_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{\omega}\right)}{1 + jQ_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$
 en

prenant $m = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q_0 = \frac{1}{2m}$: Ce qui donne un module :
$$T(\omega) = \frac{\left|Q_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right|}{\sqrt{1 + \left(Q_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)^2}}$$
 et un

argument :
$$\text{Arg}(\underline{T}) = \pm \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left[\frac{\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}}{2m} \right]$$
 (variation de 0 à $-\pi/2$ en basse fréquence et de $+\pi/2$ à 0 en

haute fréquence avec saut de phase en ω_0).

c) Diagrammes de Bode : (pour $m=1, \sqrt{2}/2, 1/5, 1/10, 1/20$) :

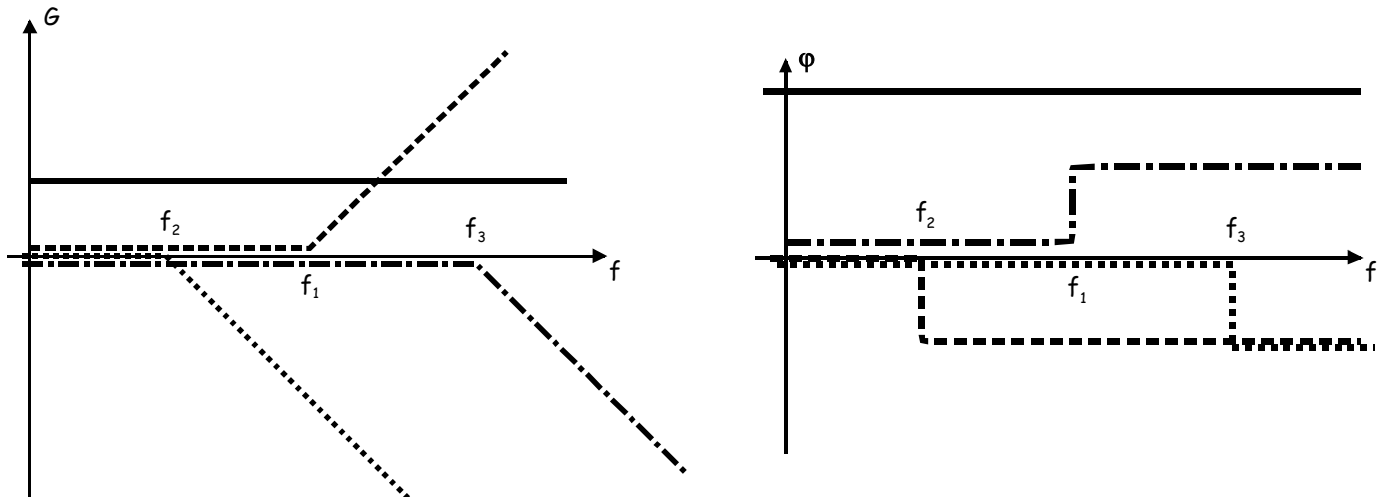


D. Cas des fonctions de transfert Complexes d'ordre n :

Généralisons pour une fonction de transfert quelconque :
$$\underline{T}(jf) = K \frac{(1 + j \frac{f}{f_1}) \dots}{(1 + j \frac{f}{f_2})(1 + j \frac{f}{f_3}) \dots}$$
 . On remarque

que la fonction de transfert peut se décomposer en une somme de fonctions simples dont les réponses de

gain et phase sont connues. Donc $\underline{T}(jf) = K \cdot \underline{T}_1(jf) \cdot \underline{T}_2(jf) \cdot \underline{T}_3(jf) \dots$ donnera d'une part :
 $G = 20 \log T = 20 \log K + 20 \log T_1 + 20 \log T_2 + 20 \log T_3 + \dots = G_1 + G_2 + G_3 + \dots$ et d'autre
 part : $\varphi = \text{Arg}(K) + \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots$. Ce qui permet de tracer les diagrammes asymptotiques des
 fonctions simples et connues, comme le montre la figure ci-dessous. Pour retrouver G et φ , on effectue
 graphiquement la somme des fonctions élémentaires :



E. Ordre et famille de filtre :

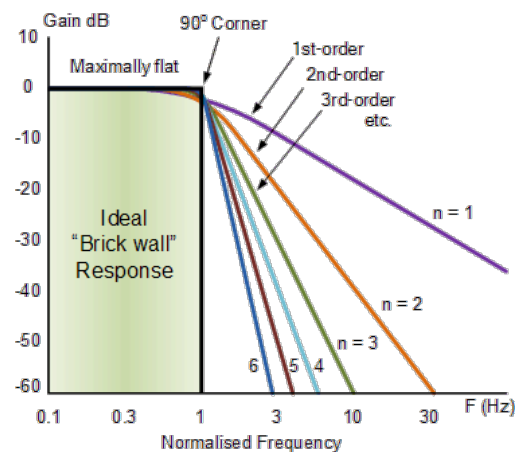
1. Familles de filtres :

a) Filtre de Butterworth (passe-bas):

Pour les filtres passe-bas de Butterworth, en régime harmonique, les transmittances de module $T_n(f)$ sont définies

par la relation suivante : $T(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^{2n}}}$.

Rem: Toutes les courbes de gain passe-bas de Butterworth vérifient pour $f=f_c$ un gain à -3dB et une pente de -20.n dB/déc, n étant l'ordre du filtre.



b) Filtre de Chebyshev :

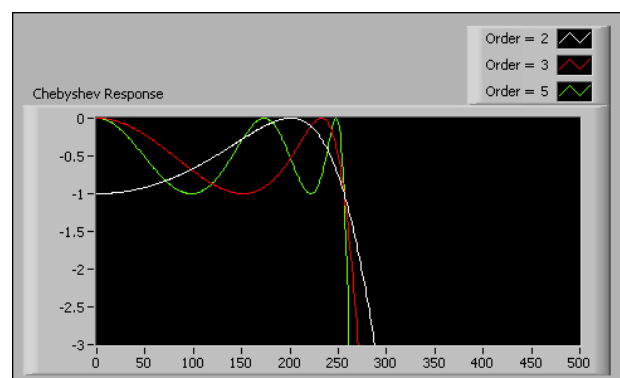
Les filtres passe-bas de Chebyshev sont caractérisés par des transmittances de module $T_n(f)$

$T(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 C_n\left(\frac{f}{f_c}\right)^2}}$ avec $C_0\left(\frac{f}{f_c}\right) = 1$,

$C_1\left(\frac{f}{f_c}\right) = \frac{f}{f_c}$ et

$C_{n+1}\left(\frac{f}{f_c}\right) = 2 \frac{f}{f_c} C_n\left(\frac{f}{f_c}\right) - C_{n-1}\left(\frac{f}{f_c}\right) :$

ε est l'image de l'ondulation dans la bande passante.



