

TD1 : Espaces de Sobolev et résolution de problèmes elliptiques linéaires

1. A PROPOS DE LA DÉFINITION

Montrez que dans la définition de $W^{1,p}$, on peut indifféremment prendre $C_c^\infty(\Omega)$ ou $C_c^1(\Omega)$.

2. DENSITÉ

Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$ avec $1 \leq p < \infty$. Soit $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\rho \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}^n} \rho dx = 1$. On pose $\rho_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} \rho(\epsilon^{-1}x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $\epsilon > 0$. On pose $\bar{u} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\bar{u}(x) = u(x)$ pour pp $x \in \Omega$ et 0 sinon. Montrez que

$$(\rho_\epsilon \star \bar{u})|_\Omega \rightarrow u \text{ dans } L^p(\Omega)$$

et que pour tout $i = 1, \dots, n$,

$$(\partial_i (\rho_\epsilon \star \bar{u}))|_\omega \rightarrow \partial_i u \text{ dans } L^p(\omega)$$

pour tout $\omega \subset\subset \Omega$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0$.

Déduisez-en qu'il existe une famille $(v_\epsilon)_{\epsilon>0}$ telle que $v_\epsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ et

$$(v_\epsilon)|_\Omega \rightarrow u \text{ dans } L^p(\Omega)$$

et que pour tout $i = 1, \dots, n$,

$$(\partial_i v_\epsilon)|_\omega \rightarrow \partial_i u \text{ dans } L^p(\omega)$$

pour tout $\omega \subset\subset \Omega$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0$.

3. PRODUIT

On se donne $u, v \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ pour un certain $1 \leq p \leq \infty$. En utilisant le théorème de densité précédent, montrez que $uv \in W^{1,p}(\Omega)$ et que pour tout $i = 1, \dots, n$, on a

$$\partial_i(uv) = (\partial_i u)v + u\partial_i v.$$

4. GRADIENT NUL

Le but est de prouver le résultat suivant :

Théorème 1. *Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$. On se donne $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $p > 1$, telle que $\partial_i u = 0$ pp pour tout $i = 1, \dots, n$. Alors u est constante, au sens où il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) = c$ pour pp $x \in \Omega$.*

4.1. La dimension 1. On suppose ici que $n = 1$ et $\Omega =]0, 1[$. Soit $\theta \in C^1([0, 1])$ telle que $\theta(t) = 0$ si $t < 1/3$ et $\theta(t) = 1$ si $t > 2/3$. On se donne $\varphi \in C_c^1([0, 1])$ et on définit

$$\psi(x) := \int_0^x \varphi(t) dt - \theta(x) \int_0^1 \varphi(t) dt \text{ pour tout } x \in]0, 1[.$$

- (1) Montrez que $\psi \in C_c^1([0, 1])$ et déterminez ψ' .
- (2) Déterminez $\int_0^1 u\psi' dx$ de deux manières et déduisez-en l'existence de $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\int_0^1 (u(x) - c)\varphi(x) dx = 0.$$

- (3) Concluez.

4.2. La dimension $n > 1$ et $\Omega =]0, 1[^n$. On se donne $\varphi \in C_c^1(\Omega)$.

- (1) Montrez qu'il existe $0 < a < b < 1$ tels que pour tout $x \in \Omega =]0, 1[^n$, si il existe i tel que $\{x_i < a\}$ ou $\{x_i > b\}$, alors $\varphi(x) = 0$.
- (2) On définit pour $x = (x_1, x') \in]0, 1[\times]0, 1[^{n-1}$

$$\psi(x_1, x') := \int_0^{x_1} \varphi(t, x') dt - \theta(x_1) \int_0^1 \varphi(t, x') dt.$$

Montrez que $\psi \in C_c^1(\Omega)$ et déterminez $\partial_1 \psi$.

- (3) Montrez que $u \in L^1([0, 1]^n)$.
- (4) En utilisant le théorème de Fubini, montrez que pour presque tout $x' \in]0, 1[^{n-1}$, $u_{x'} \in L^1([0, 1])$ où $u_{x'}(t) = u(t, x')$ pour pp $t \in]0, 1[$.
- (5) Concluez en vous inspirant du cas $n = 1$

4.3. Le cas général Ω connexe. Traitez le cas général en commençant par montrer que u est localement constante.

5. UNE FORME DE COMPACITÉ

On se donne Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $p > 1$. On se donne une suite $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telle que

- Pour tout i , $u_i \in L^p(\Omega)$,
- Il existe $M > 0$ tel que $\|u_i\|_p \leq M$ pour tout i ,
- Il existe $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim_{i \rightarrow +\infty} u_i(x) = u(x)$ pour pp $x \in \Omega$.

