

PRINCIPE DU MAXIMUM FORT ET FAIBLE

Exercice : Le principe du maximum (minimum...) fort de Hopf Soit Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^n$. On cherche à montrer ici le théorème suivant :

Théorème : Soit $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ telle que $-\Delta u \geq 0$. Alors $\min_{\Omega} u = \min_{\partial\Omega} u$. De plus, si ce minimum est atteint à l'intérieur de Ω , alors u est constante.

L'objet de ce problème est la preuve de ce résultat. On se donne une fonction $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ telle qu'il existe $f \in C^0(\Omega)$ tel que

$$-\Delta u = f \text{ dans } \Omega.$$

où $\Delta := \sum_{i=1}^n \partial_{ii}$.

- Soit $z_0 \in \Omega$, soit $\alpha > 0$: on pose $\varphi_{\alpha, z_0}(x) := e^{-\alpha|x-z_0|^2}$ pour tout $x \in \Omega$. Déterminez $-\Delta\varphi_{\alpha, z_0}$.
- Soit $\alpha > 0$. En étudiant l'équation vérifiée par $u + \varepsilon\varphi_{\alpha, z_0}$, montrez qu'il existe $\alpha > 0$ indépendant de $\varepsilon > 0$ tel que le minimum de $u + \varepsilon\varphi_{\alpha, z_0}$ est atteint exactement au bord (on pourra raisonner par l'absurde et utiliser la Hessienne).
- Déterminez $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \min_{\Omega}(u + \varepsilon\varphi_{\alpha, z_0})$. Déduisez-en que $\min_{\Omega} u = \min_{\partial\Omega} u$.

On suppose maintenant qu'il existe $x_0, y_0 \in \Omega$ tels que $\delta := |x_0 - y_0| > 0$ et

$$u(x) > u(x_0) \text{ pour tout } x \in B(y_0, \delta) \subset \Omega.$$

On pose $U := B(y_0, \delta) \setminus \overline{B}(x_0, r)$ avec $0 < r < \delta$ (faites un dessin). Pour $\alpha > 0$, on pose $\psi_{\alpha}(x) := e^{-\alpha|x-y_0|^2} - e^{-\alpha|x_0-y_0|^2}$ pour tout $x \in \Omega$. Pour $\varepsilon > 0$, on pose

$$u_{\varepsilon} := u - u(x_0) - \varepsilon\psi_{\alpha}$$

- Montrez qu'il existe $\alpha, \varepsilon > 0$ tels que $-\Delta u_{\varepsilon} > 0$ sur U et $u_{\varepsilon} \geq 0$ sur ∂U .
- Déduisez-en que $u_{\varepsilon} \geq 0$ sur U .
- On pose $\nu := \frac{x_0 - y_0}{|x_0 - y_0|}$. En revenant à la définition de la dérivée directionnelle, montrez que $\partial_{\nu} u(x_0) < 0$.
- Démontrez le théorème.

Exercice : Le problème de Dirichlet pour les équations ordinaires. Soient $a, b, f \in C^0([0, 1])$ telles que

$$b \geq 0$$

On cherche à montrer qu'il existe une unique fonction $u \in C^2([0, 1])$ telle que

$$\begin{cases} -u'' + au' + bu = f & \text{sur } [0, 1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (D)$$

Il s'agit d'un problème de type Dirichlet.

- Montrez que la solution nulle est l'unique solution $v \in C^2([0, 1])$ du problème $v'' + av' + bv = 0$ et $v(0) = v(1) = 0$. Indication : on pourra raisonner par l'absurde et se ramener au cas où v garde un signe constant entre deux zéros, puis montrer qu'il existe alors une fonction φ telle que $\varphi v'$ est monotone lorsque v est de signe constant.
- En utilisant la structure d'espace vectoriel de dimension finie, montrez que pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, il existe une unique fonction $w \in C^2([0, 1])$ tel que $w'' + aw' + bw = 0$ et $w(0) = \alpha, w(1) = \beta$.
- Montrez l'existence et l'unicité des solutions de (D).
- A l'aide d'un exemple, montrez que l'hypothèse $b \geq 0$ est indispensable.