Exp: Pour un filtre d'ordre 3, $C_2\left(\frac{f}{f_c}\right) = 2\frac{f}{f_c}C_1\left(\frac{f}{f_c}\right) - C_0\left(\frac{f}{f_c}\right) = 2\left(\frac{f}{f_c}\right)^2 - 1$ et donc $C_2\left(\frac{f}{f_c}\right) = 2\frac{f}{f_c}C_1\left(\frac{f}{f_c}\right) - C_0\left(\frac{f}{f_c}\right) = 2\left(\frac{f}{f_c}\right)^2 - 1$ et donc $C_3\left(\frac{f}{f_c}\right) = 4\left(\frac{f}{f_c}\right)^3 - 3\left(\frac{f}{f_c}\right)$. Toutes les courbes de gain passe-bas de Chebyshev vérifient pour $f=f_c$, $T(1) = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$, un gain de $G_V(1) = -10\text{Log}(1+\varepsilon^2)$ (ondulation) et une pente de $-20.n \text{ dB/déc}$, n étant l'ordre du filtre.

A. Les filtres actifs du 1^{er} ordre :

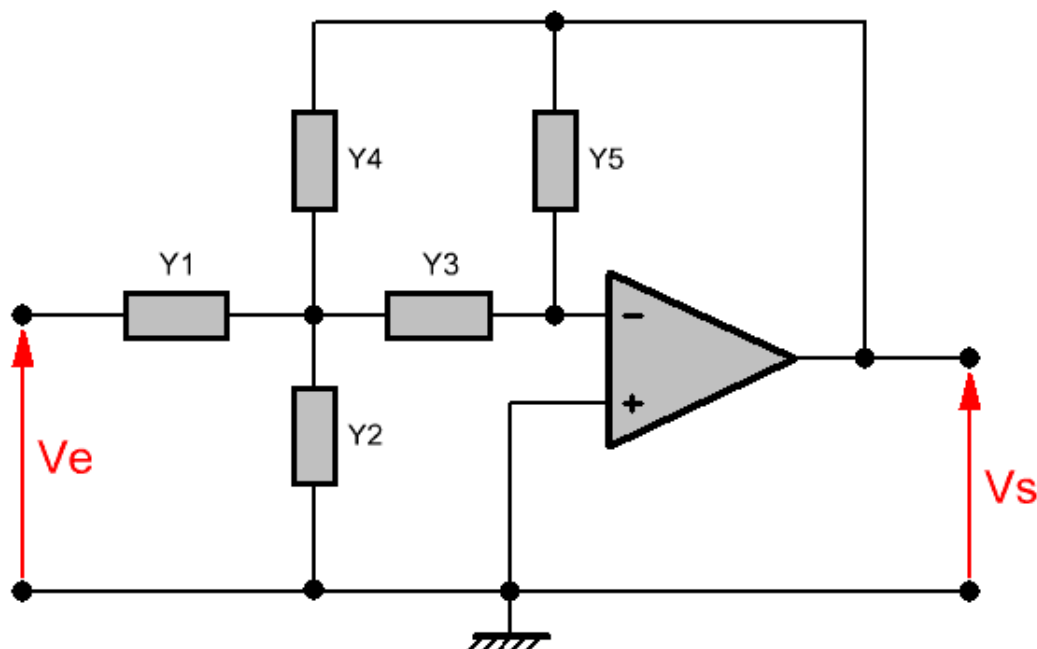
1. Filtre passe bas :
2. Filtre Passe haut :

B. Les filtres actifs du 2^{er} ordre :

1. Structure de Rauch – cas d'un filtre passe-bas:

Nommé structure de Rauch, ce montage est utilisé pour réaliser des filtres actifs du second ordre. Le fonctionnement dans le cas général où chaque composant externe est représenté par son admittance complexe (inverse de l'impédance) donne la transmittance ci-dessous. Rem : la structure de Rauch introduit une inversion ($-\pi$ sur le déphasage).

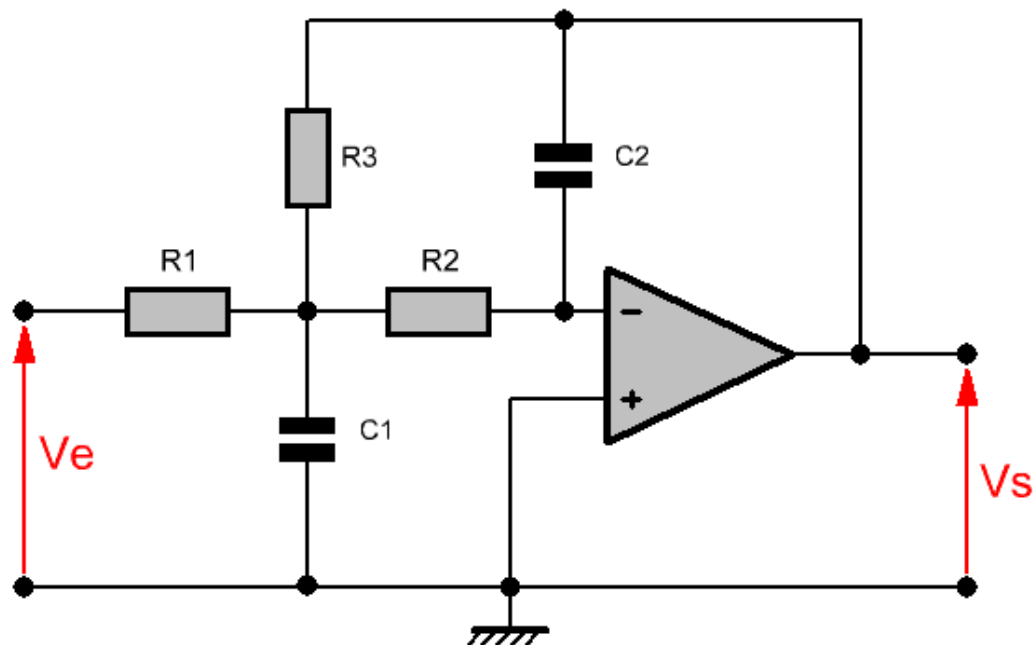
$$\underline{T} = \frac{V_S}{V_E} = - \frac{Y_1 Y_3}{Y_3 Y_4 + Y_5 (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)}$$