On va montrer que $u \in L^p(\Omega)$ et que $u_i \rightarrow u$ fortement dans L^q pour tout $1 < q < p$.

- (1) En utilisant le Lemme de Fatou, montrez que $u \in L^p(\Omega)$.
- (2) Pour tout $R > 0$, montrez que

$$\int_{\Omega} |u_i - u|^q dx \leq \frac{\int_{\Omega} |u_i - u|^q dx}{R^{p-q}} + \int_{\Omega} \mathbf{1}_{|u_i - u| \leq R} |u_i - u|^q dx.$$

- (3) Concluez

Rappel du Lemme de Fatou : Soit $(f_i)_i$ une suite de fonction $f_i : \Omega \rightarrow [0, +\infty]$ mesurables définies presque partout. Alors

$$\int_{\Omega} \liminf_{i \rightarrow +\infty} f_i dx \leq \liminf_{i \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_i dx.$$

6. UNE SOLUTION FAIBLE RÉGULIÈRE EST SOLUTION FORTE

On se donne Ω un ouvert borné régulier C^∞ . On se donne $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $f \in C^0(\Omega)$. On se donne $u \in H_0^1(\Omega)$ solution faible de

$$\begin{cases} -\Delta u + au = f & \text{dans } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (E_1)$$

- (1) On suppose que $u \in C^2(\Omega)$. En intégrant par parties la définition de la solution faible, montrez que $-\Delta u + au = f$ dans Ω au sens classique.
- (2) On suppose que $u \in C^0(\overline{\Omega})$. Montrez que u est une solution classique de (E_1) .
- (3) En utilisant le théorème de régularité du cours, Montrez que si $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ pour $\alpha \in]0, 1[$, alors u est une solution classique de (E_1) .

7. PERTURBATION DU LAPLACIEN.

On se donne $\Omega \in \mathbb{R}^2$ un ouvert borné régulier et $\alpha, \beta > 0$. On se donne $f \in C^{0,1/2}(\Omega)$. On cherche à prouver l'existence de $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ de

$$\begin{cases} -\alpha \partial_{xx} u - \beta \partial_{yy} u + 2u = f & \text{dans } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (E_2)$$

- (1) Ecrivez une formulation faible de (E_2) .
- (2) Trouvez une solution faible dans $H_0^1(\Omega)$. On pourra soit introduire un produit scalaire spécifique sur H_0^1 soit utiliser le Théorème de Lax-Milgram.
- (3) En utilisant le théorème de régularité, montrez l'existence d'une solution classique $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.

8. UN PROBLÈME NON-HOMOGENÈ

On se donne $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un ouvert borné régulier et $A : \mathbb{R}^n \rightarrow S_n(\mathbb{R})$ (les matrices symétriques) telle que $A_{ij} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$, ainsi que $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. On se donne $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, $0 < \alpha < 1$. On cherche à prouver l'existence de $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + au = f & \text{dans } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (E_3)$$

ici, $\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = \sum_i \partial_i (\sum_j A_{ij} \partial_j u)$. On suppose qu'il existe $\lambda > 0$ tel que

$$\sum_{i,j} X^i A_{ij}(x) X^j \geq \lambda \sum_i (X^i)^2 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n \text{ et tout } X \in \mathbb{R}^n$$

et $a(x) \geq \lambda$ pour tout $x \in \Omega$.

- (1) Ecrivez une formulation faible de (E_3) .
- (2) Trouvez une solution faible dans $H_0^1(\Omega)$. On pourra soit introduire un produit scalaire spécifique sur H_0^1 soit utiliser le Théorème de Lax-Milgram.
- (3) En utilisant le théorème de régularité, montrez l'existence d'une solution classique $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ pour (E_3) .

9. UN PROBLÈME NON-SYMMÉTRIQUE

On se donne $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné régulier $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $b^1, \dots, b^n \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. On suppose qu'il existe $\delta > 0$ tel que $a(x) \geq \delta$ pour tout $x \in \Omega$. On se donne $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, $0 < \alpha < 1$. On cherche à prouver l'existence de $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ de

$$\begin{cases} -\Delta u + \sum_k b^k \partial_k u + au = f & \text{dans } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (E_4)$$

- (1) Ecrivez une formulation faible de (E_4) .
- (2) Montrez que pour $b^1, \dots, b^n$ "assez petits", on peut appliquer le théorème de Lax-Milgram pour trouver une solution faible dans $H_0^1(\Omega)$.
- (3) En utilisant le théorème de régularité, montrez l'existence d'une solution classique $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ pour (E_4) lorsque les b^k s sont petits.