Dans le cas d'un filtre passe-bas (cf. exemple montage ci-dessous), le montage dont le comportement est celui recherché donne la transmittance, les fréquences de coupure ainsi que sur le coefficient d'amortissement et de qualité exprimé par les relations suivantes :

$$\underline{T} = \frac{V_S}{V_E} = - \frac{1}{1 + 3jRC_2\omega + (j\sqrt{C_1C_2}\omega R)^2} = \frac{-1}{1 + 2mj\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

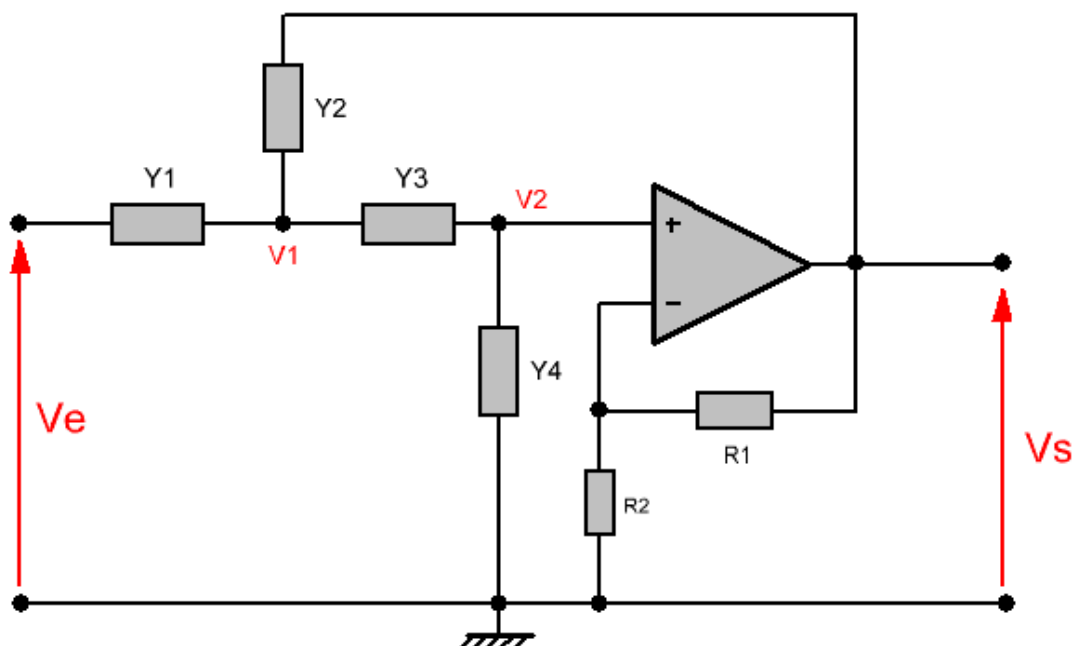
Avec $m = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{C_2}{C_1}}$ et $\omega_0 = \frac{1}{R\sqrt{C_1C_2}}$ si $R_1=R_2=R_3=R$.



2. Structure de Sallen Key :

Nommée cellule de Sallen & Key, cette structure est utilisée pour réaliser également des filtres actifs du second ordre. Dans le cas général, on donne la transmittance en fonction des admittances complexes. La cellule de Sallen & Key met en oeuvre une double contre-réaction : positive et négative mais n'introduit pas d'inversion.

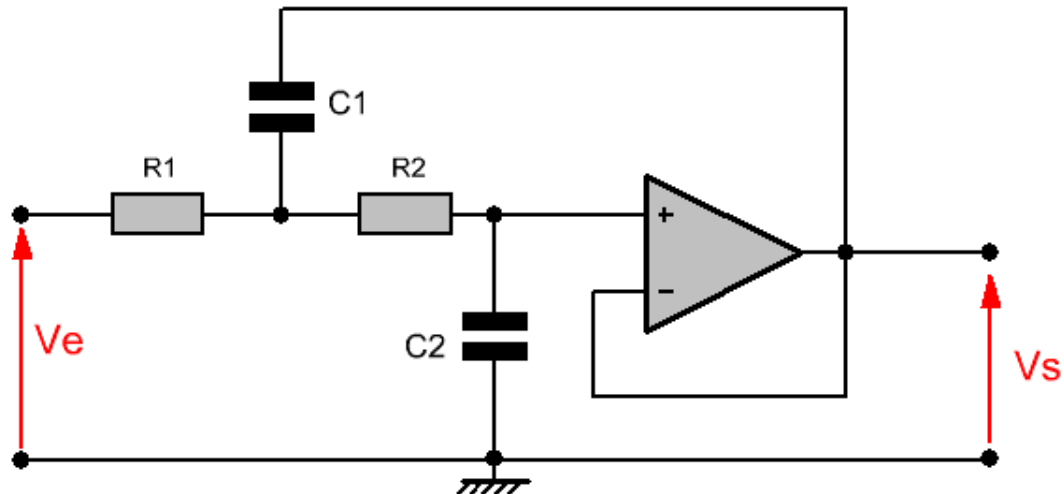
$$\underline{T} = \frac{V_S}{V_E} = A_0 \frac{Y_1 Y_3}{Y_3(Y_4 - Y_2 A_0) + Y_5(Y_1 + Y_2)(Y_3 + Y_4)}$$



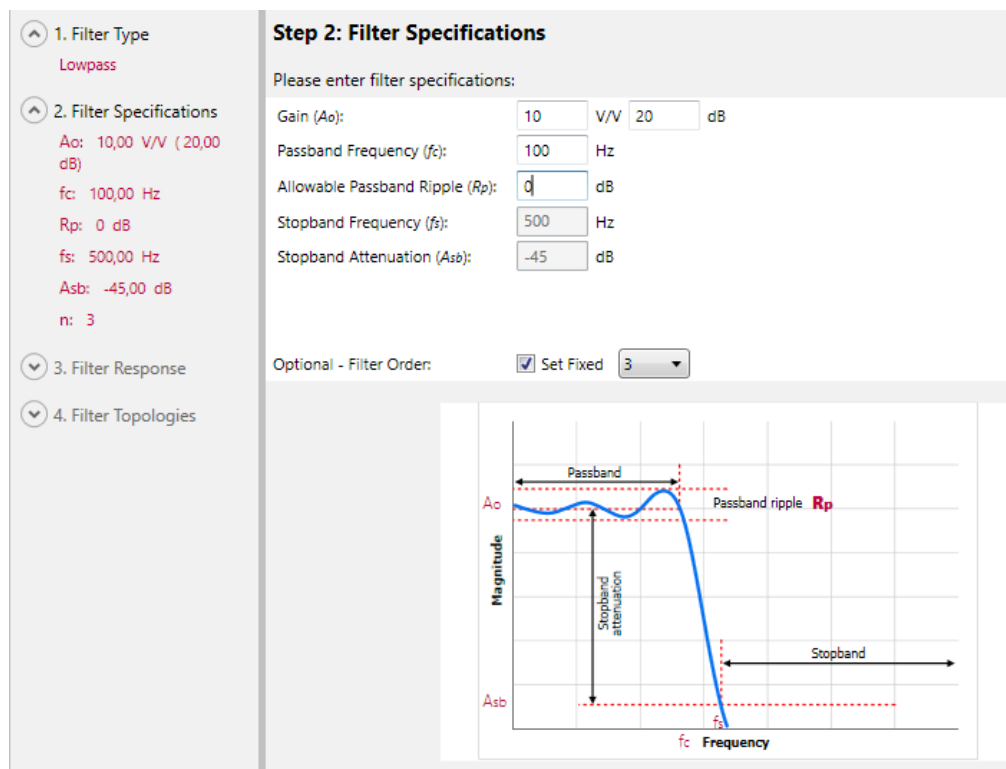
Dans le cas d'un filtre passe-bas (cf. exemple montage ci-dessous), le montage dont le comportement est celui recherché donne la transmittance, les fréquences de coupure ainsi que sur le coefficient d'amortissement et de qualité exprimé par les relations suivantes :

$$\underline{T} = \frac{V_S}{V_E} = - \frac{1}{1 + j(R_1 + R_2)C_2\omega + C_1R_2C_2R_1(j\omega)^2} = \frac{1}{1 + 2mj \frac{\omega}{\omega_0} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Avec $m = \frac{(R_1 + R_2)C_2}{2\sqrt{C_1R_2C_2R_1}}$ et $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{C_1R_2C_2R_1}}$.



C. Structure et outils de CAO:



Rem : Le Logiciel permet de donner le temps de propagation de groupe ou retard de groupe infligé par un filtre. Il doit être le plus constant possible dans la bande passante des signaux biomédicaux



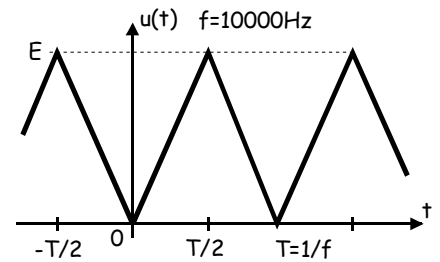
Exercices applications :

I. Action d'un filtre sur un signal périodique :

A. Spectre d'un signal périodique

- Tracer le spectre d'amplitude du signal triangulaire ci-contre dont on donne la décomposition harmonique :

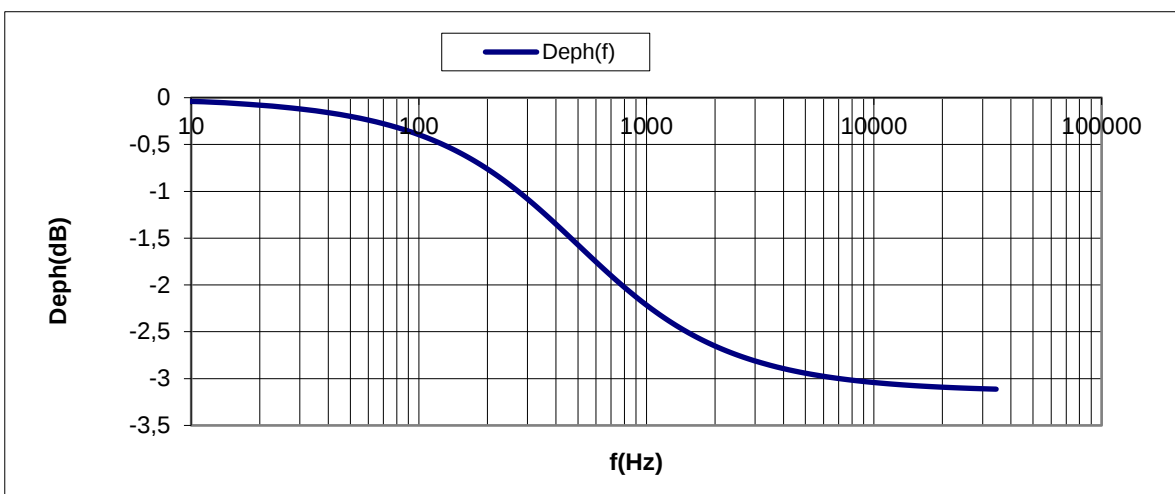
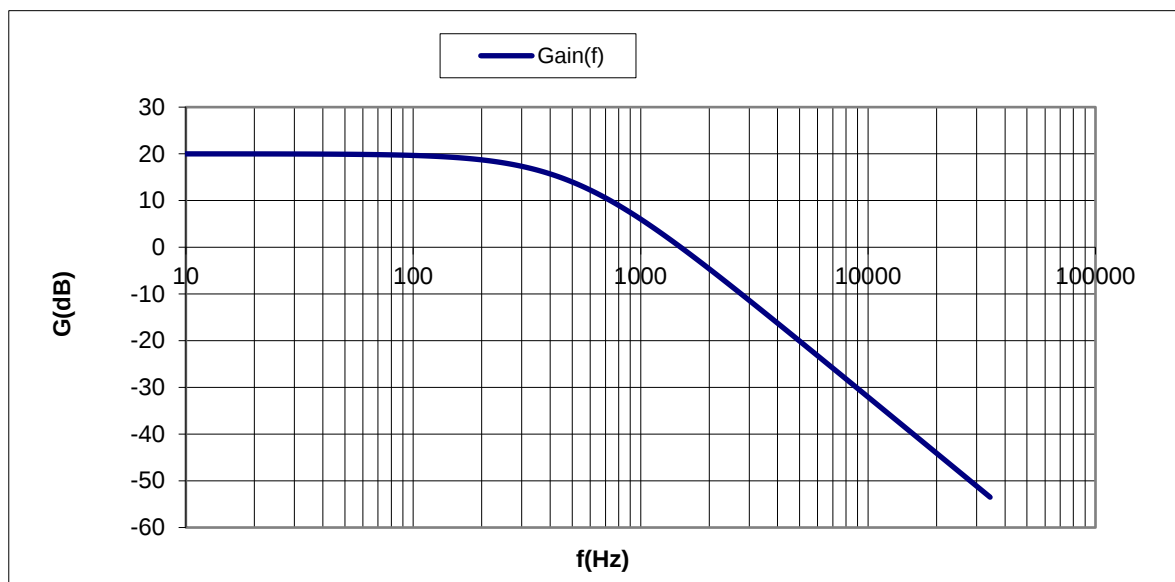
$u(t) = \frac{5}{2} - 2,03\cos\omega_0 t - 0,23\cos 3\omega_0 t - 0,081\cos 5\omega_0 t - 0,041\cos 7\omega_0 t \dots$ Préciser sur le graphe la position de la valeur moyenne et des différents harmoniques.



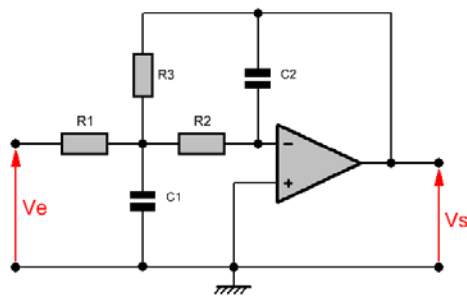
B. Action d'un filtre passe-bas sur un signal périodique :

On applique le signal ci-dessus à l'entrée du filtre passe-pas dont on a relevé la courbe de gain et de phase.

- Donner la fréquence de coupure à -3dB du filtre.
- Donner le gain, la transmittance et la phase pour une tension continue.
- Donner le gain, la transmittance et la phase appliquée au fondamental ainsi qu'aux harmoniques. En déduire une valeur approchée de la tension de sortie.



II. Filtre actif :



si $R_1=R_2=R_3=R$ alors :

$$H(j\omega) = - \frac{1}{1 + jR^2 C_2 \omega \left(\frac{3 + jRC_1 \omega}{R} \right)}$$

$$= - \frac{1}{1 + 3jRC_2 \omega + (j\sqrt{C_1 C_2} \omega R)^2} \rightarrow A = -1$$

$$H_{PB}(j\omega) = \frac{A}{1 + 2jm \frac{\omega}{\omega_c} + (j \frac{\omega}{\omega_c})^2}$$

$$H(j\omega) = - \frac{\frac{1}{R_1 R_2}}{\frac{1}{R_2 R_3} + jC_2 \omega \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + jC_1 \omega \right)}$$

$$= - \frac{\frac{R_3}{R_1}}{1 + jR_2 R_3 C_2 \omega \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + jC_1 \omega \right)}$$

$$\rightarrow \frac{1}{\omega_c} = R \sqrt{C_1 C_2} \Leftrightarrow \omega_c = \frac{1}{R \sqrt{C_1 C_2}}$$

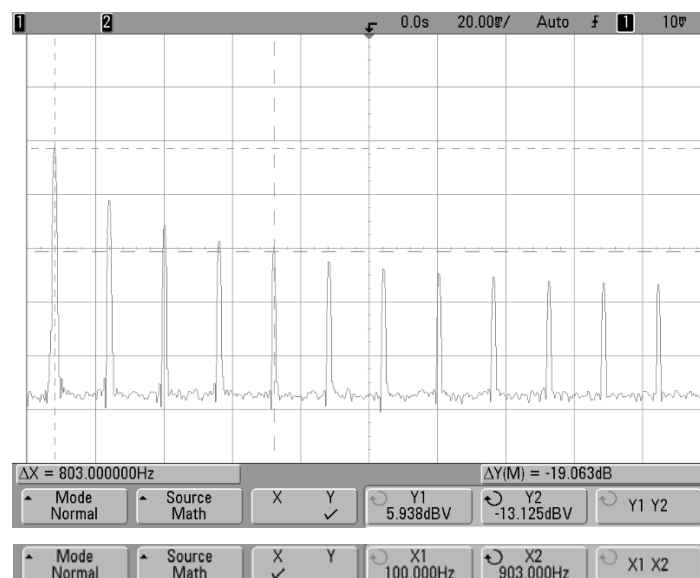
$$\rightarrow \frac{2m}{\omega_c} = 3R C_2 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2} \frac{R C_2}{R \sqrt{C_1 C_2}} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{C_2}{C_1}}$$

On souhaite obtenir une fréquence $f_0 = \omega_0/2\pi = 100$ Hz et un facteur d'amortissement $m = 1/\sqrt{2}$ pour cela, on choisit $R=4,70$ k Ω .

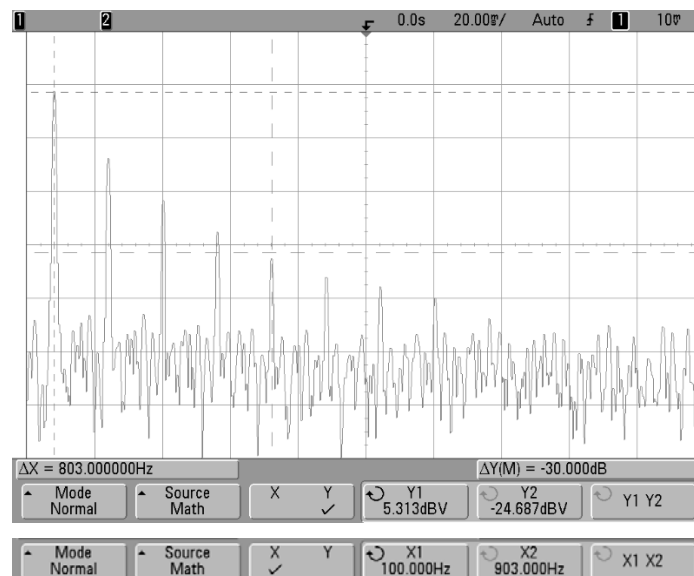
1. Calculer les valeurs des capacités C_1 et C_2 (choisir les valeurs normalisées).
2. Pour les valeurs numériques précédentes, tracer le diagramme de Bode asymptotique (gain et phase).
3. A partir des résultats ci-dessus, déterminer la valeur du Gain pour une fréquence de 100Hz et pour une fréquence de 900Hz : $G_V(100)=\dots\dots\dots G_V(900)=\dots\dots\dots$
4. On applique un signal à l'entrée du filtre : $u_e(t) = 5 + 3\cos \omega t$ avec $f=5000$ Hz. Donner l'expression de la tension de sortie. Que peut-on en déduire ?
5. Le cahier des charges impose une atténuation du signal de minimum de -45dB à 500Hz. Est-ce que ce filtre est compatible avec ces contraintes ?

Action du filtre sur un signal périodique :

On analyse la réponse $u_s(t)$ du montage à une tension $u_e(t)$ carrée et de fréquence 100Hz.



FFT de $u_e(t)$



FFT de $u_s(t)$

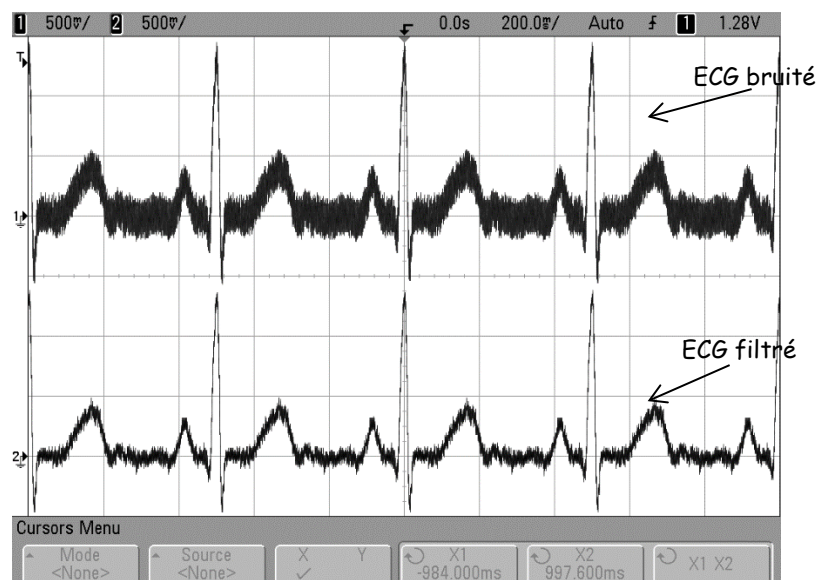
On donne l'allure des spectres respectifs de $u_s(t)$ et $u_e(t)$ obtenus par FFT.

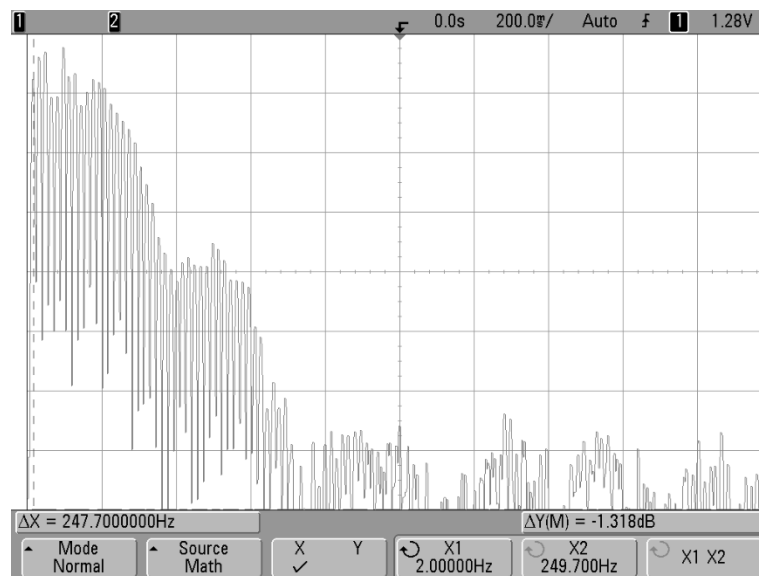
6. Comparer les niveaux d'entrée et de sortie des relevés spectraux.
7. Que deviennent les différentes composantes du signal $u_e(t)$? Justifier en vous aidant du diagramme de gain. On pourra s'intéresser au fondamentale et à l'harmonique de rang 9 déjà repérés sur les relevés par des curseurs de temps et de tension.

A. Application - cas d'un signal ECG :

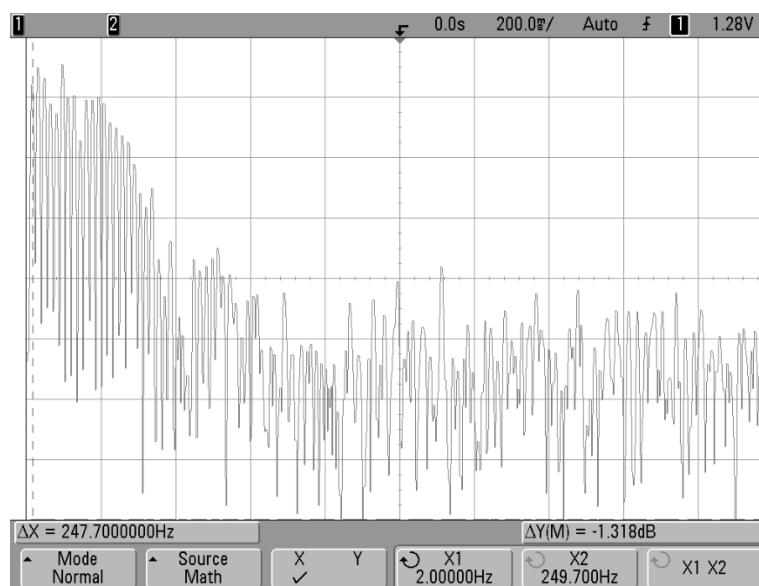
On filtre un signal E.C.G bruité issu d'un dispositif de mesure. Les chronogrammes ci-dessous représentent l'allure temporelle des signaux avant et après le filtre et les spectres du signal ECG bruité et celui du signal ECG filtré.

1. Préciser la nature du filtre à utiliser et dimensionner les valeurs du montage afin de l'adapter aux caractéristiques d'un signal ECG. Expliquer votre démarche.
2. A partir des spectres 1 et 2, déterminer celui qui correspond au signal ECG bruité et celui correspondant au signal ECG filtré. Justifier votre réponse.





Spectre 1



Spectre 2

III. Filtrage d'un signal SPO2 :

IV. Filtrage passe-haut :

1. Etude en régime sinusoïdal :

On analyse la réponse $V_{s2}(t)$ du filtre précédent, à une tension $V_{s1}(t)$ sinusoïdale. Le déphasage φ est

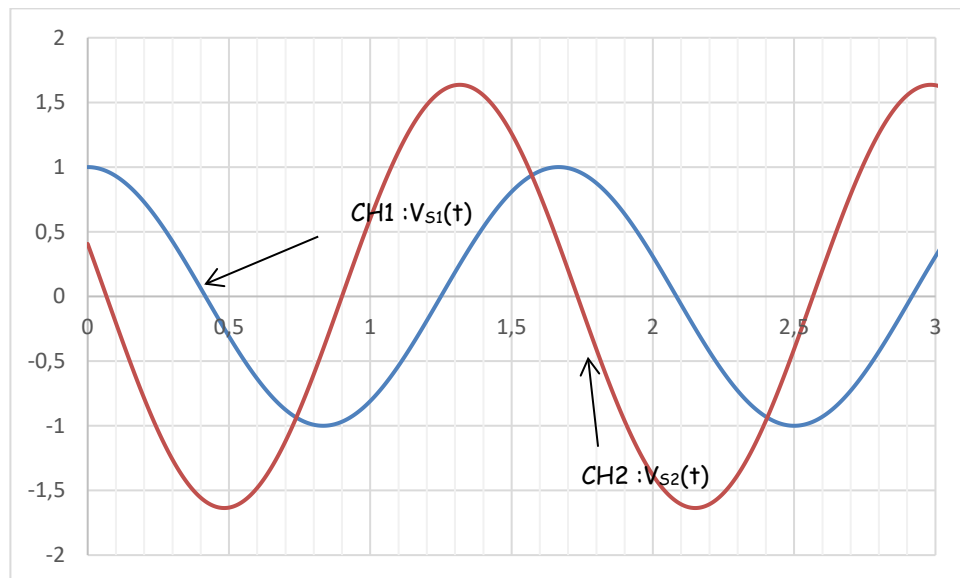
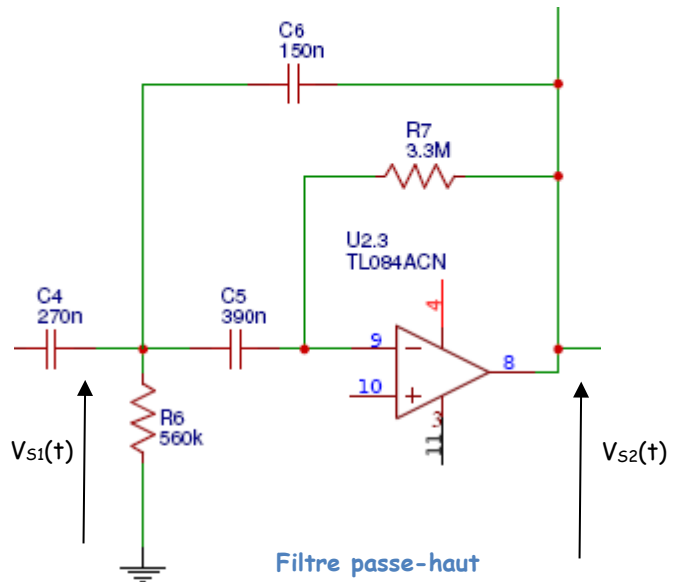
mesuré à partir du décalage Δt . On donne la transmittance montage (fig.4) : $T_F(j\omega) = \frac{2 \left(\frac{j\omega}{\omega_0} \right)^2}{1 + 2m \frac{j\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0} \right)^2}$

en prenant $m=0,71$, $\omega_0 = 2\pi f_0$ et $f_0 = 0,5\text{Hz}$.

- a) Exprimer la transmittance complexe $\underline{T}_F = [T_F; \varphi]$ et déterminer le module T_F puis l'argument φ . Préciser leur signification physique. Détailler vos calculs.

On observe pour le montage précédent à l'oscilloscope les évolutions de $V_{S2}(t)$ par rapport à $V_{S1}(t)$ pour une fréquence f (fig. 5).

- b) Donner la transmittance T_F à cette fréquence, la fréquence f ainsi que le déphasage φ .



Chronogramme de $V_{S2}(t)$ par rapport à $V_{S1}(t)$

2. Diagramme de Bode :

- A partir des mesures ci-dessus, vérifier sur la courbe de gain ci-dessous (fig. 6) le point de mesure correspondant.
- Déterminer la fréquence de coupure f_c et préciser la nature du filtre.
- Déterminer l'amplification dans la bande passante et pour le continu.

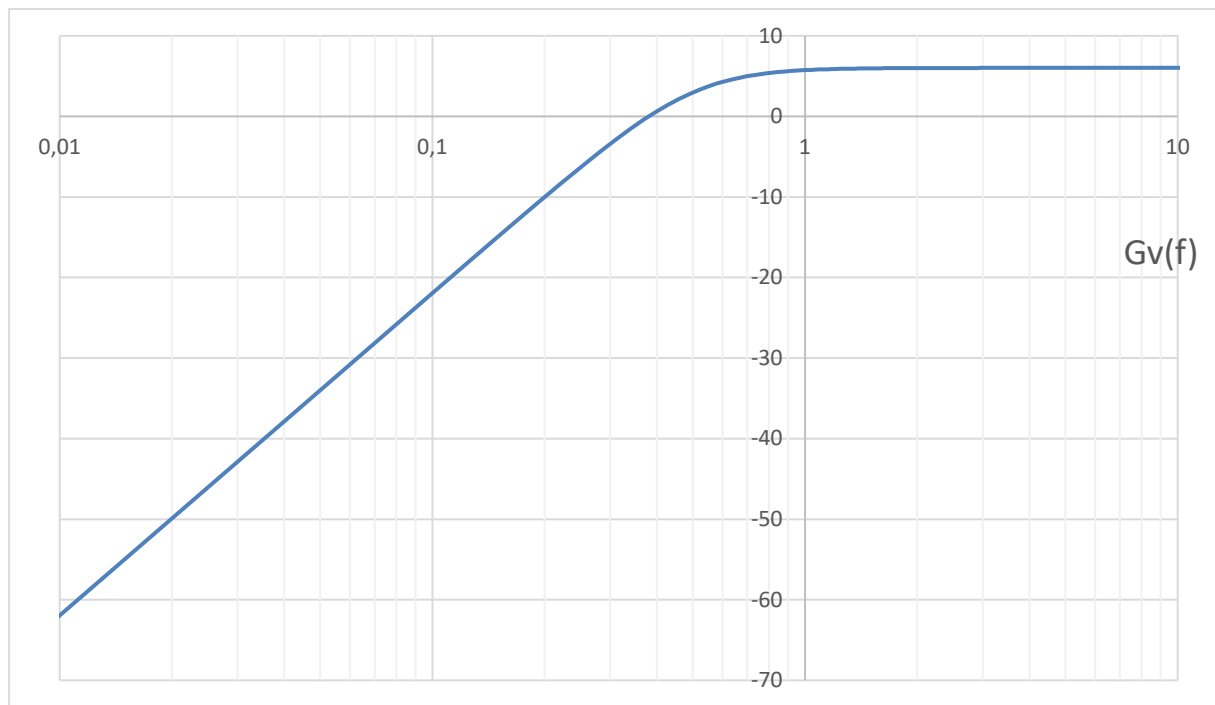
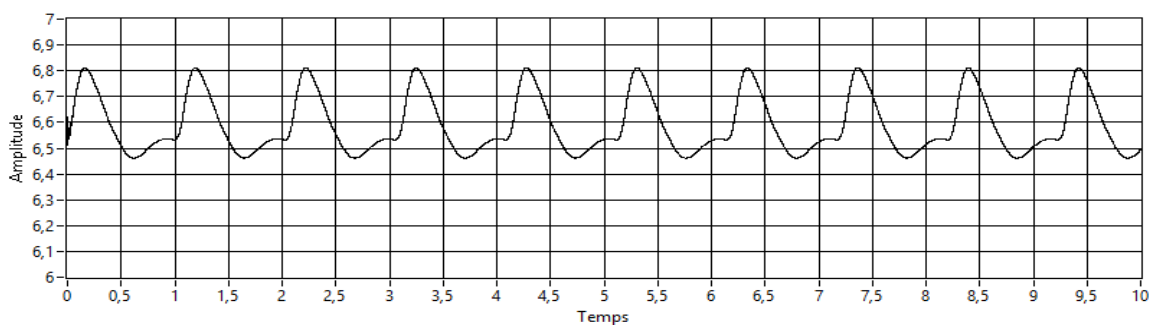


Figure 1 : Diagramme de Gain du filtre passe-haut

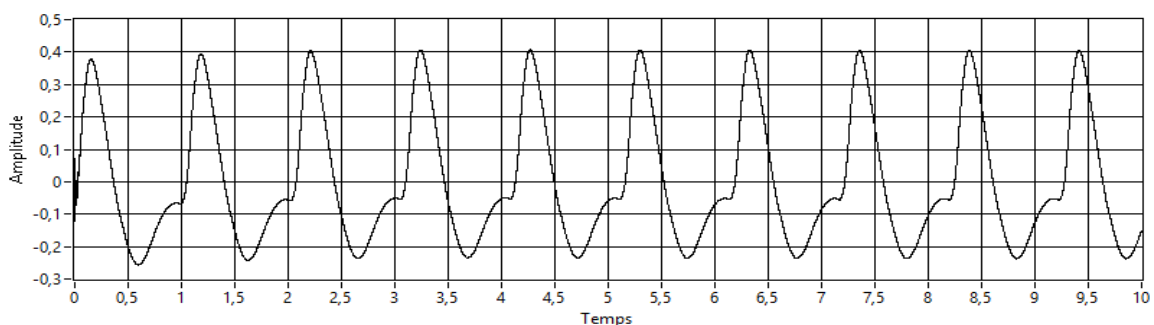
3. Action du filtre passe-haut sur le signal SPO2:

On analyse la réponse $V_{S2}(t)$ du montage à une tension $V_{S1}(t)$ réelle issue du premier étage. On effectue les relevés des signaux $V_{S1}(t)$ et $V_{S2}(t)$ (fig. 7 et 8). A partir des relevés des figures 7 et 8 déterminer :

- La valeur moyenne des signaux $V_{S1}(t)$ et $V_{S2}(t)$.
- La valeur pic à pic des signaux $V_{S1}(t)$ et $V_{S2}(t)$.
- A partir des résultats précédents, justifier l'action du filtre sur le signal $V_{S1}(t)$.



$V_{S1}(t)$



$V_{S2}(t)$